上 册 目 录

第一章　集和直线上的点集……………………………………1

§1　集和集的运算……………………………………1

1. 集的概念(1)　2. 集的运算(2)　3. 上限集与下限集(5)　4. 函数与集(9)　5. 集的特征函数(11)　习题(12)

§2　映照与势……………………………………15

1. 映照(15)　2. 映照的延拓(17)　3. 一一对应(18)　4. 对等(20)　5. 势(23)　6. 有限集和无限集(25)　7. 可列集及连续点集的势(27)　8. 势的补充(35)　习题(37)

§3　等价关系、序和Zorn引理……………………………………38

1. 等价关系(38)　2. 商集(40)　3. 顺序关系(41)　4. 曹恩(Zorn)引理(43)

§4　直线上的点集……………………………………44

1. 实数直线和区间(44)　2. 开集(45)　3. 极限点(48)　4. 闭集(51)　5. 完全集(55)　6. 稠密和疏朗(57)　习题(59)

§5　实数理论和极限论……………………………………61

1. 实数理论(61)　2. 关于实数列的极限理论(67)　习题(75)

第二章　测　度……………………………………76

§0　引言……………………………………76

§1　集类……………………………………84

1. 环与代数(85)　2. σ-环与σ-代数(88)　3. 单调类(89)　4. $S(E)$结构的概略描述(92)　习题(94)

§2　环上的测度……………………………………95

1. 测度的基本性质(95)　2. 环$\boldsymbol{R}_0$上的测度m(101)　3. 环$\boldsymbol{R}_0$上的g测度(106)　4. 有限可加性和可列可加性(107)　习题(111)

§3　测度的延拓……………………………………112

1. 外测度(113)　2. μ^*-可测集(117)　3. $\boldsymbol{R}^*$与$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$(123)　4. 延拓的唯一性(128)　习题(130)

§4　勒贝格测度、勒贝格-斯蒂阶测度……………………………………131

1. 外测度$m^*(g^*)$(132)　2. 勒贝格和勒贝格-斯蒂阶测度(133)　3. 波雷尔(Borel)集与勒贝格可测集(134)　4. 勒贝格测度的平移、反射不变

性(140) 5. 勒贝格不可测集(141) 6. n维实空间中的勒贝格测度(143)
习题(144)
第三章 可测函数与积分 ……147
§1 可测函数及其基本性质 ……147
1. 可测函数(147) 2. 可测函数的性质(150) 3. 可测函数列的极限(154) 4. 允许取±∞值的可测函数(156) 5. Borel可测函数(158)
习题(161)
§2 可测函数列的收敛性与勒贝格可测函数的结构 ……162
1. 测度空间和“几乎处处”(163) 2. 依测度收敛(165) 3. 完全测度空间上的可测函数列的收敛(177) 4. 勒贝格可测函数的构造(179)
习题(183)
§3 积分及其性质 ……185
1. 在测度有限的集上有界可测函数的积分(185) 2. 在测度σ-有限集上(有限的)可测函数的积分(196) 3. 勒贝格-斯蒂阶积分(209) 4.积分的变数变换(214) 习题(218)
§4 积分的极限定理 ……220
1. 控制收敛定理(220) 2. Levi引理和Fatou引理(226) 3. 极限定理的注(229) 4. 复函数的积分与极限定理的应用(234) 习题(239)
§5 重积分和累次积分 ……240
1. 乘积空间(240) 2. 截口(242) 3. 乘积测度(243) 4. 富必尼(Fubini)定理(250) 5. 乘积测度的完全性(258) 习题(261)
§6 单调函数与有界变差函数 ……263
1. 单调函数(263) 2. 单调增加的跳跃函数(266) 3. 导数、单调函数的导数(270) 4. 有界变差函数(285)习题(298)
§7 不定积分与全连续函数 ……301
1. 不定积分的求导(301) 2. 全连续函数(305) 3. 牛顿-莱布尼兹公式(309) 4. 勒贝格分解(310) 习题(311)
§8 广义测度和积分 ……312
1. 引言(312) 2. 广义测度(313) 3. 关于广义测度的积分(319)
4. R-N导数(323) 5. 勒贝格分解(333) 6. 测度唯一性(337)
7. 测度与积分后记(340) 习题(340)
参考文献 ……342
索引 ……343

第一章　集和直线上的点集

§1 集和集的运算

1. 集的概念　在现代数学中，集的概念已被普遍地采用．通常把具有某种特定性质的具体的或抽象的对象的全体称做**集合**，或简称为**集**，其中的每个对象称为该集中的**元素**．

例如，在代数学中，群、环、域等都是某种集，这种集的各个元素之间具有一定的代数关系；在几何学中，直线、曲线、曲面等都可以看作是由点所组成的点集；数学分析中的实数集、连续函数集、某函数的定义域等都是常用的集．

集是数学的一个基础概念．集论① 是研究集的一般性质的，属于数学基础的一个分支．关于集和元素的严谨的定义属于集论的研究范围，这里不予涉及．

以后我们常用大写字母 $A, B, X, Y, \cdots$ 表示集，而用小写字母 $a, b, x, y, \cdots$ 表示元素．

对于一个集 A 来说，某一对象 x 或者是集 A 的元素——这时，我们说 x **属于** A，记为 $x \in A$；或者 x 不是集 A 的元素——即 x 不属于 A，记为 $x \overline{\in} A$；二者必居其一．

当集 A 是具有某性质 P 的元素全体时，我们往往用下面的形式来表示 A：

$$A=\{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}$$

例如方程 $x^2-1=0$ 的解 x 的全体组成的数集是 $\{x \mid x^2-1=0\}$．如

① 集论的重要文献首先是德国数学家 G. Cantor（康托尔）在十九世纪末发表的，后来逐步发展成为数学的一个分支．集论中的某些概念和结果已成为近代数学中许多分支的基础。

果能够明确写出集 A 的所有元素，也可以都列举在大括号里面，例如上面这个数集就是 $\{1, -1\}$．有时我们也把集 $\{x \mid x \in E,\ x$ 有性质 $P\}$ 改写成 $E(x$ 有性质 $P)$．例如，设 $f(x)$ 是 E 上的一个函数，c 是一个实数，我们把集 $\{x \mid x \in E, f(x) \leqslant c\}$ 写成 $E(f(x) \leqslant c)$．

下面我们研究集的关系．

如果集 A 中的元素都是集 B 的元素，那末称 A 是 B 的**子集**，记做 $A \subset B$，读做 A 包含在 B 中，或记做 $B \supset A$，读作 B 含有 A．显然，$A \subset A$．有时为研究问题的需要，我们引入不含有任何元素的集合，称为**空集**，记为 $\varnothing$．例如 $\{x \mid x$ 是实数且 $x^2+1=0\}$ 是一空集．我们规定空集是任何集的子集．如果 $A \subset B$，而 B 中确有元素 b 不属于 A，称 A 是 B 的**真子集**．例如 A 是平面上以正有理数做半径的圆的全体，B 是平面上所有圆的全体，那末 A 是 B 的一个真子集．

如果 $A \subset B$，而且又有 $B \subset A$，这时 A，B 由相同的元素组成，就是同一集，称 A **等于** B（或 B 等于 A），记做 $A = B$（或 $B = A$）．例如 $\{x \mid x^2-1=0\} = \{1, -1\}$．

2．集的运算　设 A，B 是两个集，由集 A 同集 B 的一切元素所组成的集称做 A 同 B 的**和集**，简称为"**和**"，记做 $A \cup B$（图 1.1）；所有既属于集 A 又属于集 B 的元素组成的集，称为 A 和 B 的**通集**，也简称为"**通**"或"**交**"，记做 $A \cap B$（图 1.1）．

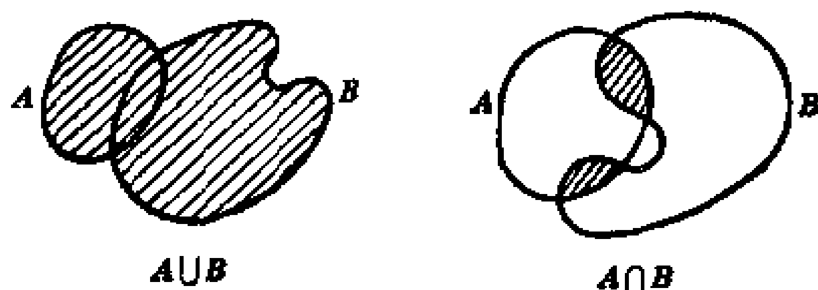


图　1.1

完全类似地可以定义任意个集的和集及通集．设 $\{A_\alpha \mid \alpha \in N\}$

是任意一组集，其中 α 是集的指标，它在某个指标集 N 中变化，由一切 $A_\alpha(\alpha\in N)$ 的所有元素所组成的集称做这组集的和集，记做 $\bigcup\limits_{\alpha\in N} A_\alpha$，也记为 $\sum\limits_{\alpha\in N} A_\alpha$；同时属于每个集 $A_\alpha(\alpha\in N)$ 的一切元素所组成的集，称做这组集的通集，记做 $\bigcap\limits_{\alpha\in N} A_\alpha$ 或 $\prod\limits_{\alpha\in N} A_\alpha$.

应该注意，由若干个集构成和集时，同时是两个或两个以上的集所公有的元素在和集中只算做一个．另外，当 $A\cap B=\varnothing$ 时，我们又简称为 A 与 B 不交．当 $A\cap B\neq\varnothing$ 时，简称为 A 与 B 相交.

不难证明"和"、"通"运算具有下面一些性质:

1° $A\cup A=A$, $A\cap A=A$ （和、通的幂等性）;

2° $A\cup\varnothing=A$ （空集是加法的零元）;

3° $A\cup B=B\cup A$ （和的交换律）;

$A\cap B=B\cap A$ （通的交换律）;

4° $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ （和的结合律）;

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ （通的结合律）;

5° $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ （分配律）;

6° 如果 $A\subset B$，那末对任意的集 C 成立着

$A\cup C\subset B\cup C$, $A\cap C\subset B\cap C$ （和、通的保单调性）.

在集合之间，除了上面的"加法"和"乘法"以外，我们再引入减法：设 A, B 为两个集，由集 A 中不属于 B 的那些元素全体所组成的集，称做集 A 减集 B 的**差集**，记做 $A-B$ 或 $A\backslash B$（注意，这里并不要求 $A\supset B$）．当 $B\subset A$ 时，称差集 $A-B$ 为 B 关于 A 的**余集**，记做 C_AB. 当我们只讨论某个固定集 A 的一些子集 B 时，常简记 $A-B$ 为 B^c 或 $C(B)$，并称它是 B 的余集.

"减法"运算（或称求余运算），显然有下面的性质:

7° 如果 $A\subset B$，那末 $A-B=\varnothing$;

8° $(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$ （"减法"分配律）；

9° $(C-A)-B=C-(A\cup B)$；

10° 如果 $A\subset C, B\subset C$，那末 $A-B=A\cap C_C B$.

我们称集 $(A-B)\cup(B-A)$ 为集 A 和集 B 的**对称差**，记做 $A\triangle B$.

11° $A\cup B=(A\triangle B)\cup(A\cap B)$。

以上这些性质都可以从集的"包含"、"相等"、"和"、"通"以及"差"的定义推导出来，其中有些还可以推广到任意个集的一般情况，这里不一一证明．图形可以帮助我们较直观地理解和记忆一些概念，或者启发我们思考问题，是学习中的一种有效工具，以后将经常采用．但是必须指出，决不能把图形的示意看成定义，或者定理的证明．因为定义必须要用确切的文字叙述，而定理的证明是必须经过严密的逻辑论证．

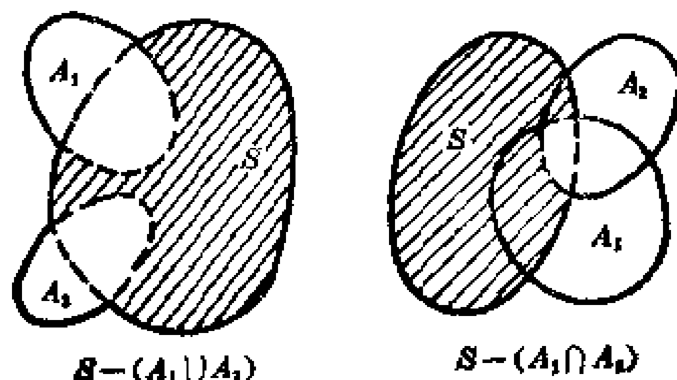
下面介绍两个有用的公式——和通关系式：

设 S 是任意一个集，$\{A_\alpha|\alpha\in N\}$ 是任一族集，那末有

12° $$S-\bigcup_{\alpha\in N}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in N}(S-A_\alpha); \tag{1.1}$$

13° $$S-\bigcap_{\alpha\in N}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in N}(S-A_\alpha). \tag{1.2}$$

用文字叙述，就是：和集（关于 S）的余集等于每个集（关于 S）的余



$S-(A_1\cup A_2)$　　$S-(A_1\cap A_2)$

图 1.2

集的通集(12°)，而通集(关于S)的余集等于每个集(关于S)的余集的和集(13°)(图 1.2)．

现在来证明和通关系式(1.1)和(1.2)．

首先，(1.1)式左边是属于S而不属于任何一个$A_\alpha(\alpha\in N)$的元素所成的集，因而它属于每一个集$S-A_\alpha(\alpha\in N)$，所以左边是右边的子集；完全类似地可以说明右边也是左边的子集．这样，(1.1)式两边的集相同．类似地可以证明(1.2)式，希望读者自己进行分析和论证．但为帮助读者熟悉论证和表达的方法，我们把证明过程详细写出来．这是用集论方法论证时常用的方法．读者可以仿此证明上面各条性质 1°——11°．

现证(1.1)．记$S-\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$为$P$，$\bigcap\limits_{\alpha\in N}(S-A_\alpha)$为$Q$．这样，只要证明$P=Q$．

设$x\in P$，按定义有$x\in S$而且$x\overline{\in}\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$．因此，对每个$\alpha\in N$，$x\overline{\in}A_\alpha$，因而$x\in S-A_\alpha(\alpha\in N)$．即$x\in Q$．这就是说，凡$P$中的元素都属于$Q$，所以$P\subset Q$．

反过来，设$x\in Q$，那末对任何$\alpha\in N$有$x\in S-A_\alpha$，即$x\in S$，而且$x\overline{\in}A_\alpha(\alpha\in N)$，因此$x\overline{\in}\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$，所以$x\in S-\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha=P$，这就是说，凡$Q$中的元素必属于$P$，所以$Q\subset P$．综合起来就得到

$$P=Q$$ 证毕

(1.2)的证明是类似的，略去．

强调指出，(1.1)，(1.2)式中并不要求S包含每个$A_\alpha(\alpha\in N)$．

3. 上限集与下限集 设$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是任意一列集．由属于上述集列中无限多个集的那种元素全体所组成的集称为这一列集的上限集，记做$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$或$\limsup\limits_n A_n$；而由属于集列中从某个

指标 $n_0(x)$（这个指标不是固定的，与元素 x 有关）以后所有集 A_n 的那种元素 x 全体（即除去有限多个集外的所有集 A_n 都含有的那种元素）组成的集称为这一列集的**下限集**，记做 $\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n$ 或 $\liminf\limits_{n}A_n$. 显然，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subset\varliminf_{n\to\infty}A_n\subset\varlimsup_{n\to\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \tag{1.3}$$

例 1 设 $A_n(n=1,\ 2,\cdots)$是如下一列点集：

$$A_{2n+1}=\left[0,\quad 2-\frac{1}{2n+1}\right],n=0,1,2,\cdots$$

$$A_{2n}=\left[0,\quad 1+\frac{1}{2n}\right],n=1,2,\cdots$$

我们来确定$\{A_n\}$的上限集和下限集.

因为 $A_n\subset[0,2)(n=0,1,2,\cdots,)$，所以 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subset[0,2)$(其实是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=[0,2)$). 根据(1.3)，只要考察$[0,2)$中点哪些属于$\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n$ 或 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n$ 即可. 显然，$[0,1]\subset A_n(n=0,1,2,\cdots,)$，所以$\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n\supset[0,1]$. 而对于$(1,2)$中的任何点 x，必存在自然数 $n_0(x)$，使当 $n>n_0(x)$时，

$$1+\frac{1}{2n}<x\leqslant 2-\frac{1}{2n+1}$$

即当 $n>n_0(x)$时，$x\overline{\in}A_{2n}$，但 $x\in A_{2n+1}$. 换句话说，对于开区间$(1,2)$中的 x，是有充分大奇数指标的集都含有 x，从而$\{A_n\}$中有无限多个集含有 x，而充分大的偶数指标的集都不含有 x，即$\{A_n\}$中不含有 x 的集不是有限多个. 因此，

$$\varlimsup_{n\to\infty}A_n=[0,2),\quad \varliminf_{n\to\infty}A_n=[0,1]$$

例 2 设$A_n=\left[0,\ 1+\frac{1}{n}\right],n=1,2,\cdots$. 类似于例 1 中的讨论，

立即得到

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n = [0, 1]$$

集列$\{A_n\}$ 的上限集与下限集都可以用集列$\{A_n\}$的"和"、"通"运算表示出来，它们的表达式是:

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \tag{1.4}$$

现在证明第一式: 记 $P=\limsup_n A_n$，$Q=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. 对于$P$中的任何元素$x$，由上限集的定义，$x$ 属于$\{A_n\}$中无限个集，不妨设x同时属于集 $A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots, A_{n_k}, \cdots (n_k<n_{k+1}, k=1,2,\cdots)$. 因此，对任何自然数 n，当 $n_k>n$ 时，$x\in A_{n_k}\subset\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$，所以 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$，我们得到 $P\subset Q$. 反过来，在Q中任意取一个元素 y，今证明在$\{A_n\}$中必有无限个集同时含有y. 事实上，取 $n=1$，因为$y\in\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$，所以必存在自然数 n_1 使得 $y\in A_{n_1}$; 其次，又因为 $y\in\bigcup_{m=n_1+1}^{\infty} A_m$，所以必存在自然数 $n_2>n_1$，使得 $y\in A_{n_2}$; 这样的手续一直进行下去，得到一列自然数$\{n_k\}$，$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，而集 A_{n_1}，A_{n_2}，$\cdots$，A_{n_k}，$\cdots$等都含有元素 y，因此，$y\in P$. 于是又有 $Q\subset P$. 总起来得到 $P=Q$.

读者可以完全类似地证明第二式. 证毕.

如果从有关集本身所具有的含义去理解，等式(1.4)的成立是

很明显的. 事实上, 集 $B_n=\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$ 正是使命题"集列 $\{A_m\}$ 中从第 n 号以后必有集包含它"成立的元素全体, 而 $\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$ 是使命题"一切 $B_n(n=1,2,\cdots)$ 都包含它"成立的元素全体. 因此, 集 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$ 就是使命题"对任何 n, 集列 $\{A_m\}$ 中必存在第 n 号以后的集包含它"成立的元素全体. 显然, 命题"对任何 n, 集列 $\{A_m\}$ 中必存在第 n 号以后的集包含它"和命题"集列 $\{A_m\}$ 中有无限个集包含它"等价, 所以 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m=\overline{\lim_{m\to\infty}}A_m$, 用同样方式可以考察 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m=\underline{\lim_{m\to\infty}}A_m$.

由和通关系容易得到:

14° 设 $\{A_n\}$ 是任意一列集, S 是任意一个集, 那末

$$S-\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}(S-A_n) \tag{1.5}$$

$$S-\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}(S-A_n) \tag{1.6}$$

如果集列 $\{A_n\}$ 的上限集和下限集相等:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$$

那末就说集列 $\{A_n\}$ **收敛**. 这时, 称 $A=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$ 是集列 $\{A_n\}$ 的**极限(或极限集)**, 记为 $A=\lim_{n\to\infty}A_n$.

如例 2 中的集列 $\left[0,1+\frac{1}{n}\right]$, $n=1,2,\cdots$ 就是收敛的, 它的极限是 $[0,1]$.

单调集列 如果集列 $\{A_n\}$ 满足

$$A_n \subset A_{n+1} (A_n \supset A_{n+1}),\quad n=1,2,\cdots$$

那末称$\{A_n\}$是单调增加(减少)集列. 单调增加与单调减少的集列统称为**单调集列**. 容易证明: 单调集列是收敛的.

如果$\{A_n\}$是单调增加的, 那末

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

事实上, 对任何$x\in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 必有某个$n_0$, 使得$x\in A_{n_0}$. 但是$A_n \subset A_{n+1}(n=1,2,\cdots)$, 所以$x\in A_n(n\geq n_0)$, 从而$x\in \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$, 即$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$. 再根据(1.3), 立即得到$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

类似地, 如果$\{A_n\}$是单调减少的, 可以证明

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

4. 函数与集 设X是一个不空的集, 如果f把X中的每个元素x都对应于一个实数(或复数)$f(x)$, 我们便称f是定义在X上的**实(或复)函数**, 有时也记为$f(\cdot)$. 和数学分析中完全类似, 我们可以定义一般集上的两个函数f、g的和$f+g$、差$f-g$、积$f\cdot g$, 以及绝对值函数$|f|$等, 同样还可以定义函数列$\{f_n(x)\}$的收敛等等. 与过去唯一不同的只是现在的自变量x是在一般的集合X上变化, 而不一定是在实数集或复数集中变化.

在实函数论中, 利用集来分析函数性质时, 常要用到下面类型的集. 当集E上的一个实函数f给定以后, 对于任意给定的实数c, 按第一段中所说的记号, 我们记

$$E(f\geq c) = \{x \mid x\in E, f(x)\geq c\}$$

$$E(f>c) = \{x \mid x\in E, f(x)>c\}$$

等等，它们都是由 f 决定的，而且是与 f 有密切联系的集. 为了后面第三章的需要，我们现在先让读者对这些集的性质、运算作一些了解和准备. 例如它们有如下一些关系式:

1° $E(f\geqslant c)\cup E(f<c)=E$, $E(f\geqslant c)\cap E(f<c)=\varnothing$

2° $E(f>c)\cap E(f\leqslant d)=E(c<f\leqslant d)$

3° $E(f^2>c)=E(f>\sqrt{c})\cup E(f<-\sqrt{c})$ （这里 $c\geqslant 0$）

这些性质，读者无须记住它，重要的是要逐步熟悉这种处理方法.

4° $$E(f>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\geqslant c+\frac{1}{n}\right) \tag{1.7}$$

证 我们证明等式(1.7). 当 $x\in E(f>c)$时，$f(x)>c$，所以必有自然数 n，使得$f(x)\geqslant c+\frac{1}{n}$，因此 $x\in E\left(f\geqslant c+\frac{1}{n}\right)$，即等式(1.7)的左边的集包含在右边集中。

另一方面，如果 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\geqslant c+\frac{1}{n}\right)$，必然存在某个 n，使 $x\in E\left(f\geqslant c+\frac{1}{n}\right)$，这时自然有 $f(x)>c$，所以 $x\in E(f>c)$. 也就是说(1.7)右边的集也包含在左边集中. 所以(1.7)成立. 证毕.

5° 设实函数列$\{f_n\}$有极限函数 f，那末

$$E(f\leqslant c)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n\to\infty}E\left(f_n\leqslant c+\frac{1}{k}\right) \tag{1.8}$$

证 如果 $x\in E(f\leqslant c)$，那末对任何自然数 k，$f(x)<c+\frac{1}{k}$. 因为 $f(x)$ 是 $f_n(x)$ 的极限，所以必有自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，$f_n(x)<c+\frac{1}{k}$. 这就是说，当 $n\geqslant N$ 时，$x\in E\left(f_n\leqslant c+\frac{1}{k}\right)$.

即

$$x\in\varliminf_{n\to\infty}E\left(f_n\leqslant c+\frac{1}{k}\right)$$

因此(1.8)式左边的集包含在右边的集中.

反过来，如果 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n\to\infty}E\left(f_n\leqslant c+\frac{1}{k}\right)$，那末对一切 k，

$x\in\varliminf_{n\to\infty}E\left(f_n\leqslant c+\frac{1}{k}\right)$，这时必有自然数 N_k，使得当 $n\geqslant N_k$ 时，

$x\in E\left(f_n\leqslant c+\frac{1}{k}\right)$，即 $f_n(x)\leqslant c+\frac{1}{k}$. 令 $n\to\infty$，因而对一切自然

数 k，$f(x)\leqslant c+\frac{1}{k}$. 令 $k\to\infty$，就得到$f(x)\leqslant c$. 这就是 $x\in E(f\leqslant c)$.

因此(1.8)的右边含在左边集中. 所以(1.8)成立. 证毕.

注意 (1.8) 式右边的每个集改为 $E\left(f<c+\frac{1}{k}\right)$ 也是成立的. 而左边的集却不能改为 $E(f<c)$.

象这样由函数所产生的集的关系式可以举出很多，读者自己也可以列举并加以证明. 用点集分析的方法来研究函数时，离不开这些重要的集以及它们的关系式. 反过来，有时也常会遇到要用函数来研究集的性质. 下面的特征函数便是这方面的一个重要例子.

5. 集的特征函数 设 X 是一个固定的非空集，又设 A 是 X 的一个子集. 作 X 上的函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in A\\ 0, & \text{当 } x\overline{\in}A\end{cases}$$

称 $\chi_A(x)$ 为集 A 的**特征函数**. 显然子集 A 和它的特征函数之间的对应是一对一的.

特征函数与集之间有下面一些常见的重要等价关系:

1° $A=X$ 等价于 $\chi_A(x)\equiv 1$; $A=\varnothing$ 等价于 $\chi_A(x)\equiv 0$.

2° $A\subset B$ 等价于 $\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$;

$A=B$ 等价于 $\chi_A(x)=\chi_B(x)$.

3° $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$, $\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$.

4° 设$\{A_n\}$是一列集, 那末①

$$\chi_{\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n}(x)=\varlimsup_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x) \tag{1.9}$$

$$\chi_{\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n}(x)=\varliminf_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x) \tag{1.10}$$

证 性质1°、2°、3°的证明留给读者完成. 我们只证明4°的第一式(1.9)((1.10)可类似地证明).

如果$\chi_{\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n}(x)=1$, 那末$x\in\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n$. 这就是说序列$\{A_n\}$中必有无限个集包含$x$, 从而数列$\{\chi_{A_n}(x)\}$中必有无限个是1. 因此, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)=1$. 把上述推导的顺序反过来也就证明了: 如果$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)=1$, 那末$\chi_{\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n}(x)=1$. 所以使函数$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$取值为1的元素与使$\chi_{\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n}(x)$取值为1的元素一致. 但函数$\chi_{\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n}(x)$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$的值不取1便取0, 因此$X$中使这两个函数分别取值为0的元素也一致. 所以这两个函数完全相等. 证毕.

由4°立即得到

5° 设$\{A_n\}$是一列集, 那末极限$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$存在的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$存在, 而且当极限存在时

$$\chi_{\lim\limits_{n\to\infty}A_n}(x)=\lim_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$$

习　题

1. 证明: (i) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(ii) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

① 数列$\{a_n\}$的上限($\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n$)和下限($\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n$)可参见本章§5.

2. 证明：(i) $A-B=A-A\cap B=(A\cup B)-B$

(ii) $A\cap(B-C)=A\cap B-A\cap C$

(iii) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

(iv) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$

(v) $(A-B)\cap(C-D)=A\cap C-(B\cup D)$

(vi) $(A-B)\cup(C-D)\supset(A\cup C)-(B\cup D)$

(vii) $(A-B)\cup(C-D)\subset(A\cup C)-(B\cap D)$

(举例说明(vi),(vii)的包含号$\supset$与$\subset$不能换为等号)

(viii) $A-(A-B)=A\cap B$

3. (i)等式$(A-B)\cup C=A-(B-C)$成立的充要条件是什么？

(ii) 证明：$(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

4. 证明：(i) $\left(\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha\right)-B=\bigcup\limits_{\alpha\in N}(A_\alpha-B)$

(ii) $\left(\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_\alpha\right)-B=\bigcap\limits_{\alpha\in N}(A_\alpha-B)$

5. 设$\{A_n\}$是一列集，

(i) 作$B_1=A_1$, $B_n=A_n-\left(\bigcup\limits_{\nu=1}^{n-1}A_\nu\right)$, $(n>1)$. 证明$\{B_n\}$是一列互不相交的集，而且

$$\bigcup_{\nu=1}^{n}A_\nu=\bigcup_{\nu=1}^{n}B_\nu,\ n=1,2,\cdots$$

(ii) 如果$\{A_n\}$是单调减少的集列，那末

$$A_1=(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots\cup(A_n-A_{n+1})\cup\cdots\cup\left(\bigcap_{\nu=1}^{\infty}A_\nu\right)$$

并且其中各项互不相交.

6. 设$A_{2n-1}=\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$, $A_{2n}=(0,n)$, $n=1,2,\cdots$, 求出集列$\{A_n\}$的上限集和下限集.

7. 设$\{f_n(x)\}$是区间$E=[a,b]$上的实函数列

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$$

又设 $f_n(x)$ 具有极限函数 $f(x)$. 证明对任何实数 c,

$$E(f(x)>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n(x)>c)$$

8. 证明: (i) $A\triangle B=(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$

(ii) $A\cup B=(A\triangle B)\cup(A\cap B)$

(iii) $\chi_{A\triangle B}(x)=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|$

(iv) $A\triangle B=\{x|\chi_A(x)\neq\chi_B(x)\}$

9. 设 $f(x)$ 是 E 上的一个函数, c 是任何实数, 证明

(i) $E(f>c)\cup E(f\leqslant c)=E$, $E(f\geqslant c)=E(f>c)\cup E(f=c)$

(ii) $E(f>c)\cap E(f=c)=\varnothing$

(iii) 当 $c<d$ 时, $E(f>c)\cap E(f\leqslant d)=E(c<f\leqslant d)$

(iv) 当 $c\geqslant 0$ 时, $E(f^2>c)=E(f>\sqrt{c})\cup E(f<-\sqrt{c})$

(v) 当 $f\geqslant g$ 时, $E(f>c)\supset E(g>c)$

10. 设集 E 上的实函数列 $\{f_n\}$ 具有性质 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. 证明

$$E(f\leqslant c)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant c)=\lim_{n\to\infty}E(f_n\leqslant c)$$

11. 设 f 是定义在集 E 上的实函数, c 是任何实数, 证明:

(i) $E(c\leqslant f(x))=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(c\leqslant f(x)<c+n)$

(ii) $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(-n\leqslant f(x))=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f(x)<n)$

(iii) $E(f<c)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E\left(f\leqslant c-\dfrac{1}{n}\right)$

12. 设 X 是固定的集, $A\subset X$, $\chi_A(x)$ 是集 A 的特征函数, 证明:

(i) $A=X$ 等价于 $\chi_A(x)\equiv 1$, $A=\varnothing$ 等价于 $\chi_A(x)\equiv 0$;

(ii) $A\subset B$, 等价于 $\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$;

$A=B$ 等价于 $\chi_A(x)=\chi_B(x)$;

(iii) $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$;

$$\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in N} A_\alpha}(x)=\min_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x);$$

(iv) 设$\{A_n\}$是一列集,那末极限 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$存在,而且当极限存在时,有

$$\chi_{\lim\limits_{n\to\infty}A_n}(x)=\lim_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$$

13. 证明"和通关系式"

$$S-\bigcap_{\alpha\in N}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in N}(S-A_\alpha)$$

14. 设F, E_1及E_2是X的任意三个子集,记$F_1=F\cap(E_1\cap E_2^c)^c$,证明:

(i) $F_1\cap E_1\cap E_2=F\cap E_1\cap E_2$

(ii) $F_1\cap E_1\cap E_2^c=\varnothing$

(iii) $F_1\cap E_1^c\cap E_2=F\cap E_1^c\cap E_2$

(iv) $F_1\cap E_1^c\cap E_2^c=F\cap E_1^c\cap E_2^c$

§2 映照与势

正如§1所说,作为数学分支的集论本身,它的内容还是相当丰富的,介绍集论的基本内容不是本书的任务. 但为了本书后面的需要,我们将在本节中对集论中常常被用到的最初步的势的知识作一介绍.

1. 映照 前面我们已叙述过一般集上的函数概念. 我们现在介绍比函数概念更一般的集之间的另一种关系——对应关系,它是函数关系的推广.

定义 设A, B是两个非空集. 如果存在一个规则φ,使得对于A中任何一个元素x,按照规则φ,在B中有一个确定的元素y与x对应①,记为

$$\varphi: x\longmapsto y$$

① 本书中一般不讨论"多值"映照.

那末称这个规则φ是从A到B(中)的**映照**(**也称为映射**)，元素y称做元素x(在映照φ下)的**象**，记做$y=\varphi(x)$，或$y=\varphi x$. 对于任一个固定的y，称适合关系$y=\varphi(x)$的x全体为y(在映照φ之下)的**原象**，记为$\varphi^{-1}(y)$. 集A称做为映照φ的**定义域**，记为$\mathscr{D}(\varphi)$或$\mathscr{D}_\varphi$. 设C是A的子集，C中所有元素x的象y的全体记为φC或$\varphi(C)$，称它为集C的象，称$\varphi(A)$为映照φ的**值域**，常记为$\mathscr{R}(\varphi)$. 有时也常把从$\mathscr{D}(\varphi)=A$到$\mathscr{R}(\varphi)\subset B$的映照$\varphi$写成

$$\varphi: A\longrightarrow B$$

如果$\varphi: A\longrightarrow B$, $D\subset B$, 那末称集$\{x|\varphi(x)\in D, x\in\mathscr{D}(\varphi)\}$为$D$(在映照$\varphi$之下)的原象，记为$\varphi^{-1}(D)$.

如果$\varphi(A)=B$, 就称φ是A到B**上**的映照，又称为A到B的**满射**. 显然，如果φ是A到B上的映照，那末φ是A到B中的映照，但其逆一般不真.

特别地，如果值域B是一数集(实数或复数集)，这时映照φ就是前面说的定义在集A上的函数. 如果A, B都是数集，它们之间的映照就是数学分析中所研究的函数了. 由此可见，映照概念实在就是函数概念的推广.

映照是一个相当普遍的概念，除了普通的函数是一种映照而外，其它的，如定积分可以看作可积函数集到数集中的映照，求导函数的运算(微分)可看作可微分函数集到函数集中的映照，而线性变换就是n维向量空间到n维向量空间的映照；又如代数学中的同态映照、同构映照等. 从更广泛的意义上说，任何一种运算也可以看作是映照. 事实上，如实数的加法运算"+"，就可视为平面点集到直线点集上的一个映照$\varphi:(a,b)\longmapsto a+b$. 再看几个映照的具体例子.

例1　设$A=(-\infty,\infty)$, $B=(-\infty,\infty)$, 符号函数

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

是 A 到 B 中的映照.

例 2 设 A 是平面上所有圆组成的集合, B 是平面上所有点的全体, 令 φ 表示圆与其圆心之间的对应, φ 就是 A 到 B 上的映照.

例 3 设 D^2 是直线上的二次可微函数全体, B 是直线上的函数全体, a, b, c 是常数, 定义 D^2 到 B 中的一个映照 φ 如下:

$$\varphi: f(x)\longmapsto a\frac{d^2}{dx^2}f(x)+b\frac{d}{dx}f(x)+cf(x),\ f\in D^2$$

当 $a\neq 0$ 时称 φ 为二阶微分算子, 简记为 $\varphi=a\frac{d^2}{dx^2}+b\frac{d}{dx}+c$.

例 4 设 E^n 是 n 维欧几里得空间, (k_{ij}) 是给定的 n 阶方阵, 作 E^n 到 E^n 中的映照 φ 如下:

$$\varphi: x\longmapsto Kx,\ x\in E^n$$

其中 $x=(x_1, \cdots, x_n)'$, 又

$$y=\varphi(x)=Kx=\left(\sum_{j=1}^{n}k_{1j}x_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n}k_{nj}x_j\right)'$$

例 5 设 $C[0,1]$ 是区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上所有连续函数全体, E^1 是直线 $-\infty<x<\infty$, x_0 是 $[0,1]$ 中的一个定点, 作映照

$$\varphi: f\longmapsto f(x_0),\qquad f\in C[0,1]$$

则 φ 就是 $C[0,1]$ 到 E^1 上的映照.

2. 映照的延拓 映照和它的定义域有关. 在小范围有意义的映照, 在较大的范围内未必有意义.

定义 设 φ, ψ 分别是定义域 $\mathscr{D}_\varphi$, $\mathscr{D}_\psi$ 到 B 中的映照, 如果 $\mathscr{D}_\varphi\subset\mathscr{D}_\psi$, 而且对于 $\mathscr{D}_\varphi$ 中的每个元素 x 成立着

$$\psi(x)=\varphi(x)$$

即 ψ 与 φ 在 $\mathscr{D}_\varphi$ 上一致，就称映照 ψ 是映照 φ 在 $\mathscr{D}_\psi$ 上的**延拓**，记成 $\varphi\subset\psi$，这时称 φ 是 ψ 在 $\mathscr{D}_\varphi$ 上的**部分**或**限制**，记为 $\varphi=\psi|_{\mathscr{D}_\varphi}$。

例 6　设 $f(x)=\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi$；又设 $g(x)=|\sin x|, -\infty<x<\infty$，那末 $g(x)$ 就是 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的延拓，即 $f=g|_{[0,\pi]}$。

例 7　设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n, |z|<1, g(z)=\dfrac{1}{1-z}, z\neq1$。解析函数 $g(z)$ 就是 $f(z)$ 的延拓。

完全类似地可将复合函数的概念拓广，定义 φ_1,φ_2 的复合映照概念如下：

定义　设 $\varphi_1:A\longrightarrow B, \varphi_2:B\longrightarrow C$，作 A 到 C 的映照 φ 如下，对任何 $x\in A, \varphi(x)=\varphi_2(\varphi_1(x))$，称 φ 是 φ_1,φ_2 的**复合映照**，记 φ 为 $\varphi_2\circ\varphi_1$。

3. 一一对应　在各种映照之中，我们要着重讨论一下一对一的映照。

可逆映照　设 φ 是 A 到 B 中的映照，若对每一个 $y\in\mathscr{R}(\varphi)$，A 中只有一个元素 x 适合 $\varphi(x)=y$，就说 φ 是**可逆映照**或**一对一的映照**（又称为**单射**）。换言之，对 A 中任意两个元素 x_1,x_2，当 $x_1\neq x_2$ 时，必有 $\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$，那末 φ 就是可逆映照。

例如 $(-\infty,\infty)$ 上的函数 $\varphi(x)=\sin x$，$\psi(x)=x^2$ 都不是 $(-\infty,\infty)$ 到 $(-\infty,\infty)$ 中的可逆映照。显然，任何一个严格单调函数都可以看成它的定义域到值域中的可逆映照。又如 $(0,1]$ 上的函数（图 1.3）

$$g(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$$

是 $(0,1]$ 到 $[0,1)$ 中的可逆映照。

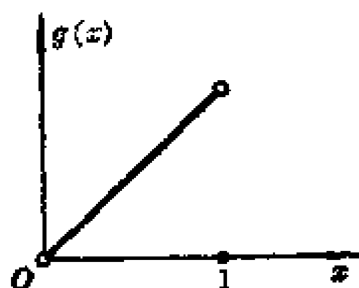


图　1.3

定义 设φ是集A到集B上的可逆映照，则称φ为A到B的**一一对应**(或**双射**).

换句话说，φ是A到B的一一对应意味着对于A中任何一个元素a，有唯一的$b=\varphi(a)\in B$，而且对B中每个元素b，必在A中有唯一的元素a，适合$\varphi(a)=b$.

例如上面的函数$g(x)$就只是$(0,1]$到$[0,1]$中的可逆映照，而不是$(0,1]$到$[0,1]$的一一对应. 这是因为$[0,1]$上的点1找不到原象. 但$g(x)$却是$(0,1]$到$[0,1)$的一一对应. 其实，任何可逆映照φ一定是$\mathscr{D}(\varphi)$到$\mathscr{R}(\varphi)$的一一对应.

逆映照 设φ为A到B的可逆映照:

$$\varphi: A=\mathscr{D}(\varphi)\longrightarrow\mathscr{R}(\varphi)\subset B$$

我们作$\mathscr{R}(\varphi)$到$\mathscr{D}(\varphi)$的映照ψ如下: 如果

$$\varphi: x\longmapsto y,\quad x\in\mathscr{D}(\varphi),\ y\in\mathscr{R}(\varphi)$$

我们便令

$$\psi: y\longmapsto x$$

由于φ是可逆的，根据可逆映照的定义，对于每一个y，与它相应的x是唯一的，因此ψ实现了从$\mathscr{R}(\varphi)$到$\mathscr{D}(\varphi)$上的映照，我们称ψ为φ的**逆映照**，记ψ为φ^{-1}:

$$\varphi^{-1}:\ \mathscr{R}(\varphi)\longrightarrow\mathscr{D}(\varphi)$$

显然，$\mathscr{D}(\varphi^{-1})=\mathscr{R}(\varphi)$, $\mathscr{R}(\varphi^{-1})=\mathscr{D}(\varphi)$.

因此可逆映照必有逆映照. 逆映照是反函数概念的拓广.

φ的逆映照用记号φ^{-1}，在集D的原象$\varphi^{-1}(D)$中也出现记号φ^{-1}，在今后发生混淆的地方，我们将在行文中交待φ^{-1}记号的具体含义.

例如，任何一个严格单调函数$f(x)$的反函数$f^{-1}(x)$可以看成映照$f(x)$的逆映照. 又如A是$[0,1]$上具有连续导函数而且在0点其函数值为0的函数全体，φ是求导函数这个映照，即

$$\varphi: f(x) \longmapsto \frac{d}{dx}f(x),\ f(x) \in A$$

显然 φ 是 A 到 $C[0,1]$(见例 5)的一一对应，而其逆映照就是求不定积分

$$\varphi^{-1}: g(x) \longmapsto \int_0^x g(t)dt$$

设 X 是一固定集，$\mathscr{M}$ 是 X 的子集的全体，$\mathscr{N}$ 是定义在 X 上的特征函数的全体，作映照

$$\varphi: A \longmapsto \chi_A,\ \ A \subset X$$

它就是 $\mathscr{M}$ 到 $\mathscr{N}$ 之间的一一对应.

恒等映照 设 A 是一个集，称集 A 到 A 上的映照

$$\varphi: x \longmapsto x$$

是 A 上的**恒等映照**.

显然，恒等映照是 A 到 A 的一一对应.

4. 对等 现在用一一对应来建立两个集的对等概念. 对等概念是建立势的理论的基础.

定义 设 A, B 是两个集，如果存在一个 A 到 B 的一一对应 φ，那末称集 A 与集 B **对等**(或**相似**)，记为 $A \overset{\varphi}{\sim} B$，或简记为 $A \sim B$. 规定空集 $\varnothing$ 和自身对等.

例如，奇数集 $O = \{1, 3, 5, \cdots, 2n-1, \cdots\}$，偶数集 $E = \{2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$，自然数集 $N = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$. 显然 $\varphi_1: n \longmapsto 2n$ $(n=1, 2, \cdots)$，$\varphi_2: 2n \to 2n-1$ $(n=1, 2, \cdots)$，$\varphi_2 \circ \varphi_1$ 分别是 N 到 E，E 到 O，N 到 O 的一一对应，因此它们彼此对等.

显然，对等关系"$\sim$"具有下面三个基本性质：

1° $A \sim A$(自反性)；

2° 若 $A \sim B$，则 $B \sim A$(对称性)；

3° 若 $A \sim B$, $B \sim C$，则 $A \sim C$(传递性).

由此可知，对等是一种等价关系(等价关系可参见§3)．

此外，对等还有下面的一个性质，虽非基本，但很重要．

4° 设$\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$，$\{B_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$为两族集，$\Lambda$是指标集．又设对每一个$\lambda\in\Lambda$，$A_\lambda\sim B_\lambda$，而且集族$\{A_\lambda\}$中任何两个集不相交，即$A_\lambda\cap A_\mu=\varnothing(\lambda\neq\mu,\lambda,\mu\in\Lambda)$，$\{B_\lambda\}$中任何两个集也不相交，那末

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\sim\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$$

此性质读者不难自行证明．

前面已经说过，若φ是A到B中的可逆映照，φ未必是A到B的一一对应，但φ实现A到$\mathscr{R}(\varphi)$的一一对应．因此A与B的子集$\mathscr{R}(\varphi)$对等．

欲判断两集对等，常用下面的定理．

贝恩斯坦(F. Bernstein, 1898)**定理** 设A, B是两个集，如果A对等于B的一个子集，B又对等于A的一个子集，那末A与B对等．

证 由假设，存在A到B的某子集B_1上的一一对应φ_1，又存在B到A的子集A_1上的一一对应φ_2，因为$B_1\subset B$，记$A_2=\varphi_2(B_1)$．显然φ_2是B_1到A_2上的一一对应，即

$$A\overset{\varphi_1}{\sim}B_1\overset{\varphi_2}{\sim}A_2\quad(A_2\subset A_1)$$

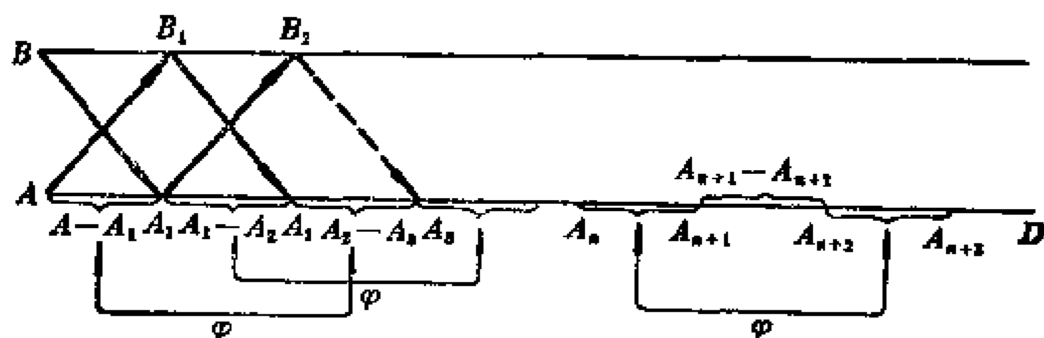


图1.4—Bernstein定理证明示意图

显然φ_1和φ_2的复合映照$\varphi=\varphi_2\circ\varphi_1$实现了$A$到$A_2$上的一一对应．因为$A_1$是$A$的子集，$A_3=\varphi(A_1)$是$A_2$的子集；

$$A_1 \overset{\varphi}{\sim} A_3,\ (A_3 \subset A_2)$$

照这样逐步进行下去，我们得到一列的子集：

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

而在同一个映照 φ 之下，有

$$A \sim A_2 \sim A_4 \sim \cdots$$

$$A_1 \sim A_3 \sim A_5 \sim \cdots$$

这样我们可以将 A 分解为一系列互不相交的子集之和：

$$A = (A - A_1) \cup A_1 = (A - A_1) \cup (A_1 - A_2) \cup A_2$$

$$= (A - A_1) \cup (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \cup D$$

此处 $D = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$；同样地有

$$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup (A_3 - A_4) \cup \cdots \cup D$$

由于映照 φ 是一对一的，容易看出

$$A - A_1 \overset{\varphi}{\sim} A_2 - A_3$$

$$A_1 - A_2 \overset{\varphi}{\sim} A_3 - A_4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n - A_{n+1} \overset{\varphi}{\sim} A_{n+2} - A_{n+3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

显然，我们可以将 A, A_1 的上述分解写成

$$A = D \cup (A - A_1) \cup (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup (A_3 - A_4) \cup \cdots$$

$$\varphi \int \qquad\qquad\qquad \varphi \int$$

$$A_1 = D \cup (A_2 - A_3) \cup (A_1 - A_2) \cup (A_4 - A_5) \cup (A_3 - A_4) \cup \cdots$$

由于 $A_{2n} - A_{2n+1} \overset{\varphi}{\sim} A_{2n+2} - A_{2n+3}$ ($n = 0, 1, 2, \cdots, A_0 = A$)，又因为集列 $D, A_1 - A_2, \cdots, A_{2n+1} - A_{2n+2}, \cdots$，中每个集都分别与自身对等．根据性质 4° 就得到 $A \sim A_1$．又因为 $A_1 \sim B$，所以 $A \sim B$．证毕．

5. 势 在集论中所讨论的集都是一般的，并不考察集的进一步结构，例如集中元素之间没有大、小，没有距离、没有运算等可言，最多可以讲两个元素间或是 $x=y$，或是 $x\neq y$ 而已．如果赋予集的元素之间以具体的结构，那末所讨论的集与结构有关的性质已不再属于集论所讨论的对象了．所以集论中最初的一个基本课题就是研究集的元素个数有多少的问题，即势的理论．

关于事物的多或少是很普通的概念，例如，假如有人问：某班级的学生人数和某教室的凳子数是哪个多？这个问题很简单，只要规定每个人可坐一只凳，但最多只能坐一只凳子．最后，如果有学生坐不到凳子，那末便是学生的人数多于凳子数；如果凳子有空，那末便是凳子数多于学生人数；如果既没有学生坐不到凳子，又没有凳子空下，那末便是两者个数一样多．这里之所以必能得出上面结论之一，并且不管任何人来回答都必是相同的结论，这是因为以经过每个学生坐一只凳子的过程所得的结果为依据的．

更一般地，我们就引入下面定义．

定义 设 A、B 是两个集．

(i) 如果 A 和 B 对等，那末称 A 和 B 具有相同的势(或基数)．记集 A 的势为 $\overline{\overline{A}}$，A 和 B 具有相同势时，记为 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$；

(ii) 如果 A 对等于 B 的某个子集 B_1，那末称 A 的势小于或等于 B 的势，或称 B 的势大于或等于 A 的势．记为 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，或 $\overline{\overline{B}}\geqslant\overline{\overline{A}}$；如果 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，并且 $\overline{\overline{A}}\neq\overline{\overline{B}}$，那末称 A 的势小于 B 的势，或 B 的势大于 A 的势．记为 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$，或 $\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$．

势这个概念的直观背景就是元素的个数．两个集 A 和 B，如果有相同的势(也简说成等势)就意味着集 A 和 B 的元素的个数是“一样多”，势的大、小就意味着元素个数的“多、少”．然而，如果 $A\supset B$，并且 $B\neq A$，但这并不必然意味着 $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$．例如偶数集 E 虽然是自然数集 N 的真子集，然而因为 E 却能和 N 对等，所以 $\overline{\overline{E}}=$

$\overline{\overline{N}}$.

如果从势的观念来看贝恩斯坦定理，那末它可改述如下：

贝恩斯坦定理(F. Bernstein) 如果 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$，那末 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

证 因为$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，所以$A$与$B$的某个子集$B_1$对等. 又因为$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$，所以$B$也与$A$的某个子集$A_1$对等. 根据前面的贝恩斯坦定理，必然$A$对等于$B$，即$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$. 证毕.

贝恩斯坦定理在势的比较大、小问题中的地位，相当于实数比较大、小中由$a\leqslant b$和$b\leqslant a$同时成立必有$a=b$这个事实. 任何两个实数是可以比较它们的大、小的(即实数有全序性，关于“序”可参见本章§3). 很自然地会问：任何两个集是否必定可以比较它们的势的大、小. 对任何两个集A、B，从逻辑上讲，必然发生下面四种情况之一：

(i) A可以对等于B的某个子集B_1，而B永远不对等于A的任何一个子集；

(ii) B可以对等于A的某个子集A_1，而A永远不对等于B的任何一个子集；

(iii) B可以对等于A的某个子集A_1，而A也可以对等于B的某个子集B_1；

(iv) A永远不对等于B的任何一个子集，B也永远不对等于A的任何一个子集.

情况(i)就是$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$，(ii)就是$\overline{\overline{B}}<\overline{\overline{A}}$. 根据贝恩斯坦定理知道，情况(iii)就是$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$. 因而如果有办法能证明情况(iv)决不出现，那末任何两个集就可比较它们的势的大、小. 否则就有些集，它们的势是不能比较大、小的. 至今还是无法证明(iv)一定不出现或者举出例子说明(iv)是会出现的. 策墨罗(zermelo 1908)提出一条公理——选取公理(可参见§3)，依据这条公理就可以证明(iv)不会出现，从而任何两个集的势都是可以比较大、小的了.

下面简单地介绍一些常见的集的势及其性质.

6. 有限集和无限集 有限集的元素的多少是清楚的，主要要讨论的是无限集的势. 但什么是有限集呢? 还是有必要给有限集这个概念以严格的数学定义.

定义 设 n 是自然数，令 $M_n=\{1,2,\cdots,n\}$. 如果集 A 能与某个 M_n 对等，那末称 A 是**有限集**. 当 $A\sim M_n$ 时，称 n 为集 A 的**计数**. 规定空集为有限集，并且它的计数规定为零.

下面给出有限集的特征并证明它的计数是唯一的.

引理 1 集 M_n 与其任何真子集不对等.

证 利用数学归纳法来证明这个引理.

当 $n=1$ 时，显然 M_1 的真子集只能是空集，故 M_1 不与其真子集对等.

设 k 为一自然数，而且 M_k 不与其真子集对等. 今证 M_{k+1} 也不与其真子集对等就好了. 假若不然，便有 M_{k+1} 到它的真子集 M' 上的一一对应 φ，记 $\varphi(k+1)=l$. 分三种情况来讨论.

(I) 若 $l=k+1$，此时在 M_{k+1} 与 M' 中都删去 $k+1$ 后分别得到集 M_k 与 M''，φ 在 M_k 上的限制成为 M_k 到 M'' 上的一一对应，但 $M''\subset M_k$，而且 $M_k\neq M''$，这与归纳法假设冲突.

(II) 虽然 $l\neq k+1$，但 $k+1\in M'$. 此时设 $k+1=\varphi(m)$，在 M_{k+1} 上作映照 ψ 如下:

$$\psi(\nu)=\begin{cases}\varphi(\nu), & \nu\neq m,k+1\\ l, & \nu=m\\ k+1, & \nu=k+1\end{cases}$$

易知 φ 与 ψ 同为 M_{k+1} 到真子集 M' 上的一一对应. 由于 $\psi(k+1)=k+1$，即 ψ 适合情况(I)，所以(II)也是不可能的.

(III) 若 $l\neq k+1, k+1\overline{\in} M'$. 此时从 M_{k+1} 中删去 $k+1$ 得到 M_k，再从 M' 中删去 l 得到一个集 M''，显然可视 φ 为 M_k 到它的真

子集 M'' 的一一对应，由归纳法假设，这也不可能。

总之，M_{k+1} 不能与其真子集对等. 证毕。

系 有限集决不与其真子集对等.

由此可得

定理 1 有限集具有唯一的计数.

证 对于空集，定理显然成立. 设 A 为一非空有限集. 若 $A\sim M_n$，又 $A\sim M_m$，则 $M_m\sim M_n$. 今证 $m=n$. 用反证法，若 $m\neq n$，m, n 中必然一大一小，不妨设 $m<n$. 这就得到 M_n 与其真子集 M_m 对等，由引理 1 知道这是不可能的. 所以 $m=n$. 即任一非空有限集只可能和一个 M_n 对等.

由此可知，两个有限集相互对等的充要条件是它们的计数相等，因而，计数是所有相互对等的有限集的公共特征.

规定有限集 A 的势为集 A 的计数，即如果 $A\sim M_n$，那末规定 $\overline{\overline{A}}=n$.

我们称不是有限集的集为**无限集**.

无限集是存在的，例如自然数全体 N，由于它能和它的真子集 E（偶数全体）对等，所以不是有限集，即 N 是一无限集. 更一般地，有下列定理.

定理 2 无限集必与它的一个真子集对等.

证 先证明在任一无限集 A 中，一定能取出一列互不相同的元素 $a_1, a_2, \cdots$. 事实上，在 A 中任取一个元素，记为 a_1. 因为 A 是无限集，集 $A-\{a_1\}$ 显然不空，这时再从集 $A-\{a_1\}$ 取一个元素 a_2，同样，$A-\{a_1, a_2\}$ 决不空. 可以继续做下去，将从 A 中取出一列互不相同的元素 a_1, $a_2, \cdots$，记余集为 $\hat{A}=A-\{a_n | n=1, 2, \cdots\}$. 在 A 中取出一个真子集

$$\{a_2, a_3, \cdots\}\cup\hat{A}=\tilde{A}$$

今作 A 与 $\tilde{A}$ 之间的映照 φ：

$$\varphi(a_i)=a_{i+1},\ i=1,2,\cdots$$

$$\varphi(x)=x,\ x\in\hat{A}$$

显然，φ 是 A 到 $\tilde{A}$ 上的一一对应，证毕.

改变一下定理 2 的叙述方式，即得到

系 1 凡不能与自己的任一真子集对等的集必是有限集.

还可得到下面重要的推论.

系 2 集 A 是有限的充要条件是它不能和真子集对等；集 A 是无限的充要条件是能和真子集对等.

下面要介绍最常见的两种无限集.

7. 可列集及连续点集的势

定义 设 N 为自然数全体所成之集. 凡与集 N 对等的集称为**可列集**，也称为**可数无限集**.

可列集是最“小”的无限集，即任何无限集必含有一可列子集（从定理 2 的证明中可以看出这一点）. 如果 A 是可列集，φ 是 N 到 A 上的一一对应，记

$$a_n=\varphi(n)$$

那末 A 中每一个元素就有了确定的编号，因而成为序列：

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

通常记可列集的势为 $\aleph_0$（读作“阿列夫零”）.

例 8 三角函数系：$\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$ 是可列集.

定理 3 可列集的任何子集，若不是有限集必是可列集.

证 设 A 为可列集，它的元素编号如下：

$$a_1,a_2,\cdots a_n,\cdots$$

B 是 A 的非空子集. B 中元素显然是上述叙列中的一个子叙列

$$a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots$$

指标 $n_1,n_2,\cdots,n_k,\cdots$ 之中，如果有最大数，那末 B 为一有限集，否

则B为一无限集，当B是无限集时，把a_{n_k}与自然数k对应就知道B是一可列集.

定理 4 有限个或可列个有限集或可列集的和集是有限集或可列集.

证 不失一般性，设有一列集$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，而其中每一个都是可列集：

$$
\begin{array}{l}
A_1=\{a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14},\ \cdots\}\\
A_2=\{a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \cdots,\ \cdots\}\\
A_3=\{a_{31},\ a_{32},\ \cdots,\ \cdots,\ \cdots\}\\
A_4=\{a_{41},\ \cdots,\ \cdots,\ \cdots,\ \cdots\}\\
\cdots,\ \cdots,\ \cdots,\ \cdots,\ \cdots,\ \cdots
\end{array}
$$

称$p+q=h$为元素$a_{pq}(p, q=1, 2, \cdots)$的高度，按高度大小编号，在同一高度中按$q$的值由小到大编号，这样就可以把和集$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$中所有的元素编成一列(即上图箭头所指顺序)：

$$a_{11};\ a_{21},\ a_{12};\ a_{31},\ a_{22},\ a_{13};\ \cdots;\ a_{n1},\ a_{n-1,2},\ a_{n-2,3},\ \cdots,\ a_{1n};\ \cdots$$

因为A_i, A_j可能有公共元素，这些公共元素在和集中是同一元素，在这一序列中去掉重复的元素后余集仍是可列的. 当$A_1, A_2, \cdots$，中有些是有限集，或仅为有限个集$A_1, \cdots, A_n$的情况，也可以类似地讨论. 证毕.

例 9 平面上在直角坐标系下，两坐标x，y均为整数的点(x, y)(称为格点)全体成一可列集.

事实上，对每个固定的整数n，$A_n=\{(n, m)\mid m\text{ 是整数}\}$，是一可列集. 显然，全平面上的格点全体就是和集$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A_n$，这是可列个可列集之和，因而是可列集.

例 10 有理数全体成一可列集.

事实上,有理数 r 可写成既约分数 p/q, p, q 均为整数,并规定 $q>0$. 改变一下记号,把既约分数 p/q 与平面上的格点(q, p)对应. 由定理 4 知这种格点(q, p)的全体至多是可列集;又由于有理数全体是无限集,所以有理数全体确是可列集.

设 A, B 是两个非空集,那末任取 $a\in A$, $b\in B$, 作成元素对(a, b),这种元素对的全体所成的集称为 A 与 B 的**乘积**,记为 $A\times B$. 例 9 与例 10 实际上说明: 当 A, B 是可列集时, 乘积 $A\times B$ 是可列集. 同样可以证明下列定理.

定理 5 如果 $A, B, \cdots, C$ 是有限多个有限集或可列集,那末,乘积集

$$A\times B\times\cdots\times C=\{(a, b, \cdots, c)\mid a\in A, b\in B, \cdots, c\in C\}$$

是有限集或可列集.

从这里得到下面一些重要的例.

例 11 整系数多项式全体是可列集.

事实上,对于固定的自然数 n, n 次整系数多项式全体可以与 $n+1$ 个自然数集的乘积对等. 所以它是可列集, 从而各次整系数多项式全体是可列集.

整系数多项式的实数根称为**代数数**. 这就是说,设 x 是实数,如果存在整数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $a_0\neq 0$, 使

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

就称 x 是代数数.

例 12 代数数全体是可列集.

例 13 设 A 是直线上某些长度不为零的而且互不相交的区间所成的集(集 A 中的元素是区间),则 A 是可列集或是有限集.

事实上,作集 A 到有理数集的映照 φ 如下: 当区间 $d\in A$ 时,由于 d 的长度不为零,必有有理数属于 d,任意取定 d 中的有理数作

为 $\varphi(d)$，当 $d_1, d_2 \in A$ 且 $d_1 \neq d_2$ 时，则 d_1 与 d_2 不相交，因此 $\varphi(d_1) \neq \varphi(d_2)$，这就是说，$\varphi$ 是可逆映照，因此 A 与有理数全体的子集对等．然而由例 10，有理数全体是可列集，再从定理 3 知道它的子集是可列集或有限集．因此 A 也是如此．

定理 6 设 A 是有限集或可列集，B 是任一无限集，那末

$$\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{B}}$$

证 我们只须证明 $A \cup B \sim B$ 就可以了．因 B 是无限集，由定理 2，存在一个可列子集 $M \subset B$，再由定理 4 知道，集 $M \cup (A-B)$ 也是可列集，即 $(A-B) \cup M \overset{\varphi}{\sim} M$，又由于 $B-M \overset{I}{\sim} B-M$，$(B-M) \cap (M \cup (A-B)) = \varnothing$，所以

$$\begin{array}{ccc} B = (B-M) & \cup & M \\ {\scriptstyle I}\wr & & {\scriptstyle\varphi}\wr \\ (B-M) & \cup & (M \cup (A-B)) = A \cup B. \end{array}$$

定理证毕．

上述定理表明：加任何一个有限集或可列集到一个无限集中时，此无限集的势不会改变．

定理 7 实数区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 是不可列集．

证 如果 $(0, 1] = \{x \mid 0 < x \leqslant 1\}$ 是不可列的，那末闭区间 $[0, 1] = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 自然是不可列集，所以只要证 $(0, 1]$ 是不可列集．

如果 $(0, 1]$ 是可列集，那末其中所有实数可排成一数列：$t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots$．将 $(0, 1]$ 中实数用十进位无限小数表示，

$$t_1 = 0.\, t_{11} t_{12} t_{13} t_{14} \cdots$$

$$t_2 = 0.\, t_{21} t_{22} t_{23} t_{24} \cdots$$

$$t_3 = 0.\, t_{31} t_{32} t_{33} t_{34} \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中所有的 t_{ij} 都是 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 十个数字中的一个，并且对每个 i，数列 $\{t_{ij} \mid j = 1, 2, \cdots\}$ 中有无限项不为 0．

作十进位小数

$$a=0.a_1a_2a_3\cdots$$

其中 $a_i\neq t_{ii}$, $a_i\neq 0$, $i=1,2,\cdots$, 这是办得到的. 因为对任意的 i, 如 $t_{ii}=1$, 令 $a_i=2$, 如 $t_{ii}\neq 1$, 那末取 $a_i=1$ 就行了. 于是所作成的数 a 应该在区间$(0,1]$中, 但不会在数列 $t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots$中, 因为对于每个 n, $a_n\neq t_{nn}$, 所以 $a\neq t_n$. 这和$\{t_n\}$是区间$(0,1]$中实数全体的假设相矛盾. 因此$(0,1]$是不可列集. 证毕.

定义 称 0 与 1 之间实数全体所成之集的势为**连续点集的势**. 这个势记作 $\aleph$(读作"阿列夫"), 或记作 c.

定理 8 实数全体的势为 $\aleph$.

证 显然, $(0,1)=\{x\mid 0<x<1\}$和$[0,1]$的势相同, 所以只要证明实数全体$(-\infty,\infty)$和$(0,1)$对等好了. 今作$(0,1)$到$(-\infty,\infty)$的映照 φ:

$$\varphi(x)=\operatorname{tg}\frac{2x-1}{2}\pi$$

显然这是$(0,1)$到$(-\infty,\infty)$的一一对应, 所以实数全体的势是 $\aleph$. 证毕.

系 1 无理数全体的势是 $\aleph$.

证 记无理数全体为 B, 有理数全体为 R, 由定理 6 得

$$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{B\cup R}}=\overline{\overline{(-\infty,\infty)}}=\aleph$$

根据这个事实可以粗略地说, 无理数比起有理数来要多得多.

不是代数数的实数称为**超越数**. 类似地得到

系 2 超越数全体的势为 $\aleph$.

这个事实不仅告诉了我们超越数是存在的, 而且远比代数数要多.

在 Cantor 创立集论以前, 曾有好多数学家比较费力地证明超越数的存在(如柳费尔(Liouville)、厄米(Hermite)等最后才证明

e 是超越数)，然而抽象集论的方法不仅肯定了超越数存在，而且断定多得很.可惜的是它不能给我们具体地指出那些数是超越数，但尽管如此，却并不因此而失去它的重要意义.

定理 9　实数列全体 E^∞ 的势是 $\aleph$.

证　记 B 为 E^∞ 中适合 $0<x_n<1$，$(n=1,2,\cdots)$的点$\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$的全体．设 $x\in B$, $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$，其中 x_n 是实数．作映照 φ:

$$\varphi(x)=\left\{\operatorname{tg}\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\pi,\operatorname{tg}\left(x_2-\frac{1}{2}\right)\pi,\cdots,\right.$$
$$\left.\operatorname{tg}\left(x_n-\frac{1}{2}\right)\pi,\cdots\right\}$$

显然，φ 是 B 到 E^∞ 的一一对应．我们只须证明 B 的势为 $\aleph$.

事实上，首先把$(0,1)$中任何 x 与 B 中的点

$$\tilde{x}=\{x,x,x,\cdots\}$$

对应，就知道$(0,1)$对等于 B 的一个子集．即　$\overline{\overline{B}}\geqslant\overline{\overline{(0,1)}}=\aleph$.

反之，对 B 中的任何 $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$，按十进位无限小数表示 x_n 有

$$x_1=0.\,x_{11}x_{12}\cdots x_{1n}\cdots$$
$$x_2=0.\,x_{21}x_{22}\cdots x_{2n}\cdots$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$x_n=0.\,x_{n1}x_{n2}\cdots x_{nn}\cdots$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

由上述一列数 $x=\{x_n\}\in E^\infty$，作一小数 $\psi(x)$:

$$\psi(x)=0.\,x_{11}x_{21}x_{12}\cdots x_{n1}x_{n-1,\,2}\cdots x_{1n}\cdots\cdots$$

显然 $\psi(x)\in(0,1)$而且当 $x\neq y$ 时，$\psi(x)\neq\psi(y)$，由映照 ψ, B 也对等于$(0,1)$的一个子集，从而 $\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{(0,1)}}=\aleph$．所以由 Bernstein 定理得到 $\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{(0,1)}}$．定理证毕.

定理 10　n 维欧几里得空间 E^n 的势为 $\aleph$.

证 如将 E^n 中点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 对应于 E^∞ 中的点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0, \cdots)$ 时，就知道 E^n 对等于 E^∞ 的一个子集. 但是 $\overline{\overline{E^\infty}} = \overline{\overline{E^1}}$，所以 $E^\infty \sim E^1$. 因此 E^n 对等于 E^1 的子集. 如果再将 E^1 中点 x 对应于 E^n 中点 $(x, 0, \cdots, 0)$ 时，又知道 E^1 对等于 E^n 的一个子集. 所以由 Bernstein定理知道 $\overline{\overline{E^n}} = \overline{\overline{E^1}} = \aleph$.

常用的是十进位小数，本书中有几处要用到二进位及三进位的小数，使用电子计算机时要用二进位、四进位、八进位等数. 下面我们来介绍 g 进位小数.

g 进位小数 设 g 是任意取定的一个大于 1 的自然数，$\{t_k\}$ 是一列小于 g 而大于或等于 0 的整数，称级数

$$\frac{t_1}{g} + \frac{t_2}{g^2} + \cdots + \frac{t_k}{g^k} + \cdots$$

为 **g 进位小数**. 常简记成

$$0.t_1 t_2 \cdots t_k \cdots$$

若在一个 g 进位小数中，从某一项以后 t_k 全为 0，则称为 g 进位有限小数，否则，称为 g 进位无限小数.

我们知道，$(0, 1]$ 中任何实数可以唯一地表示为 $g(g>1)$ 进位无限小数. 我们有下面的

引理 2 如果把 $(0,1]$ 中的实数表示成 $g(g>1)$ 进位无限小数记 g 进位无限小数全体为 A，那末这个表示成为 $(0,1]$ 到 A 的一一对应.

系 $g(g>1)$ 进位无限小数全体的势为 $\aleph$. g 进位小数全体的势也是 $\aleph$.

证 由于 g 进位有限小数全体是可列集，由定理 6，g 进位小数全体的势与 g 进位无限小数全体的势相同. 再由引理 2，它们的势都是 $(0, 1]$ 的势 $\aleph$. 证毕.

现在我们来讨论在数学分析中重要的函数族的势.

定理 11 $[a, b]$ 上的连续函数全体 $C[a, b]$ 的势是 $\aleph$.

证　由于常数函数属于 $C[a,b]$，常数函数的全体 K 的势是 $\aleph$，由于 E^∞ 的势是 $\aleph$，所以 E^∞ 与 $C[a,b]$ 的子集 K 对等．根据 Bernstein 定理，只要证明 $C[a,b]$ 与 E^∞ 的一子集对等．

我们把 $[a,b]$ 中的有理数全体排成一列，记为 $r_1, r_2, \cdots$，任何一个连续函数 $f(x)$，由它在 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ 上的值 $f(r_1), f(r_2), \cdots, f(r_n), \cdots$ 完全决定．事实上，因为对于任何 $x\in[a,b]$，存在上述有理数列的子数列 $r_{n_\nu}\to x(\nu\to\infty)$．由 f 的连续性，$f(x)=\lim\limits_{\nu\to\infty}f(r_{n_\nu})$．因此 $C[a,b]$ 到 E^∞ 中的映照

$$\varphi:\ f\longmapsto(f(r_1), f(r_2), \cdots, f(r_n), \cdots)$$

是可逆的，即 $C[a,b]$ 和 E^∞ 的一个子集 $\varphi(C[a,b])$ 对等．证毕．

但是应该注意，对于 $[a,b]$ 上所有实值函数全体所成的集 $R[a,b]$，虽然 $R[a,b]$ 有许多子集（如 $C[a,b]$）与 $[0,1]$ 对等，但是 $R[a,b]$ 并不能与 $[0,1]$ 对等（可参见下面定理 13 及其系）．

定理 12　(i) 设 M 是由两个元素 p，$q(p\neq q)$ 作成的元素列全体，那末 M 的势为 $\aleph$．(ii) 如果 Q 是可列集，那末 Q 的子集全体所成之集 S 的势为 $\aleph$．

证　(i) 作 M 到二进位小数全体 B 的映照 φ 如下：任取 $b=\{b_n\}\in M$，作二进位小数 $\varphi(b)=0.t_1t_2\cdots t_k\cdots$，其中当 $b_n=p$ 时 $t_n=0$，而 $b_n=q$ 时 $t_n=1$．容易看出 φ 是 M 到 B 的一一对应．根据引理 2 的系，B 的势是 $\aleph$．因此，M 的势是 $\aleph$．

(ii) 作 S 到二进位小数全体 B 的映照 ψ 如下：将 Q 中元素用自然数编号成为

$$q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots$$

对任意一个 $C\in S$，作二进位小数 $\psi(C)=0.t_1t_2\cdots t_n\cdots$，其中当 $q_n\in C$ 时，$t_n=1$，而 $q_n\overline{\in} C$ 时，$t_n=0$，$(n=1,2,\cdots)$．显然 ψ 是 S 到 B 上的一一对应．因此，S 与 B 的势同为 $\aleph$．证毕．

附录

8. 势的补充 在这一小节将对势论中某些问题略作补充，供读者参考。

势的运算 势是元素个数的抽象，势的大、小是元素个数多、少的抽象。势不仅有大、小，而且还能和数一样有运算。

例如：设 $\overline{\overline{A}}=\alpha$，$\overline{\overline{B}}=\beta$。如果 $A\cap B=\varnothing$，那末规定 $\overline{\overline{A\cup B}}=\alpha+\beta$（即势的加法）；$A$ 和 B 的乘积(集) $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$ 在集论中又称为 A 和 B 的配集，规定 $\overline{\overline{A\times B}}=\alpha\beta$（即势的乘法）。此外还有幂运算：集 B 中每一个元素都用 A 中的元素代替（B 中的不同元素也允许被 A 中相同的元素所代替），一切可能的代替所形成的集称为 A 盖 B 的集。例如 $A=\{p,q\}$（两个元素的集），$B=\{a,b,c\}$（三个元素的集），这时，A 盖 B 的集就是以 $\{p,p,p\}$、$\{p,p,q\}$、$\{p,q,p\}$、$\{q,p,p\}$、$\{p,q,q\}$、$\{q,p,q\}$、$\{q,q,p\}$、$\{q,q,q\}$ 等为元素（计为 2^3 个）所成的集。一般情况下，如果 C 是 A 盖 B 的集，那末规定 $\overline{\overline{C}}=\alpha^\beta$（这里 $\alpha=\overline{\overline{A}}$，$\beta=\overline{\overline{B}}$）。

当 A、B 都是有限集时（这时势就是计数），上述规定的势的运算是与计数的运算一致的。作为对一般的集（不必是有限集）所规定的势的上述运算也保存了计数运算的某些性质（例如加法和乘法的结合律、分配律、交换律等等）。当然也有不少计数的运算所具有的性质未被保存下来，例如，当 a,b 是两个自然数，并且 $b\neq 0$ 时，必有 $a+b>a$。然而，势论中却有下面的命题：b 是任一有限集的势，必有 $b+\aleph_0=\aleph_0$。从势的运算的观点来看，以前的某些定理就可翻译如下：定理 4 的结论相当于 $\alpha\aleph_0=\aleph_0$（α 是有限集的势）以及 $\aleph_0\aleph_0=\aleph_0$；定理 5 的结论相当于 $\aleph_0^n$（即 $\overbrace{\aleph_0\aleph_0\cdots\aleph_0}^{n}$）$=\aleph_0$；定理 6 的结论相当于 $\alpha+\aleph_0=\alpha$（α 是无限集的势）；定理 9 的结论相当于 $\aleph^{\aleph_0}=\aleph$。引理 2 和定理 12 的结论相当于 $2^{\aleph_0}=\aleph=g^{\aleph_0}$（$g>1$）。

$2^{\aleph_0}=\aleph$ 是把 $\aleph_0$ 与 $\aleph$ 联系起来的重要等式。另外，如果 α 是一

个无限集的势，那末必有

$$a = \aleph_0 a.$$

这个等式也是在很多场合要用到的重要等式.

无最大势 势既然可以比较，是否存在最大的势呢．这个问题的回答是否定的．我们有如下定理.

定理 13 B 是一个集，S 是 B 的一切子集所构成的集．必有 $\overline{\overline{S}} > \overline{\overline{B}}$（或者说 $2^{\overline{\overline{B}}} > \overline{\overline{B}}$）.

在证明定理 13 之前，先说明 $\overline{\overline{S}} = 2^{\overline{\overline{B}}}$．事实上，$S$ 中的一元素 E 实际上是 B 的一个子集，即 $E \subset B$．对任何 $x \in B$，如果 $x \in E$，我们就说“取”；如果 $x \overline{\in} E$，我们就说“不取”．这样，B 的一切子集就可以看成用“取”或“不取”两个词去代替 B 中元素的一切可能方式．如令 $A = \{$“取”，“不取”$\}$（两个元素的集），那末 S 便是 A 盖 B 的集，从而 $\overline{\overline{S}} = 2^{\overline{\overline{B}}}$.

证明定理 13 由 B 中单独一个点构成的集是 S 中的一个元素，S 中这种元素的全体记为 S_1，S_1 是 S 的子集．显然 B 与 S_1 对等，因而 $\overline{\overline{S}} \geqslant \overline{\overline{B}}$．剩下的只要证明 $\overline{\overline{S}} \neq \overline{\overline{B}}$.

用反证法证明 $\overline{\overline{S}} \neq \overline{\overline{B}}$：假如不对，便有 $\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{B}}$，从而存在 φ，φ 是 B 到 S 上的一一对应．对任何 $b \in B$，$\varphi(b) \in S$．因而 b 和 $\varphi(b)$ 之间只有两种可能，(i) $b \in \varphi(b)$；(ii) $b \overline{\in} \varphi(b)$．不可能对一切 $b \in B$，都只发生(i)．否则，在 S 中取一个元素 $\mathscr{g} = \{a, b\}$，根据(i)，$\varphi^{-1}(\mathscr{g})$ 只可能是 a 或 b．如果是 a，但 S 中的 $\mathscr{g}' = \{a\}$ $(\neq \mathscr{g})$，也有 $\varphi^{-1}(\mathscr{g}') = a = \varphi^{-1}(\mathscr{g})$，这与假设 φ 是一一对应相矛盾．同样也可以证明 $\varphi^{-1}(\mathscr{g})$ 不可能是 b．从而(ii) 必然会发生．记满足(ii)的 B 中元素全体为 S^*，显然，它不是空集．又记 $\varphi^{-1}(S^*) = b^*$，现在问：是否 $b^* \in S^*$．显然，$b^* \overline{\in} S^*$，这是因为 $S^* = \varphi(b^*)$，而 S^* 是由 B 中满足(ii)的元素全体构成的，即 $b^* \overline{\in} S^*$．但是 $b^* \overline{\in} S^*$ 也不对，这

是因为由 $b^*\overline{\in}S^*$，说明 b^* 是满足(ii)的元素，因而 b^* 应是 S^* 中的元素，即 $b^*\in S^*$，这是矛盾. 由此可知假设 $\overline{\overline{S}}=\overline{\overline{B}}$ 是不对的. 证毕.

注意，定理 13 的证明并不需要用到任何两个集的势必可比较大、小这个命题，即只要有势的大、小概念，没有策墨罗的选取公理，定理 13 仍然成立.

系　$[a,b]$ 上一切实函数全体 $R[a,b]$ 的势大于 $\aleph$.

证　记 $[a,b]$ 上每点的函数值不取 0 便取 1 的实函数全体为 S，显然 $S\subset R[a,b]$，因而 $\overline{\overline{S}}\leqslant\overline{\overline{R[a,b]}}$. 而集 S 正是用集 $A=\{0,1\}$ 盖集 $B=[a,b]$ 的集，即集 S 与 $[a,b]$ 的一切子集所构成的集具有相同的势，因而

$$\aleph<2^{\aleph}=\overline{\overline{S}}\leqslant\overline{\overline{R[a,b]}}$$

证毕.

如果注意到 A 盖 B 的集就是 B 到 A 的映照全体，那末 $R[a,b]$ 正是 $A=(-\infty,\infty)$ 盖 $B=[a,b]$ 的集，从而 $\overline{\overline{R[a,b]}}=\aleph^{\aleph}$. 如果读者有兴趣，还可以证明下列等式:

$$\overline{\overline{R[a,b]}}=\aleph^{\aleph}=(2^{\aleph_0})=2^{\aleph_0\aleph}=2^{\aleph}=\overline{\overline{S}}$$

这里 S 是 $[a,b]$ 的一切子集全体.

Cantor 假设　$\aleph_0$、$\aleph$ 是两个重要的无限势. 是否存在一个势 α，使得 $\aleph_0<\alpha<\aleph$ 成立？Cantor 首先看到了这个自然而重要的问题，他并没有解决这个问题. 但他相信(从而他假设)没有这个“中间”势 α，这就是著名的 Cantor 连续统假设. 这个假设现在终于已被人们搞清楚了. 这个假设可以作为一条公理，并且与集合论中其它一些公理是独立的.

习　题

1. 证明代数数全体是可列集.

2. 证明任一可列集的所有有限子集全体是可列集.

3. 证明 g 进位有限小数全体是可列集, 循环小数全体也是可列集.

4. 对于有理数, 施行 $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, …等有限回运算. 这样得到的一切数其全体是可列的吗?

5. 设 A 是平面上以有理点(即坐标都是有理数的点)为中心有理数做半径的圆的全体, 证明 A 是可列集.

6. 若集 A 中每个元素, 由互相独立的可列个指标所决定, 即 $A=\{a_{x_1x_2\cdots}\}$, 而每个指标 x_i 在一个势为 $\aleph$ 的集中变化, 则集 A 的势也是 $\aleph$.

7. 设 $\{x_n\}$ 为一序列, 其中的元素彼此不同, 则它的子序列全体组成势为 $\aleph$ 的集. 如果 $\{x_n\}$ 中只有有限项彼此不同, 那末子序列全体的势如何?

8. 证明 $[a, b]$ 区间上右方连续的单调函数全体的势是 $\aleph$. 又 $[a, b]$ 区间上的单调函数全体的势如何?

9. 设集 B 与 C 的和集的势为 $\aleph$. 证明 B 及 C 中必有一个集的势也是 $\aleph$. 如果 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 的势是 $\aleph$, 证明必有一个 A_n 的势也是 $\aleph$.

10. 证明: 直线上集 A 如果具有下面性质: 对任何 $x\in(-\infty, \infty)$, 总存在包含 x 的某个区间 $(x-\delta, x+\delta)$, 使得 $(x-\delta, x+\delta)\cap A$ 最多只有可列个点, 那末 A 必是有限集或可列集.

§3　等价关系、序和 Zorn 引理

1. 等价关系　(初学时可把这一小节和下面的第 2 小节商集放在学习第 4 章 §2 中的商空间之前读.) 在数学中, 一个集 A 的元素之间常有一定的关系. 我们现在要考察的是下面的一种等价关系.

定义　假设 A 是一个集, 在 A 的元素之间有一种关系"$\sim$"适合以下的条件:

1° 自反性: 对于一切 $a\in A$, $a\sim a$;

2° 对称性: 如果 $a\sim b$, 那末 $b\sim a$ $(a, b\in A)$;

3° 传递性: 如果 $a\sim b$, 并且 $b\sim c$, 那末 $a\sim c$.

这时我们说"～"是 A 上的**等价关系**.

例如§2中两个集的对等关系就是一种等价关系. 下面我们再举几个例子.

例1 在实数全体 E^1 上, 当 $x-y=2k\pi$(k 是整数)时, 规定 $x\sim y$, 这是 E^1 上的一个等价关系.

例2 在平面 E^2 上, 当两点 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 满足 $x_1=x_2$ 时, 规定 $(x_1, y_1)\sim(x_2, y_2)$, 这是 E^2 上的一个等价关系.

例3 A、B 是两个集, f 是 A 到 B 的一个映照. 当 x、$y\in A$, 满足 $f(x)=f(y)$ 时, 规定 $x\sim y$. 这是 A 上的一个等价关系. 这个等价关系又称为**由映照 f 按等值方式所导出的等价关系**, 简称为**由 f 导出的等价关系**.

剖分和等价类 设 A 是一个集, $\{A_\alpha, \alpha\in\Lambda\}$ 是 A 的一族子集, 如果满足(i) $A_\alpha\cap A_\beta=\varnothing$ $(\alpha\neq\beta)$; (ii) $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=A$, 那末称 $\{A_\alpha, \alpha\in\Lambda\}$ 是 A 的一个**剖分**

例4 A、B 是两个集, f 是 A 到 B 的一个映照. 对任何 $b\in B$, 作 $A_b=\{x\mid f(x)=b\}$(如果 $b\overline{\in}\mathscr{R}(f)$, 那末规定 $A_b=\varnothing$). 这时 $\{A_b, b\in B\}$ 是 A 的一个剖分. 它称为**由 f 按等值方式所导出的剖分**, 简称为**由 f 导出的剖分**.

由映照 f 可以导出一个剖分. 反之, 对任何 A 的剖分 $\{A_\alpha, \alpha\in\Lambda\}$, 必存在映照 f, 使得由 f 所导出的剖分就是 $\{A_\alpha, \alpha\in\Lambda\}$. 事实上, 取 $B=\Lambda$, 作 A 到 B 的映照 f: 当 $x\in A_\alpha$ 时, $f(x)=\alpha$. 显然, f 就是所要求的映照.

设～是集 A 上的一个等价关系. 任取 $a\in A$, 令 $\tilde{a}=\{b\mid b\sim a\}$, 称 $\tilde{a}$ 是 A 中(按等价关系～)的一个**等价类**.

显然, 每个等价类是 A 的一个子集, 任何两个等价类 $\tilde{a}$、$\tilde{b}$ 或是相同(这时 $a\sim b$), 或是互不相交(这时 $a\not\sim b$, "$\not\sim$"表示不等价), 并且集 A 就是一切互不相同的等价类的和集. 换句话说, 一切按等

价关系～所产生的等价类构成了 A 的一个剖分. 反之, 对于 A 的任何一个剖分 $\{A_\alpha, \alpha\in\Lambda\}$, 必存在一个 A 上的等价关系～, 使得由～所产生的等价类全体所构成 A 的剖分就是 $\{A_\alpha, \alpha\in\Lambda\}$. 事实上, 如果 $\{A_\alpha, \alpha\in\Lambda\}$ 是给定的(A 的)一个剖分, 当 x、y 同属于 A_α 时, 规定 $x\sim y$, 那末～便是 A 上的一个等价关系, 而由这个等价关系所产生的等价类全体所构成的 A 的剖分正是 $\{A_\alpha, \alpha\in\Lambda\}$.

2. 商集

定义 设～是集 A 上的一个等价关系. 又设 Q 是集 A 中等价类全体(Q 中的元素是 $\tilde{a}, a\in A$), 称 Q 是集 A 由等价关系而导出的**商集**, 记为 $A/\sim$.

集 A 到它的商集 $Q=A/\sim$ 上的映照

$$\varphi: a\longmapsto \tilde{a}$$

称为**自然映照**.

例 5 在例 2 中, $E^2/\sim$ 中的元素 $\widetilde{(x,y)}=\{(x,y)\mid y\in E^1\}$ 就是横坐标为 x 的直线. 如果把 $\widetilde{(x,y)}$ 和 E^1 中的 x 视为同一, 那末 $E^2/\sim$ 就可以视为 E^1 了.

代数学中的商群、商环等都是一种特定条件下的商集.

设 A、B 是两个集, ψ 是 A 到 B 的一个映照. 由 ψ 按等值方式可导出 A 上的一个等价关系～. 对任何 $a\in A$, 记 $\psi(a)$ 为 c, 那末 a 所在的等价类就是 $\tilde{a}=\psi^{-1}(c)=\{b\mid \psi(b)=c\}$. 利用 ψ 可以导出由商集 $Q=A/\sim$ 到 B 的一个映照 $\tilde{\psi}$: 当 $a\in A$ 时, $\tilde{\psi}(\tilde{a})=\psi(a)$. 由于 $\tilde{a}=\tilde{b}$ 时, $\psi(a)=\psi(b)$, 所以映照 $\tilde{\psi}$ 是可以定义的. 而且 $\tilde{\psi}$ 是可逆映照. 事实上, 当 $\tilde{a}\neq\tilde{b}$ 时, $a\not\sim b$, 所以 $\psi(a)\neq\psi(b)$, 即 $\tilde{\psi}(\tilde{a})\neq\tilde{\psi}(\tilde{b})$. 注意, 如果 ψ 本身就是可逆映照, 那末 $\tilde{a}$ 就只含有一个元素 a. 当我们把 $\tilde{a}$ 和 a 视为同一时, 这时 $A/\sim$ 就是 A, $\tilde{\psi}$ 也就还原成 ψ. 当 ψ 不是可逆映照时, 经上述手续就能由 ψ 自然地导出一个 $A/\sim$ 到 B 的可逆映照. 这是在代数学和泛函分析中常用的技

巧.

在第四章§2我们将利用商集来讨论商空间.

3. 顺序关系 (这一小节及其后第4小节的内容是给读者参考的. 有兴趣的读者也可放到第五章§2泛函延拓定理之后读) 顺序是数学中常用的概念之一. 例如实数大小就是一种重要的顺序关系. 高等数学的重要概念之一是极限, 极限概念所研究的主要就是变量按照一定的顺序变化的趋势. 但是在许多情况下, 在集合中不是任何两个元素之间都可以自然地定义顺序. 例如在构造黎曼(Riemann)积分和数的时候, 需要考察积分区间里所取的各种不同的分点组. 令A表示$[a, b]$中所有有限分点组$\mathscr{D}$全体, 我们在A中规定: 当$\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2 \in A$而且$\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{D}_2$时, 说$\mathscr{D}_1$在$\mathscr{D}_2$前, 这是一种顺序关系. 但$A$中确实有这样的$\mathscr{D}_1$和$\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_1$既不包含在$\mathscr{D}_2$中, $\mathscr{D}_2$也不包含在$\mathscr{D}_1$中, 这样$\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$之间就不存在上述的顺序关系. 所以我们需要考察这样的情况: 在集中只是一部分元素之间具有顺序关系. 从黎曼积分的理论也可以看出这种顺序关系是十分重要的. 在其它数学领域中也常要遇到这一基本的概念. 现在我们给出序的概念.

定义 设A是一集, 在其中规定了某些元素之间的关系"$\prec$", 它满足以下的条件:

1° 自反性: 对A中的一切元素a成立着$a \prec a$;

2° 如果$a \prec b$, 而且$b \prec a$, 那末$a = b$;

3° 传递性: 如果$a \prec b$, 而且$b \prec c$, 就有$a \prec c$,

那末称关系"$\prec$"为A中的一个**顺序**, $a \prec b$读作a在b前(或b在a后), 这时称集A按顺序$\prec$成一**半序集**, 或者说集A是有序的.

例6 设B是一个非空集, A是B的所有子集所成的集. 如果子集之间用包含关系"$\subset$"作为A中某些元素间的顺序, 即当U, $V \in A$, 且$U \subset V$时, 规定$U \prec V$, 那末显然这是一种顺序(称它是自

然顺序)，因而A按此顺序成为一个半序集.

例 7　设B是一个集，A是B上的实函数全体，当$a, b\in A$，而且对每个$t\in T$有$a(t)\leqslant b(t)$时，规定$a\prec b$，那末A按此顺序也成为半序集.

例 8　设A是某些实数所成的集，在A中规定当$a\leqslant b$时为$a\prec b$. 显然A成一半序集，这个顺序称作**自然顺序**.

若在这个集A中作另一规定：当$a\geqslant b$时规定$a\prec b$，显然这也是一个顺序关系，称此顺序为**逆自然顺序**.

例 9　设A是所有实数对(x, y)全体，规定两对(x_1, y_1)，(x_2, y_2)当$x_1<x_2$时为$(x_1, y_1)\prec(x_2, y_2)$，并规定当$x_1=x_2$而$y_1\leqslant y_2$时为$(x_1, y_1)\prec(x_2, y_2)$. 这是$A$中的一个顺序关系，称为字典顺序(因为它和拼音文字字典的字序类似).

定义　设集A中已经定义了顺序关系"$\prec$"，如果对A中的任何两个元素a, b都可以确定它们之间的顺序，即$a\prec b$与$b\prec a$两个关系式中必有一个成立，就称A是一个**全序集**.

在例 8 中的数集A按自然顺序(或逆自然顺序)是全序集，例 9 的集也是全序集. 如在例 6、例 7 中，当B不止含有一个元素时，A都不是全序集.

设A是一个半序集，B是A的子集，如果有$a\in A$，使得对每个$b\in B$，成立着$b\prec a$，即a在B中所有元素之后，那末称a为子集B的**上界**. 类似地也有**下界**的概念. 对一个子集，上界、下界不一定是唯一的，也可以没有上界或下界. 例如取A为实数区间$(0, 1)$，以自然顺序为顺序，取$B=A$，显然B在A中就不存在上界，也不存在下界.

例 10　对每个自然数n作区间$[0, 1]$上的分点组，令

$$D_n=\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

所有这些分点组的全体记作$\mathscr{D}$. 令B表示[0, 1]中的有理数全体，A表示B的子集全体. $B\in A$, 于是$\mathscr{D}\subset A$. 象例6中所规定的那样，在集A中以包含关系$\subset$作为元素间的顺序，A成为半序集. 显然，对任何$D_n\in\mathscr{D}$，都有$D_n\subset B$. 所以B是$\mathscr{D}$的上界.

设A是一个半序集，$a\in A$，如果在A中不存在别的元素$b(\neq a)$在a后，那末称a为A的**极大元**. 换句话说，极大元a是具有下面性质的元素：如果$b\in A$，而且$a\prec b$，那末必有$b=a$. 半序集的极大元不一定是唯一的. 例如两个元素a、b所组成的集A，其中规定$a\prec a$, $b\prec b$，则A是半序集，而a和b都是A的极大元. 但是，在全序集中极大元是唯一的.

类似地也有**极小元**的概念.

4. 曹恩(Zorn)引理 下面介绍一个引理，它是研究"无限的过程"的一个逻辑工具，在泛函分析的基本理论中常要用到. 这个引理是作为关于半序集的一个公理来接受的.

引理(Zorn) 设A是一个半序集，如果A的每个全序子集都有上界，那末A必有极大元.

类似地有关于下界和极小元(存在性)的引理.

Zorn引理是证明别的一些定理的基础. 作为公理，它并不象别的公理，如欧几里得几何学上的一些公理那样直观，那样明显，自然不易被人们所接受，因而有必要作些简略的说明.

这个引理的可接受性，可以这样粗略地看(但这不是逻辑的证明)：如果A是一个半序集，任意取A中的一个元素a_1，如果它不是极大元，那末必有元素$a_2\in A$, $a_2\neq a_1$，使得$a_1\prec a_2$. 这样继续下去，可以得到一个全序子集

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

依假设，它必有上界记为a_ω. 如果a_ω不是极大元，A中必有一元素在a_ω之后，记它为$a_{\omega+1}$(这里$\omega+1$且理解为一个记号)；再继续

下去，又得到全序子集

$$a_1, \cdots, a_n, \cdots, a_\omega, a_{\omega+1}, \cdots, a_{\omega+m}, \cdots$$

由假设它有上界记为 $a_{2\omega}$（这里 2ω 也只是一个记号，我们不去追究它的意义），这样一直做下去，“最终总可以”找到极大元.

如果对上述过程加以严格分析，果真要实现“最终总可以找到极大元”就要运用另一个公理——策墨罗(Zermelo) 的选取公理.

Zermelo 选取公理. 设 $S=\{M\}$ 是一族两两不相交的不空的集，那末存在集 L 满足下面两个条件：

(1) $L\subset\bigcup\limits_{M\in S} M$;

(2) 集 L 与 S 中每一个集 M 有一个而且只有一个公共元素.

其实选取公理和 Zorn 引理是等价的. 等价性的证明我们不引进来了，可参看[7].

§4 直线上的点集

前面研究了一般的集和它们的一般性质，介绍了集的运算，集的映照，集的势等等重要概念. 这些内容固然重要，但还不足以描述分析数学中要用到的收敛性，不足以描述极限概念，还不能满足下面研究测度和积分的需要，我们必须进一步研究点集. 关于点集的理论，本书分为两步. 第一步先来介绍最常用的实数直线上的点集，也就是实数集的基本概念和性质，这一方面是为满足下面两章测度与积分理论中讨论直线上的勒贝格测度和积分的需要；另一方面也为在泛函分析中所需要的更一般的点集理论提供典型特例. 第二步我们将在第四章中着重讨论度量空间的点集.

1. 实数直线和区间 我们用 E^1 表示实数的全体所成的集，也就是实数直线. 每个实数也称为点.

直线上最常用的一种点集是区间，区间有下面几种：

点集$(\alpha,\beta)=\{x|\alpha<x<\beta\}$称为开区间，$-\infty\leqslant\alpha<\beta\leqslant\infty$.

点集$[\alpha,\beta)=\{x|\alpha\leqslant x<\beta\}$称为左闭右开区间①，这里$-\infty<\alpha\leqslant\beta\leqslant\infty$.

点集$(\alpha,\beta]=\{x|\alpha<x\leqslant\beta\}$称为左开右闭区间①，这里$-\infty\leqslant\alpha\leqslant\beta<\infty$.

区间$(\alpha,\beta]$或$[\alpha,\beta)$统称作半开半闭区间.

点集$[\alpha,\beta]=\{x|\alpha\leqslant x\leqslant\beta\}$称做闭区间，这里$-\infty<\alpha\leqslant\beta<\infty$.

这些点集统称作区间，可简记为$\langle\alpha,\beta\rangle$.

注意，一点α所成的集$\{\alpha\}$也是闭区间，就是$[\alpha,\alpha]$.

设A是一个实数集，如果存在有限数c，使得对于一切$x\in A$都有$x\leqslant c$（或$x\geqslant c$），就说A是有上界（或有下界）的. 这时必有唯一的有限数M（或m）适合下述两个条件：

(i) 对一切$x\in A$，$x\leqslant M$（或$x\geqslant m$）；

(ii) 对任何正数ε，必有$x\in A$使得$x>M-\varepsilon$（或$x<m+\varepsilon$）；

称M是A的**上确界**，m是A的**下确界**，记M为$\sup\limits_{x\in A}x$，m为$\inf\limits_{x\in A}x$. 如果A不是有上界的，规定A的上确界是∞，即$\sup\limits_{x\in A}x=\infty$. 有时$\sup\limits_{x\in A}x$又记做$\sup A$. 同样地如果$A$不是有下界的，规定$A$的下确界是$-\infty$，即$\inf\limits_{x\in A}x=-\infty$. $\inf\limits_{x\in A}x$又可记为$\inf A$.

2. 开集 设x_0是直线上的一点，包含x_0的任何一个开区间(α,β)称做x_0的一个**环境**（或**邻域**）. 特别，如果ε是一个正数，称$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$为$x_0$的$\varepsilon$-**环境**，记为$O(x_0,\varepsilon)$. 设$A$是直线上的一个不空的点集，$x_0\in A$，如果存在$x_0$的环境$(\alpha,\beta)\subset A$，那末$x_0$称为

① 为了第二章中叙述方便起见，我们容许用$[\alpha,\alpha)$或者$(\alpha,\alpha]$表示空集.

点集 A 的内点．例如当 $\alpha<\beta$ 时，任何区间 $\langle\alpha, \beta\rangle$ 除端点外的每点都是这个区间的内点．

定义　设 G 是直线上的一个不空的点集．如果 G 中每一点都是 G 的内点，称 G 是**开集**．

例如任何开区间 (α, β) 是开集．我们规定空集是开集．

开集的基本性质是：

定理 1　(i) 空集 $\varnothing$ 和全直线是开集；

(ii) 任意一族开集的和集是开集；

(iii) 有限个开集的通集是开集．

证　(i)是显然的．现在来证明(ii)．设 $\{G_\alpha\}$ 是一族开集，由开集的定义，要证明 $G=\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ 是开集．只须对于 G 中任意一点 x_0，证明存在 x_0 的环境 $(a, b)\subset G$ 就可以了．因为 $x_0\in G$，必有族中的某开集 G_α，使得 $x_0\in G_\alpha$．因此 x_0 是 G_α 的内点，所以存在 x_0 的一个环境 $(a, b)\subset G_\alpha\subset G$．这就是说 x_0 是 G 的内点，即 G 是开集．

最后证明(iii)．设 $G_1, \cdots, G_n$ 是有限个开集．令 $G=\bigcap\limits_{\nu=1}^{n} G_\nu$．我们只要考虑当 G 不是空集时的情况．任意取 $x_0\in G$，那末 $x_0\in G_\nu$，$\nu=1, 2, \cdots, n$．因为 G_ν 是开集，所以存在 x_0 的环境 $(\alpha_\nu, \beta_\nu)\subset G_\nu$，$\nu=1, 2, \cdots, n$．令 $(\alpha, \beta)=\bigcap\limits_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu, \beta_\nu)$，即 $\alpha=\max\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n}\alpha_\nu$，$\beta=\min\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n}\beta_\nu$，由于 $\beta_\nu>x_0$，和 $\alpha_\nu<x_0$，$(\nu=1, 2, \cdots, n)$，所以 $\alpha<x_0<\beta$．因此，(α, β) 是 x_0 的环境，并且显然 $(\alpha, \beta)\subset(\alpha_\nu, \beta_\nu)\subset G_\nu$，$(\nu=1, \cdots, n)$．所以 $(\alpha, \beta)\subset G$，即 x_0 是 G 的内点，G 是开集．证毕．

在定理 1 的(ii)中，"任意个开集"，既可以是有限个也可以是无限个．但是在(iii)中，如果把"有限个开集"改为"无限个开集"，那末它们的通集就不一定是开集了．例如 $G_n=\left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$，$n=1$，

2, …, 显然它们的通集 $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$, 即 G 是只含有一点 0 的集, 它不是开集.

在直线上, 开区间是开集.

由(ii) 可知任意个开区间的和集必是开集. 特别, 一族互不相交非空开区间(根据 §2 的例 13, 最多是可列个) $\{(a_\nu, b_\nu)\}$ 的和集 $G=\bigcup_\nu (a_\nu, b_\nu)$ 是开集. 现在我们要证明这正是 E^1 上非空开集的一般形式. 为此引入开集的构成区间概念.

定义 设 G 是直线上的开集. 如果开区间 $(\alpha,\beta)\subset G$, 而且端点 α,β 不属于 G, 那末称 (α,β) 为 G 的一个**构成区间.**

例如开集 $(0,1)\cup(2,3)$ 的构成区间是 $(0,1)$ 及 $(2,3)$.

定理 2 (开集的构造) 直线上任意一个非空开集可以表示成有限个或可列个互不相交的构成区间的和集. 又当非空开集表示成互不相交的开区间的和集时, 这些开区间必是构成区间.

证 设 G 是直线上的一个非空开集, 分以下四步来论证:

(1) 开集中任何一点必含在一个构成区间中. 事实上, 任意取 $x_0\in G$, 记 A_{x_0} 为适合条件 $x_0\in(\alpha,\beta)\subset G$ 的开区间 (α,β) 全体所成的区间集. 因为 G 是开集, A_{x_0} 不会空. 记 $\alpha_0=\inf\limits_{(\alpha,\beta)\in Ax_0}\alpha$, $\beta_0=\sup\limits_{(\alpha,\beta)\in Ax_0}\beta$. 作开区间 (α_0,β_0) (其实, $(\alpha_0,\beta_0)=\bigcup\limits_{(\alpha,\beta)\in Ax_0}(\alpha,\beta)$). 显然 $x_0\in(\alpha_0,\beta_0)$. 现在证明 (α_0,β_0) 是 G 的构成区间. 先证 $(\alpha_0,\beta_0)\subset G$. 任意取 $x'\in(\alpha_0,\beta_0)$, 不妨设 $x'\leqslant x_0$. 由于 α_0 是下确界, 所以必有 $(\alpha,\beta)\in A_{x_0}$ 使 $\alpha_0<\alpha<x'$, 因此 $x'\in(\alpha,x_0]\subset(\alpha,\beta)\subset G$. 同样, 如果 $x'>x_0$, 也可以证明相类似的结果. 因此 $(\alpha_0,\beta_0)\subset G$. 由此顺便得到 $(\alpha_0,\beta_0)\in A_{x_0}$. 再证 $\alpha_0\overline{\in}G$: 如果不对, 那末 $\alpha_0\in G$, 因为 G 是开集, 必有区间 (α',β'), 使得 $\alpha_0\in(\alpha',\beta')\subset G$. 这样, $x_0\in(\alpha',\beta_0)\subset$

$(\alpha', \beta')\cup(\alpha_0, \beta_0)\subset G$, 因此, $(\alpha', \beta_0)\in A_{x_0}$, 而 $\alpha'<\alpha_0$, 这就和 α_0 是 A_{x_0} 中的区间左端点的下确界相矛盾. 所以 $\alpha_0\overline{\in}G$. 同样有 $\beta_0\overline{\in}G$. 这就是说 (α_0, β_0) 是 G 的构成区间.

(2) 开集 G 的任何两个不同的构成区间必不相交. 不然的话, 设 (α_1, β_1), (α_2, β_2) 是 G 的两个不同的构成区间, 但相交. 这时必有一个区间的端点在另一个区间内, 例如 $\alpha_1\in(\alpha_2, \beta_2)$, 但 $(\alpha_2, \beta_2)\subset G$, 这和 $\alpha_1\overline{\in}G$ 矛盾. 因此不同的构成区间不相交. 再由 §2 例 13, 开集 G 的构成区间全体最多只有可列个, 记为 $\{(a_\nu, b_\nu), \nu=1, 2, \cdots\}$.

(3) 由(1)、(2)得到 $G\subset\bigcup\limits_{\nu}(a_\nu, b_\nu)$. 又由构成区间的定义, 有 $G\supset\bigcup\limits_{\nu}(a_\nu, b_\nu)$, 所以 $G=\bigcup\limits_{\nu}(a_\nu, b_\nu)$.

下面再证非空的互不相交开区间必是它们的和集的构成区间.

(4) 设 $G=\bigcup\limits_{\nu}(\alpha'_\nu, \beta'_\nu)$ 是一组互不相交的开区间的和集. 现在只要证明每个 $(\alpha'_\nu, \beta'_\nu)$ 都是 G 的构成区间. 显然 $(\alpha'_\nu, \beta'_\nu)\subset G$ 若它不是构成区间, 比方说 $\alpha'_\nu\in G$, 那末必有 $\mu\neq\nu$ 使得 $\alpha'_\nu\in(\alpha'_\mu, \beta'_\mu)$ 因而 $(\alpha'_\mu, \beta'_\mu)$ 与 $(\alpha'_\nu, \beta'_\nu)$ 相交. 这和假设矛盾. 所以 $\alpha'_\nu\overline{\in}G$. 同样 $\beta'_\nu\overline{\in}G$. 所以 $(\alpha'_\nu, \beta'_\nu)$ 是构成区间. 证毕.

3. 极限点 极限概念是分析数学中的基本概念之一. 为了进一步研究实变函数的需要, 我们这里要对直线上点集与极限有关的性质, 作仔细的分析.

实数列的极限概念在数学分析中通常是这样叙述的:

定义 设 $\{x_n\}$ 是一列实数, 如果存在实数 x_0, 它有下面的性质: 对于任何正数 ε, 存在自然数 N, 使得当 $n\geq N$ 时成立着

$$|x_n - x_0| < \varepsilon \tag{4.1}$$

那末称数列$\{x_n\}$收敛于x_0，记做$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，或者记为$x_n \to x_0 (n \to \infty)$，并且称$x_0$为$\{x_n\}$的**极限**.

利用一点的环境不难把收敛定义用下面的充要条件来代替.

引理 1 直线上点列$\{x_n\}$收敛于x_0的充要条件是对于x_0的任何环境(α, β)，存在自然数N，使得当$n \geq N$时有

$$x_n \in (\alpha, \beta) \tag{4.2}$$

证 必要性：设$x_n \to x_0$，那末对x_0的任何环境(α, β)，取正数$\varepsilon = \min(\beta - x_0, x_0 - \alpha)$，这时必有自然数$N$使得当$n \geq N$时$|x_n - x_0| < \varepsilon$，因此，$x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (\alpha, \beta)$.

充分性：设引理 1 中的条件满足，对x_0的任何环境$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$，有$N$使得当$n \geq N$时$x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$，这就是(4.1). 证毕.

下面要讨论点集的极限点.

定义 设A是实数直线上的点集，x_0是直线上的一点(可以属于A，也可以不属于A)，如果在x_0的任何一个环境(α, β)中，总含有集A中不同于x_0的点，即$((\alpha, \beta) - \{x_0\}) \cap A \neq \varnothing$. 那末称$x_0$为点集$A$的**极限点**.

显然，一个点集的内点都是这点集的极限点. 又如当

$$-\infty < a < b < \infty$$

时，区间$\langle a, b \rangle$的端点是这区间的极限点.

例 1 点集$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$以 0 为极限点.

极限点的定义有多种等价的形式. 下述引理中的(ii)—(iv)是常用的.

引理 2 设A是实数直线上的一个点集，x_0是直线上的一点，

那末下面的四件事是等价的:

(i) x_0 是集 A 的极限点.

(ii) 存在集 A 中点列 $\{x_n\}$, $x_n\neq x_0 (n=1,2,\cdots)$, 使得 $x_n\to x_0$.

(iii) 存在集 A 中一列互不相同的点 $\{x_n\}$, 使得 $x_n\to x_0$.

(iv) 在 x_0 的任何环境 (α,β) 中必含有 A 中无限多个点.

证　只要证明(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(i)[①]就可以了.

(i)⇒(ii)设 x_0 是 A 的极限点, 那末对每个正整数 n, 必有 $x_n\neq x_0$, $x_n\in\left(x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n}\right)\cap A$, 就是说, 有 A 中不同于 x_0 的点列 $\{x_n\}$, 适合

$$|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$$

因此 $x_n\to x_0$, 这就是条件(ii).

(ii)⇒(iii)　设 x_0 适合条件(ii). 这时点列 $\{x_n\}$ 中必有无限多项彼此不相同. 因为如果点列 $\{x_n\}$ 只由有限多个点组成, 必有一个点 a 在其中重复出现无限次, 然而 $x_n\to x_0$, 那末应该 $a=x_0$, 但是这与 $x_n\neq x_0$ 冲突. 设 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 中互不相同的点组成的子序列, 显然, $\{x_{n_k}\}$ 就是适合(iii)中所要求的序列.

(iii)⇒(iv)　设 $\{x_n\}$ 是 A 中互不相同元素组成的序列, 并且 $x_n\to x_0$. 根据引理 1, 对任何 x_0 的环境 (α,β), 必存在 N, 当 $n\geqslant N$ 时, $x_n\in(\alpha,\beta)$, 即 (α,β) 含有 A 中无限个点.

(iv)⇒(i)是显然的. 证毕.

和极限点相对立的是孤立点.

定义　设 A 是直线上的点集, $x_0\in A$. 如果 x_0 有一个环境 (α,β), 其中除 x_0 外不含有 A 的点, 即 $[(\alpha,\beta)-\{x_0\}]\cap A=\varnothing$, 称 x_0 是 A 的**孤立点**. 如果不空的点集 A 中每一点都是孤立点, 称 A 是**孤立集**.

① "⟹"表示"推出"的意思.

从定义可知,集 A 中任何一点 x_0,如果 x_0 不是 A 的极限点,那末 x_0 必是 A 的孤立点. 因此,集 A 中的内点不是 A 的孤立点. 一个集 A, 如果 A 中每一点都不是 A 自身的极限点时, A 便是孤立集. 集 $\left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ 就是孤立集.

例 2 空集没有极限点.

例 3 有限点集或发散到无穷远的点列所成的点集都没有极限点,所以是孤立点集.

例 4 以 R_0 表示区间[0, 1]中的有理数全体. 那末区间[0, 1]中任何一点都是 R_0 的极限点. 除此以外, R_0 没有任何其它的极限点.

例 5 闭区间[0, 1]的极限点全体,就是[0, 1].

这些例子说明了直线上点集的极限点的各种可能的情况: (i)没有极限点(如例 2、3); (ii)一个点集的极限点可以都不属于这个点集(例 1); (iii)一个点集 A 的极限点可以一部分在 A 中,另一部分不在 A 中,甚至极限点比 A 本身的点还多(如例 4); (iv)一个点集本身同时就是它自己的极限点全体(如例 5). 为了进一步分析点集和它的极限点的关系,我们引入如下的概念.

4. 闭集

定义 点集 A 的极限点的全体所成的集称为 A 的**导集**, 记为 A'.

显然, A 是孤立集的充要条件是 $A \cap A' = \varnothing$.

没有极限点的点集, 它的导集是空集. 因而空集的导集是空集.

定义 如果点集 A 的极限点全部属于 A, 即 $A' \subset A$, 称点集 A 是**闭集**.

因此, 如果点集 A 没有极限点, 那末 A 是闭集, 从而空集是闭

集. 容易看到闭区间是闭集.

从下面的定理 3 看出, 闭集就是对于极限运算封闭的点集.

定理 3 点集 A 为闭集的充要条件是集 A 中任何一个收敛点列必收敛于 A 中的一点.

证 必要性 设 A 是一个闭集, $\{x_n\}$ 是 A 中的一个收敛点列, $x_n \to x_0$. 我们要证明 $x_0 \in A$. 如果有某个 n, $x_n = x_0$, 那末自然 $x_0 \in A$. 如果对一切 n, $x_n \neq x_0$, 由引理 2 的(ii)知道 x_0 是 A 的极限点, 于是 $x_0 \in A' \subset A$, 所以 $x_0 \in A$.

充分性 设 A 中任何一个收敛点列必收敛于 A 中一点, 对于 A 的任何一个极限点 $x_0 \in A'$, 由引理 2, 有 A 中的收敛点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0, 由假设, $x_0 \in A$, 所以 $A' \subset A$, 即 A 是闭集. 证毕.

定理 4 点集 A 成为闭集的充要条件是 A 的余集 $A^c = E^1 - A$ 是开集.

换句话说, 闭集的余集是开集, 开集的余集是闭集.

证 必要性 假设 A 是闭集, 那末 A^c 中任何一点 x_0 不是 A 的极限点. 由极限点的定义, 存在 x_0 的环境 (α, β), 使得 $[(\alpha, \beta) - \{x_0\}] \cap A = \varnothing$, 又因 $\{x_0\} \cap A = \varnothing$, 因此 $(\alpha, \beta) \subset A^c$, 从而 x_0 是 $E^1 - A$ 的内点, 所以 $A^c = E^1 - A$ 是开集.

充分性 设 A 的余集 A^c 是开集, 于是对于 A^c 中每一点 x_0, 存在 x_0 的一个环境 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset A^c$, 自然 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 中没有 A 的点, 所以 x_0 不是 A 的极限点. 即 A 的极限点必属于 A, 因而 A 是闭集. 证毕.

从定理 1 中开集的基本性质, 利用 §1 的集的和通关系式 (1.1), (1.2) 及上面定理 4, 立即得到闭集的基本性质如下:

定理 5 (i) 空集和全直线是闭集;

(ii) 任意一族闭集的通集是闭集;

(iii) 有限个闭集的和集是闭集.

证 (i)是显然的,(iii)留给读者做出证明,这里只证(ii).

设$\{F_\lambda\}$是一族闭集,它们的余集$F_\lambda^c=E^1-F_\lambda$是开集.由定理1,$\bigcup_\lambda F_\lambda^c$是开集.但是由和通关系$E^1-\bigcup_\lambda F_\lambda^c=\bigcap_\lambda F_\lambda$,而且由定理4,$E^1-\bigcup_\lambda F_\lambda^c$是闭集,所以$\bigcap_\lambda F_\lambda$是闭集.

注意,(iii)中的条件"有限个"闭集不能改成"无限个"闭集.

例6 $(0,1)=\bigcup_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$.其中每一项$\left[\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n}\right]$都是闭集,而这无限多个闭集的和却是开区间$(0,1)$,它不是闭集.

既然闭集的余集是开集,那末从开集的构造可以引入余区间的概念.

定义 设A是直线上的闭集,称A的余集$A^c=E^1-A$的构成区间为A的余区间.

我们又可以得到闭集的构造如下:

定理6 直线上的闭集F或是全直线,或是从直线上挖掉有限个或可列个互不相交的开区间(即F的余区间)所得到的集.

直线上存在不开不闭的集,如区间$(\alpha,\beta]$,$[\alpha,\beta)$.直线上既开又闭的点集,只有两个,一个是空集,另一个是全直线.

事实上,如果点集A不是空集但同时既是开集又是闭集,则可证明A必是全直线.用反证法.假设A不是全直线.由于A是开集,如果A的构成区间是$\{(\alpha_n;\beta_n)\}$,那末$A=\bigcup_n(\alpha_n,\beta_n)$.由于$A$不是全直线,那末这些构成区间的端点$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$中至少有一个是有限的,设为$\alpha_1$,$\alpha_1\overline{\in}A$.但由于$(\alpha_1,\ \beta_1)\subset A$,所以$\alpha_1$是$A$的极限点,应有$\alpha_1\in A'$.又由于$A$是闭集,应有$A'\subset A$,从而必须$\alpha_1\in A$.这是矛盾.所以$A$必是全直线.

由定理5及集的运算性质,可得到下面的结果:

定理 7 开集减闭集后的差集仍是开集，闭集减开集后的差集仍是闭集.

证 设 G 是一开集而 F 是一闭集，由于

$$G-F=G\cap(E^1-F),\ F-G=F\cap(E^1-G)$$

从定理 1, 4 及 5 即得知 $G-F$ 是开集，$F-G$ 是闭集. 证毕.

闭集的最大优点是它对求极限运算是封闭的. 对于一个非闭的集，只要将它的所有极限点补充到该集上就成为闭集了. 下面来证实这一点.

定义 A 是一个点集，称 $A\cup A'$ 为 A 的闭包，记为 $\bar{A}$.

定理 8 集 A 的闭包是闭集.

证 设 x_0 是 $\bar{A}=A\cup A'$ 的极限点，今证 $x_0\in\bar{A}$. 显然不妨设 $x_0\overline{\in}A$. 根据引理 2，存在 $\bar{A}$ 中互不相同的点组成的序列 $\{x_n\}$，使得 $x_n\to x_0$. 再作 A 中序列 $\{x'_n\}$ 如下：当 $x_n\in A$ 时，取 $x'_n=x_n$；当 $x_n\overline{\in}A$（即 $x_n\in A'$）时，取 x'_n 满足 $|x'_n-x_n|<\frac{1}{n}$（显然，这是易于做到的）. 这样 A 中序列 $\{x'_n\}$ 就满足 $x'_n\neq x_0(n=1,\ 2,\ \cdots)$，而且 $x'_n\to x_0$. 再根据引理 2，$x_0\in A'\subset\bar{A}$. 证毕.

定理 9 设 A 是直线上的点集，那末 $x\in\bar{A}$ 的充要条件是 x 的每个环境 (α,β) 与 A 相交.

证 设 $x\in\bar{A}$，当 $x\in A$ 时，自然 x 的每个环境 $(\alpha,\ \beta)$ 与 A 相交；当 $x\overline{\in}A$ 时，x 必须属于 A'，对 x 的每个环境 (α,β)，$(\alpha,\beta)-\{x\}$ 与 A 相交，自然 (α,β) 也与 A 相交.

反过来，设 x_0 的每个环境 (α,β) 与 A 相交，如果 $x_0\in A$，自然 $x_0\in\bar{A}$；如果 $x_0\overline{\in}A$，那末 $((\alpha,\beta)-\{x_0\})\cap A=(\alpha,\beta)\cap A$ 不空，因此 $x_0\in A'$. 总之 $x_0\in\bar{A}$. 证毕.

顺便我们得到

定理 10 设 A 是直线上的点集，A 成为闭集的充要条件是 A

$=\bar{A}$.

证 如果 $A=\bar{A}$,那末 $A'\subset\bar{A}=A$, 所以 A 是闭集. 反过来,如果 A 是闭集,那末 $A'\subset A$,所以 $\bar{A}=A\cup A'=A$. 证毕.

5. 完全集

定义 如果 $A\subset A'$,就称 A 是**自密集**.

换句话说,当集中的每一个点都是这个集的极限点时,这个集是自密集;另一个说法就是没有孤立点的集就是自密集.

如果 $A'=A$, 称 A 是**完全集**. 完全集就是自密闭集,也就是没有孤立点的闭集.

例如闭区间$[\alpha,\beta]$$(\alpha<\beta)$, 空集及全直线都是完全集.

由孤立点的定义很容易知道, 直线上点集 A 的孤立点必是包含在 A 的余集中的某两个开区间的公共端点. 因此, 闭集的孤立点一定是它的两个余区间的公共端点. 完全集是没有孤立点的闭集,所以,完全集就是没有相邻接的余区间的闭集.

下面举一个重要的完全集的例子,后面要用来说明一些问题.

Cantor 集 将闭区间$[0,1]$三等分, 去掉中间的一个开区间 $I_1^{(1)}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$,把剩下的两个闭区间$\left[0,\frac{1}{3}\right]$,$\left[\frac{2}{3},1\right]$分别再三等分,再各去掉中间的开区间:

$$I_1^{(2)}=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right),\quad I_2^{(2)}=\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$$

余下四个闭区间

$$\left[0,\frac{1}{9}\right],\left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right],\left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right],\left[\frac{8}{9},1\right]$$

又分别把这些闭区间三等分,再各去掉其中间的开区间:

$$I_1^{(3)}=\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right)\qquad I_2^{(3)}=\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right)$$

$$I_3^{(3)}=\left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right)\qquad I_4^{(3)}=\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right)$$

(如图 1.5 所示)这样继续下去，在第 n 次三等分时去掉的开区间(称为第 n 级区间)是

$$I_1^{(n)}=\left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right),\ I_2^{(n)}=\left(\frac{7}{3^n},\ \frac{8}{3^n}\right),\ \cdots,\ I_{2^{n-1}}^{(n)}=\left(\frac{3^n-2}{3^n},\ \frac{3^n-1}{3^n}\right)$$

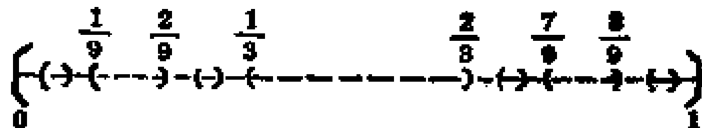


图 1.5—Cantor 疏朗完全集构造示意图

令 $O_0=\bigcup\limits_{n,\ k}I_k^{(n)}$，这是一个开集，所以 $K=[0,1]-O_0$ 是闭集，称 K 为 Cantor 集.

Cantor 集具有下面一些重要性质：

(i) Cantor 集是完全集.

事实上，K 的余区间就是 $\{I_k^{(n)}\}$，$k=1,2,\cdots,2^{n-1}$，$n=1,2,\cdots$，以及 $(-\infty,0)$、$(1,\infty)$. 这些区间显然是互不相邻的. K 既是没有相邻接的余区间的闭集，所以 K 是完全集.

(ii) Cantor 集的势是 $\aleph$.

用[0, 1]中数的二进制和三进制小数表示法来证明. 将[0, 1]先用三进位小数表示，三进位有理小数采用有限位小数表示，例如 $\frac{1}{3}$ 表示为 0.1，而不采用表示 0.222…. 显然

$$I_1^{(1)}=(0.1,\ 0.2)$$

$$I_1^{(2)}=(0.01,\ 0.02),\ I_2^{(2)}=(0.21,\ 0.22)$$

可以看出一般的第 n 级的余区间 $I_k^{(n)}(k=1,2,\cdots,2^{n-1})$ 形如

$$(0.\ a_1a_2\cdots a_{n-1}1,\ 0.\ a_1a_2\cdots a_{n-1}2)$$

其中 $a_1,\cdots,a_{n-1}$ 都只是 0 或 2. 因此，这个余区间中的实数展成三进位小数时必然形如

$$0.\ a_1\cdots a_{n-1}1a_{n+1}\cdots$$

即$[0,1]-K$中的数展成三进位小数时，其中至少有一位是1. 我们考察形如

$$x=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{3^n}+\cdots \tag{4.3}$$

的小数，其中每个系数a_n都是0或者2，这种小数全体记为A.

由于$A\subset[0,1]$，而$[0,1]-K$中的数展开成三进位小数(4.3)中a_n至少有一位是1，所以$[0,1]-K$中没有A的数，因而有$A\subset K$.

令B是$[0,1]$的二进位小数表示全体(也采用二进位有理小数的有限位小数表示). 作A到B的映照φ,

$$\varphi:\quad x=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{3^\nu}\qquad\longmapsto x'=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu}{2}\cdot\frac{1}{2^\nu},$$

$$a_\nu=0\text{ 或 }2,\ \nu=1,2,\cdots,$$

这个映照是一一对应，但B的势是$\aleph$，所以A的势也是$\aleph$. 又由$A\subset K\subset[0,1]$，立即知道K的势是$\aleph$.

(注　更一般地可以证明：直线上任何非空完全集的势为$\aleph$. 证明过程这里不写了，读者可参看[2]的第49页)

(iii) 被挖去的区间$\{I_k^{(n)}\}k=1,2,\cdots,2^{n-1}$，$n=1,2,\cdots$，的长度之和为1.

事实上，第n级区间$I_k^{(n)}$的长度是$\frac{1}{3^n}$，但第n级区间总共有2^{n-1}个. 所以被挖去的区间$\{I_k^{(n)}\}$的总长度$l=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}=1$.

6. 稠密和疏朗　我们知道，任何两个实数之间存在有理数，换句话说，任何一个实数都是有理数的极限点. 我们说这是有理数的稠密性. 一般地，我们引进下面的定义.

定义　设A, B是直线上的两个点集，如果B中每个点的任一

环境中必有 A 的点，那末称 A 在 B 中**稠密**. 当 B 是全直线时，即 A 在全直线上稠密时，称 A 是**稠密集**.

例如 $[0, 1]$ 中的有理数全体在 $[0, 1]$ 中稠密，而直线上有理数全体是稠密集.

和稠密性相对立的概念是疏朗.

定义　设 S 是直线上的点集. 如果点集 S 在每个不空的开集中都不稠密，就称 S 是**疏朗集**，或称**无处稠密集**.

显然，直线上的点集 S 是疏朗集的充要条件是在任何开区间 (α, β) 中存在开区间 $(\alpha', \beta') \subset (\alpha, \beta)$，在 (α', β') 中没有 S 中的点.

例如孤立点集 A 是疏朗的. 因为对于任意取的开区间 (α, β) 如果 (α, β) 不含有 A 的点就不需要再讨论，如果含有 A 的点 x_0，α $\alpha < x_0 < \beta$，由于 x_0 是一孤立点，必有正数 $\delta > 0$，使得 $(x_0, x_0 + \delta) \subset (\alpha, \beta)$ 而 $(x_0, x_0 + \delta)$ 中不含有 A 的点，所以 A 是疏朗的. 但是，疏朗点集并不就是孤立点集.

疏朗集 A 的余集 A^c 一定是稠密集. 事实上，若 (α, β) 是任意一个开区间，其中至少有一个子区间 (α', β') 不含 A 中的点，即 (α', β') 含有 A^c 的点，换言之，(α, β) 中含有 A^c 中的点，所以余集 A^c 是稠密集.

显然，直线上的疏朗集不能含有任何一个开区间. 反过来，如果闭集 A 不含有任何一个开区间，那末 A 必是一个疏朗集. 因为如果闭集 A 不含有开区间，那末任一开区间 (α, β) 中必含有 A 的余集 $A^c = E^1 - A$ 中的点 y，但 A^c 是开集，所以在 A^c 中存在 y 的环境 $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset (\alpha, \beta)$，即 $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ 中不含有 A 中的点. 所以 A 在 (α, β) 中不稠密，就是说 A 是疏朗集.

利用这个事实，看一看 Cantor 集 K. 显然 K 是闭集，并且不含有任何区间，因此它是一个疏朗集. 前面又说过 Cantor 集是完全集. 因此有

定理 11 Cantor 集是疏朗完全集.

所以 Cantor 集又称为 **Cantor 的疏朗完全集**. 这个例子说明不空的完全集也可以是疏朗的.

可以证明: 直线上不空的疏朗闭集成为完全集的充要条件是: 它的任何两个余区间(α, β), (α', β') 中间必夹有另一个余区间(α'', β'') (即如果 $\beta<\alpha'$, 那末必有另一个余区间(α'', β''), 使得 $\beta<\alpha''$, $\beta''<\alpha'$).

习　题

1. 证明任意点集的内点全体成一开集.

2. 证明任意点集的导集是闭集.

3. 设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的实连续函数, c 是常数. 证明点集 $\{x \mid x\in[a, b], f(x)\geq c\}$ 是闭集, 点集 $\{x \mid x\in(a, b), f(x)<c\}$ 是开集.

4. 设 $A_1, \cdots, A_n$ 是直线上的有限个集, 证明

$$(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)'=A_1'\cup\cdots\cup A_n'$$

5. 记 $A'=A^{(1)}$, $(A^{(1)})'=A^{(2)}$, $\cdots$, $(A^{(n)})'=A^{(n+1)}$. 试作一集 A, 使 $A^{(n)}$, $n=1, 2, \cdots$彼此相异.

6. 证明直线上的孤立点集必是有限集或可列集.

7. 证明每个闭集必是可列个开集的通集, 每个开集可以表示成可列个闭集的和集.

8. 设 $f(x)$是$[a, b]$ 上任一有限的实函数. 证明它的第一类不连续点全体最多是可列集.

9. 证明直线上开集全体所成的集的势是 $\aleph$.

10. 证明直线上闭集全体所成的集的势是 $\aleph$, 直线上完全集全体所成的集的势也是 $\aleph$.

11. **定义** A、B 是直线上两个点集, 如果 $A'\cap B\subset A$, 称 A **是相对于B的闭集**. 如果对任何 $x\in A$, 总有一个 x 的环境(α, β), 使得$(\alpha, \beta)\cap B\subset A$, 称 **$A$ 是相对于B的开集**.

证明: A 是相对于 B 的闭集(开集) 的充要条件是存在直线上的闭集 F (开集G), 使得 $A=B\cap F$ ($A=B\cap G$).

12. 证明求闭包运算具有下面性质：

(i) $\overline{\varnothing}=\varnothing$；　(ii) $\overline{A}\supset A$；　(iii) $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$；　(iv) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

(上述四个性质又称为 Kuratowski 闭包公理)

13. 证明 $x\in\overline{A}$ 的充要条件是存在 A 中一个序列 $\{x_n\}$，使得 $x_n\to x$.

14. 证明 $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集(即对任何闭集 F，如果 $F\supset A$，那末 $F\supset\overline{A}$)。此题等价的说法是：$\overline{A}$ 是一切包含 A 的闭集的通集。

15. **定义**　设 A 是直线上点集，x 是直线上的一点，如果在 x 的任何环境中总含有 A 中不可列无限的点，那末称 x 是 A 的凝聚点.

证明：(i) 对任何不可列无限集 A，必有凝聚点，而且在 A 中必有一个点是 A 的凝聚点.

(ii) 如果 x 是 A 的凝聚点，那末 x 是 A 的凝聚点的极限点.

(iii) 直线上闭集 F 的势除了有限、可列外必为 $\aleph$.

16. 如果直线上集 A 的导集 A' 是有限集或可列集，那末 A 必是可列集.

17. 设 A 是直线上非空闭集. 证明：如果 A 是疏朗完全点集，那末 A 的任何两个余区间之间必至少夹有另一个余区间.

18. 直线上的完全集 A，如果具有如下性质：任何两个余区间之间必至少夹有一个余区间. 问是否 A 必是疏朗的.

19. 直线上孤立点集全体的势是多大？

20. 把[0, 1]中数用十进位小数展开，十进位有理小数规定展开成有限位小数，但以 6 为尾数的有限小数规定展开为无限循环小数. 证明[0, 1]中数的一切展开中不用数字 6 的全体是完全集.

21. 证明下面几件事是等价的.

(i) A 是疏朗集；

(ii) $\overline{A}$ 不包含任何一个非空环境；

(iii) $\overline{A}$ 是疏朗集；

(iv) $\overline{A}$ 的余集 $(\overline{A})^c$ 是稠密集；

(v) 任何非空环境 (α,β) 中必有非空环境 $(\alpha',\beta')\subset(\alpha,\beta)$，使得 (α',β') 中不含 A 中的点.

22. 证明无理数全体不能表示成可列个闭集的和集.

23. 设 $\langle a,b\rangle$ 或是闭区间 $[a,b]$ 或是开区间 (a,b)，$f(x)$ 是 $\langle a,b\rangle$ 上定义的有限实函数. 证明当 $f(x)$ 是 $\langle a,b\rangle$ 上连续函数时，对任何实数 c，集 $\{x\mid x\in\langle a,b\rangle, f(x)\geqslant c\}$ 是相对于 $\langle a,b\rangle$ 的闭集；对任何实数 c，集 $\{x\mid x\in\langle a,b\rangle,$

$f(x)>c\}$是相对于$\langle a, b\rangle$的开集.

24. 是否存在[0, 1]上的如下函数，它在[0, 1] 的每个有理点上是连续的，而在[0, 1]的每个无理点上是不连续的.

25. $\{I_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$是直线上一族开区间. 如果它们的通集非空，那末它们的和集必是开区间.

26. **定义** 设$\{B_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$是一族集，如果集 M 中任何一点 a，必存在某个$B_\lambda(\lambda\in\Lambda)$，使得 a 是集 B_λ 的内点，那末称$\{B_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 是M的**覆盖**. 特别，如果$\{B_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$中每个 B_λ 是开集，那末称$\{B_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$是$M$的**开覆盖**.

设F是直线上有界闭集，$\{B_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 是F的一个覆盖. 证明，必存在$\{B_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 中的有限个集 $B_{\lambda_1}, \cdots, B_{\lambda_n}$，使得$\{B_{\lambda_i}, i=1, 2, \cdots n\}$ 也成为F的覆盖(此为直线上 Borel 覆盖定理的一般形式)

27. (Lindelöf, Young 定理)设A是直线上的一个集，$\{B_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 是A的一个覆盖. 证明，必存在$\{B_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$中(最多是)可列个集$\{B_{\lambda_n}, n=1, 2, \cdots\}$，使得$\{B_{\lambda_n}\}$成为$A$的覆盖.

28. **定义** 设$\{F_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$是一族集，如果任取有限个集$F_{\lambda_1}, \cdots, F_{\lambda_n}$，总有$\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_{\lambda_i}\neq\varnothing$，那末称$\{F_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$是**联族**.

证明：如果$\{F_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$是联族，并且每个$F_\lambda(\lambda\in\Lambda)$是有界闭集，那末$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\neq\varnothing$.

§5 实数理论和极限论

本节内容是给读者参考的.

1. 实数理论 上面一节，整个理论是建立在实数直线的连续性的基础上. 但是，关于实数直线本身的连续性的理论，并未说明. 下面我们以有理数为基础来建立实数的理论. 尽管人们早就在应用实数——有理数或无理数，然而什么是实数？这个问题直到十九世纪后半叶才得到严格解决. 这方面的理论大体分为两类，一类由 Cantor(1872)，梅籁(Ch. Me'ray, 1869)和魏尔斯特拉斯(Weierstrass, 1860)分别获得的，他们的形式虽略有差异，但实质上是差不多的，这就是下面所要介绍的，这种方法具有普遍意义. 另一类是戴德金特(Dedekind, 1872)的理论. 关于这个理论以及这两种理论的统一可参看[1].

定义　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 都是有理数．假如对于任意的正有理数 ε，有自然数 N，使得当 $n, m \geq N$ 时不等式

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \tag{5.1}$$

成立，就称 $\{a_n\}$ 是**基本有理数列**．

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个基本有理数列，若对任一正有理数 ε，有自然数 N，使得当 $n \geq N$ 时不等式

$$|a_n - b_n| < \varepsilon \tag{5.2}$$

成立，就称基本有理数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 相等，记做 $\{a_n\} = \{b_n\}$．

我们称基本有理数列是一个**实数**．规定相等的基本有理数列是同一个实数．

引理 1　基本有理数列 $\{a_n\}$ 是有界的，即有一个有理数 M，使得对一切自然数 n，成立着

$$|a_n| \leq M$$

证　因为 $\{a_n\}$ 是基本有理数列，所以对 $\varepsilon = 1$ 有自然数 N，使得当 $n \geq N$ 时 (5.1) 成立，即

$$|a_n - a_N| < 1$$

从而当 $n \geq N$ 时有

$$|a_n| < |a_N| + 1$$

令 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N| + 1\}$，那末 M 是有理数，而且对一切自然数 n 都有

$$|a_n| \leq M$$

证毕．

引理 2　(i) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是两个基本有理数列，那末 $\{a_n + b_n\}$，$\{a_n b_n\}$ 都是基本有理数列．

(ii) 如果 $\{a_n\}$，$\{a'_n\}$，$\{b_n\}$ 和 $\{b'_n\}$ 都是基本有理数列，而且

$$\{a_n\} = \{a'_n\},\quad \{b_n\} = \{b'_n\}$$

必有 $\{a_n + b_n\} = \{a'_n + b'_n\}$，$\{a_n b_n\} = \{a'_n b'_n\}$．

证　由引理 1，有正有理数 A，使得对一切自然数 n 成立着

$$|a_n| < A,\quad |a'_n| < A,\quad |b_n| < A,\quad |b'_n| < A$$

设 ε 是一个正有理数，有自然数 N 使得不等式

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2A},\qquad |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2A}$$

$$|a_n - a'_n| < \frac{\varepsilon}{2A},\qquad |b_n - b'_n| < \frac{\varepsilon}{2A}$$

对一切 $n, m \geq N$ 成立. 那末当 $n, m \geq N$ 时,

$$|a_n b_n - a_m b_m| = |a_n(b_n - b_m) + b_m(a_n - a_m)|$$
$$\leq A|b_n - b_m| + A|a_n - a_m| < \varepsilon$$

所以 $\{a_n b_n\}$ 是基本有理数列. 又当 $n \geq N$ 时,

$$|a_n b_n - a'_n b'_n| = |a_n(b_n - b'_n) + b'_n(a_n - a'_n)|$$
$$\leq A|b_n - b'_n| + A|a_n - a'_n| < \varepsilon$$

所以 $\{a_n b_n\} = \{a'_n b'_n\}$.

其余的部分也可以类似地证明.

利用引理 2 可以规定实数的运算如下:

定义 设 $a = \{a_n\}$, $b = \{b_n\}$ 是两个实数, 称实数 $\{a_n + b_n\}$ 为"a 加 b 的和", 记做 $a+b$; 称 $\{a_n b_n\}$ 为"a 乘 b 的积", 记做 $a \cdot b$ 或 ab.

引理 2 说明了 $a+b$, $a \cdot b$ 确是实数, 而且有确定的意义, 就是说, 如果 $a = a'$, $b = b'$, 那末必然 $a+b = a'+b'$, $a \cdot b = a' \cdot b'$.

容易证明下面的定理:

定理 1 实数全体 E^1 按照上述的加法及乘法成为一个域, 换句话说, E^1 具有下面各项性质:

1° E^1 按照加法成一交换群:

(i) 当 $a, b \in E^1$ 时, $a+b \in E^1$;

(ii) 加法结合律: 如果 $a, b, c \in E^1$, 那末

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

(iii) 存在零元素 $\{0, 0, \cdots, 0, \cdots\} \in E^1$, 记做 0, 对一切 $a \in E^1$,

$$a + 0 = a$$

(iv) 对于每一个 $a \in E^1$, 有负元素 $-a \in E^1$, 使得

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

(v) 加法交换律: 若 $a, b \in E^1$, 那末 $a+b = b+a$;

2° E^1 中的非零元素全体按照乘法成一交换群:

(i) 当 $a, b \in E^1$ 时, $a \cdot b \in E^1$;

(ii) 乘法结合律: 如果 $a, b, c \in E^1$, 那末 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

(iii) 存在单位元素 $1 (= \{1, 1, \cdots\}) \in E^1$, 使一切 $a \in E^1$

$$a \cdot 1 = a$$

(iv) 如果 $a \in E^1$ 而且 $a \neq 0$, 那末必有(乘法)逆元素 $a^{-1} \in E^1$, 使得

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

(v) 乘法交换律：对任意的 $a, b\in E^1$，有 $a\cdot b=b\cdot a$；

3° 乘法与加法之间的分配律：如果 $a, b, c\in E^1$，那末

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

证 我们只证明 2° 的(iv)和 3°。

先对于实数 $a\neq 0$，证明存在逆元素 $a^{-1}\in E^1$，使得

$$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$$

设 $a=\{a_n\}\in E^1$，$a\neq 0$，那末必存在正有理数 ε，在区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中最多只有 $\{a_n\}$ 中的有限项。(不然的话，对每个正有理数 ε，在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中有 $\{a_n\}$ 的无限项：$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$ 即 $|a_{n_k}|<\varepsilon$，但是 $\{a_n\}$ 是基本数列，有自然数 N 使得当 $n, m\geqslant N$ 时 (5.1) 成立，取一个 $n_k\geqslant N$，那末就知道当 $n\geqslant N$ 时

$$|a_n|\leqslant|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}|<2\varepsilon$$

这样一来 $a=0$。) 设当 $n\geqslant N_\varepsilon$ 时，$|a_n|\geqslant\varepsilon$。规定 $a^{-1}=\{a'_n\}$ 如下：$a'_1, a'_2, \cdots, a'_{N_\varepsilon-1}$ 任意取定，而当 $n\geqslant N_\varepsilon$ 时，令 $a'_n=\dfrac{1}{a_n}$。现在证明 $\{a'_n\}$ 是基本有理数列。事实上，当 $n, m\geqslant N_\varepsilon$ 时，

$$|a'_n-a'_m|=\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_m}\right|=\frac{|a_n-a_m|}{|a_na_m|}$$

由于对任意的正有理数 η，存在自然数 N'，使得当 $n, m\geqslant N'$ 时，$|a_n-a_m|<\eta\varepsilon^2$。又当 $n, m>N_\varepsilon$ 时，$|a_na_m|\geqslant\varepsilon^2$，从而当 $n, m\geqslant\max(N', N_\varepsilon)$ 时成立

$$|a'_n-a'_m|=\frac{|a_n-a_m|}{|a_na_m|}<\frac{\eta\varepsilon^2}{\varepsilon^2}=\eta$$

所以 $\{a'_n\}$ 是基本有理数列，因此 $a^{-1}=\{a'_n\}\in E^1$，由于

$$a^{-1}\cdot a=a\cdot a^{-1}=\{a_1a'_1, \cdots, a_Na'_N, 1, \cdots, 1, \cdots\},$$

这个数列中从第 N 项以后全是 1，它等于 $\{1, \cdots, 1, \cdots\}=1$，因此

$$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$$

现在来证明 3°。设 $a=\{a_n\}, b=\{b_n\}, c=\{c_n\}$。于是

$$b+c=\{b_n+c_n\},\quad a\cdot b=\{a_n\cdot b_n\},\quad a\cdot c=\{a_n\cdot c_n\}$$

从而

$$\begin{aligned}a\cdot(b+c)&=\{a_n(b_n+c_n)\}=\{a_n\cdot b_n+a_n\cdot c_n\}\\&=\{a_n\cdot b_n\}+\{a_n\cdot c_n\}=a\cdot b+a\cdot c\end{aligned}$$

其余各项请读者自己证明。证毕。

我们简记 $a+(-b)=a-b$，称为 a 减 b 的差。容易明白：$0-a=-a$。

当 $b\neq 0$ 时，简记 $a\cdot b^{-1}=\frac{a}{b}$（或 a/b），称为 a 除以 b 的商，或称为 a 与 b 的比值，也可记做 $a:b$.

容易看出，如果 $a=\{a_n\}$，$b=\{b_n\}$，那末 $a-b=\{a_n-b_n\}$；当 $b\neq 0$，并且一切 b_n 全不为 0 时，$a/b=\{a_n/b_n\}$.

上面规定好了实数的运算，下面来规定实数的顺序.

定义 设 $a=\{a_n\}$，$b=\{b_n\}$ 是两个实数，假如有正有理数 δ 和自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，

$$a_n-b_n>\delta$$

那末称 b 小于 a，记作 $b<a$；或称 a 大于 b，记为 $a>b$.

容易证明，若基本有理数列 $\{a_n\}=\{a'_n\}$，$\{b_n\}=\{b'_n\}$，那末当 $\{a_n\}<\{b_n\}$ 时，$\{a'_n\}<\{b'_n\}$，所以 $a<b$ 有确定的意义.

定理 2 设 a，b 是两个实数，那末三个关系

$$a=b,\quad a<b,\quad a>b$$

必有一个成立，而且只有一个成立.

证 因为 $a=\{a_n\}$，$b=\{b_n\}$ 都是基本有理数列，所以对于任一正有理数 ε，有正整数 $N=N_\varepsilon$，使得当 $m\geqslant N$ 时有

$$|a_m-a_N|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |b_m-b_N|<\frac{\varepsilon}{2}$$

因此

$$|a_m-b_m-(a_N-b_N)|<\varepsilon$$

也就是

$$a_N-b_N-\varepsilon<a_m-b_m<a_N-b_N+\varepsilon \tag{5.3}$$

假如有一个 ε 使得上式两端 $a_N-b_N-\varepsilon$ 及 $a_N-b_N+\varepsilon$ 同号，譬如说是正号，那末只要令 $a_N-b_N-\varepsilon=\delta$，当 $m\geqslant N$ 时

$$a_m-b_m>\delta$$

这就是说，$a>b$. 类似地如果(5.3)两端同时为负号，可证 $b>a$. 如果对一切正有理数 ε，(5.3)两端异号，就是

$$a_N-b_N-\varepsilon<0,\quad a_N-b_N+\varepsilon>0$$

即

$$|a_N-b_N|<\varepsilon$$

因此，由(5.3)，对每个正有理数 ε，有自然数 N，使当 $m\geqslant N$ 时，

$$|a_m-b_m|<\varepsilon+|a_N-b_N|<2\varepsilon$$

这就证明了 $a=b$.

所以 $a=b$，$a<b$ 或 $a>b$ 三个不等式至少有一个成立. 至于上述关系不

可能有两个同时成立，容易从定义直接验证．证毕．

此外还可以证明，实数的顺序与代数运算之间有下面的基本关系：

定理 3 设 a, b, c 是三个实数，如果 $a<b$，那末 $a+c<b+c$，如果又有 $0<c$，那末 $a\cdot c<b\cdot c$．

特别地，$a>0$ 与 $-a<0$ 是等价的．

定义 大于 0 的实数称为**正数**，小于 0 的实数称为**负数**．

设 a 是一实数，记 $|a|$ 为如下的实数：当 $a\geqslant 0$ 时，$|a|=a$；当 $a<0$ 时，$|a|=-a$．称 $|a|$ 为实数 a 的**绝对值**．

容易证明：如果 $\{a_n\}$ 是基本有理数列，$a=\{a_n\}$，那末 $|a|=\{|a_n|\}$．因此，a 的绝对值 $|a|$ 有确定的意义．

由定理 3 易知

定理 4 设 a 和 b 是实数，那末 $|ab|=|a|\cdot|b|$，并且

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

我们还要把有理数和一部分实数等同起来．对任何有理数 r，显然

$$\tilde{r}=\{r, r, \cdots, r, \cdots\}$$

是一个基本有理数列，即是一个实数，称 $\tilde{r}$ 是相应于有理数 r 的实数．记 R_0 为有理数全体，$\tilde{R}_0$ 是相应于有理数的实数全体．容易看出映照

$$r\longmapsto\tilde{r}$$

是 R_0 与 $\tilde{R}_0$ 间的一一对应，而且在这个映照下，代数运算和"大小"顺序关系保持不变，就是说：

$$\widetilde{(r_1+r_2)}=\tilde{r}_1+\tilde{r}_2,\quad \widetilde{r_1\cdot r_2}=\tilde{r}_1\cdot\tilde{r}_2$$

$$r_1<r_2 \quad \text{蕴涵}\ \tilde{r}_1<\tilde{r}_2.$$

我们今后就把 r 和 $\tilde{r}$ 等同起来．这是可以的，因为对于实数来说，只要代数运算和大小顺序没有改变就行了．这样一来，有理数就是实数的一部分了．

我们来证明有理数在实数中是处处稠密的，就是要证明任何两个实数中间必有有理数．

定理 5 设 a, b 是两个实数，$a<b$，那末必有有理数 $\tilde{c}$ 适合

$$a<\tilde{c}<b$$

证 设 $a=\{a_n\}$，$b=\{b_n\}$，由于 $\{a_n\}<\{b_n\}$，必有正有理数 δ 和自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时有

$$b_n-a_n>\delta$$

又因为 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 是基本数列，必有 $N_1\geqslant N$，使得当 $m, n\geqslant N_1$ 时，

$$|a_n-a_m|<\frac{\delta}{4}, \quad |b_n-b_m|<\frac{\delta}{4}$$

取 $b_{N_1}-\frac{\delta}{2}=c$，这是有理数，并且当 $m\geqslant N_1$ 时有

$$b_m-c=b_m-b_{N_1}+\frac{\delta}{2}>-\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{2}=\frac{\delta}{4}>0$$

所以$\{b_m\}>\{c\}$；又当 $m\geqslant N_1$ 时，

$$c-a_m=b_{N_1}-a_{N_1}+(a_{N_1}-a_m)-\frac{\delta}{2}>\delta-\frac{\delta}{4}-\frac{\delta}{2}=\frac{\delta}{4}>0$$

即$\{c\}>\{a_m\}$．证毕。

在转入讨论实数的极限论之前，先说明一个问题：现在建立实数的方法是把有理数作为已知，而把一列有理数（当然不是一般的，而是构成基本序列的有理数序列）就称为一个实数。这种把一列数规定作为一个数是否太奇怪呢？其实，这并不奇怪．例如，在人们知道了自然数后，发现它对减法运算不封闭，如果要对减法运算封闭，就需要出现 $0-n$ 这种形式的数，即负数，记为 $-n$．再如人们发现自然数对除法运算不封闭，因而需要出现用自然数对 (m, n) 规定为一个数，即有理数，记为$\frac{m}{n}$．而实数理论正是由于极限运算的出现（仅管早在毕达哥拉斯时代已出现个别的非有理数的数，但那时，作为求极限的运算远未出现），例如一个单调增加的数列，如果有上界，是否一定有极限．这个问题，从几何的直观，似乎是显而易见地肯定对的．但如果要求给出严格的逻辑证明却又发生困难．这样就必须要有严格的实数理论，给极限论有坚实的基础．Cantor 提出的这种用一列数来规定一个数的思想不仅为实数建立了严格的理论，而且这个思想方法已被泛函分析和其它学科推广了．例如本书第四章中还将采用这种方法讨论度量空间的完备化问题．

2．关于实数列的极限理论 现在利用上面建立的实数理论，来证明极限理论中的几个基本定理。

定义 设$\{a_n\}$是一实数列．如果有实数 a 适合如下的条件：对于任何正实数 ε，有自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时成立

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

那末称实数列$\{a_n\}$收敛于极限 a，记做 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$．

定理6 数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：对于任一正（实）数 ε，有自然数 N，使得当 $n, m\geqslant N$ 时

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

这就是著名的柯西(Cauchy)收敛原理.

证 必要性是显然的,我们只要证明条件的充分性. 为便于理解, 在下面的证明过程中, 暂时仍然把有理数和对应于有理数 r 的实数 $\tilde{r}=\{r\}$ 区别开来.

充分性的证明: 对于实数 a_n, 有有理数 x_n, 使相应的实数 $\tilde{x}_n$ 适合

$$a_n < \tilde{x}_n < a_n + \widetilde{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

对于任一正有理数 δ, 由假设, 必有自然数 $N\left(不妨取 N>\frac{4}{\delta}\right)$, 使得当 $n, m \geq N$ 时,

$$|a_n - a_m| < \widetilde{\left(\frac{\delta}{4}\right)}$$

于是当 $n, m \geq N$ 时,

$$|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m| \leq |\tilde{x}_n - a_n| + |a_m - \tilde{x}_m| + |a_n - a_m|$$

$$\leq \widetilde{\left(\frac{1}{n}\right)} + \widetilde{\left(\frac{1}{m}\right)} + \widetilde{\left(\frac{\delta}{4}\right)} < \widetilde{\left(\frac{3\delta}{4}\right)}$$

但是 $|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m| = \widetilde{|x_n - x_m|}$, 所以, 当 $n, m \geq N$ 时,

$$|x_n - x_m| < \frac{3\delta}{4} \tag{5.4}$$

即 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 是基本有理数列, 它就是一个实数, 记做 a. 现在来证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

因为

$$|a - \tilde{x}_n| = \{|x_1 - x_n|, |x_2 - x_n|, \cdots, |x_k - x_n|, \cdots\}$$

由(5.4)容易看出, 当 $k, n \geq N$ 时,

$$\delta - |x_k - x_n| > \frac{\delta}{4} > 0$$

所以当 $n \geq N$ 时

$$|a - \tilde{x}_n| < \tilde{\delta}$$

对于任何正实数 ε, 取有理数 δ 适合 $0 < 2\tilde{\delta} < \varepsilon$, 那末当 $n \geq N$(仍然 $N > \frac{4}{\delta}$)时,

$$|a-a_n|\leqslant|a-\tilde{x}_n|+|\tilde{x}_n-a_n|<\tilde{\delta}+\widetilde{\left(\frac{1}{n}\right)}<2\delta<\varepsilon$$

即 $\lim a_n=a$. 证毕.

定理 7 设$\{a_n\}$是单调增加的实数列:

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots$$

而且$\{a_n\}$是有上界的, 那末$\{a_n\}$必收敛.

证 (用反证法)假设$\{a_n\}$不收敛. 根据定理 6, 那末必存在某个正数ε_0, 使得对于任意选取的自然数 N, 不等式

$$|a_n-a_m|<\varepsilon_0$$

不能对一切大于或等于N的 n, m都成立. 于是, 当取 $N=1$ 时, 必有自然数 $n_1, m_1\geqslant 1$ 使得

$$|a_{n_1}-a_{m_1}|\geqslant\varepsilon_0$$

不妨假设 $n_1>m_1$; 取 $N=n_1+1$, 必有 $n_2, m_2\geqslant n_1+1$ 使得

$$|a_{n_2}-a_{m_2}|\geqslant\varepsilon_0$$

不妨设 $n_2>m_2$. 这样继续下去, 可以得到自然数列

$$m_1<n_1<m_2<n_2<\cdots<m_k<n_k<\cdots$$

使得$|a_{n_k}-a_{m_k}|\geqslant\varepsilon_0$. 但由于$\{a_n\}$是单调增加数列, 有 $a_{n_k}>a_{m_k}$, 所以

$$|a_{n_k}-a_{m_k}|=a_{n_k}-a_{m_k}\geqslant\varepsilon_0.$$

从而得到

$$a_{n_k}\geqslant a_{m_k}+\varepsilon_0\geqslant a_{n_{k-1}}+\varepsilon_0\geqslant a_{m_{k-1}}+2\varepsilon_0\geqslant\cdots\geqslant a_{m_1}+k\varepsilon_0$$

对于任意给定的正数 a, 取 k 充分大, 可使得 $a_{m_1}+k\varepsilon_0>a$, 这样一来, 得到

$$a_{n_k}>a$$

这和$\{a_n\}$是有上界的假设相矛盾. 所以$\{a_n\}$收敛. 证毕.

定理 8 设 $I_n=[a_n, b_n]$, $n=1, 2, \cdots$是一列单调下降的闭区间

$$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$$

并且它们的长度趋于0, 即$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,那末必有唯一的实数$a\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$, 而且

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$$

证 容易看出, 各区间的端点之间有着顺序关系:

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots\leqslant b_n\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1 \tag{5.5}$$

所以$\{a_n\}$是一列单调增加且有上界数列，由定理 7，必存在极限 $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. 又由$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, 立即得知$\{b_n\}$也收敛并且$a=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 由(5.5)知道$a_n\leqslant a\leqslant b_n$ 对一切自然数 n 成立。所以 $a\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$. 显然 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$只含有 a 这一个点. 证毕.

这就是有名的 Cantor 区间套定理.

现在我们用区间套定理来证明关于数集上确界的存在定理.

定理 9 直线上不空的点集必存在唯一的上确界.

证 我们只要考察直线上不空的有上界点集 A 好了. 这时有K, 使得任一 $x\in A$ 适合 $x\leqslant K$. 任意取定一个 $a\in A$. 显然有 A 中的点(例如 a)落在区间$[a, K]$里面. 记 $a_1=a, b_1=K$. 把区间$[a_1, b_1]=[a, K]$二等分成为两个闭区间$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$, 其中必至少有一区间内有 A 中的点. 如果两个小区间都有 A 中的点, 那末取右边一个小区间, 记之为$[a_2, b_2]$. 如果右边的区间里面没有 A 中的点, 就把右边那个区间丢掉, 而令左边的区间为$[a_2, b_2]$, 那末 A 中的数都$\leqslant b_2$ 而且$[a_2, b_2]$中有 A 的数. 这样地继续平分下去于是得到单调下降的闭区间列

$$I_n=[a_n, b_n],\quad I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$$

并且$b_n-a_n=\frac{1}{2^{n-1}}(b_1-a_1)\to 0\ (n\to\infty)$, 而且 A 中的数都$\leqslant b_n$, $[a_n, b_n]$中有 A 的数. 根据区间套定理, 有唯一的实数$M=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

我们来证明$M=\sup A$. 对每个 $x\in A$, 有 $x\leqslant b_n$, 令 $n\to\infty$ 就得到$x\leqslant M$. 又对于任何正数 ε, 必有 $a_n>M-\varepsilon$. 因为有 $x\in A\cap[a_n, b_n]$, 所以有 A 中的数 $x>M-\varepsilon$. 因此M是 A 的上确界.

上确界的唯一性是显然的. 证毕.

同样对下确界有

定理 9′ 直线上不空的集 B 有唯一的下确界.

这个定理也可以由 B 作集 $A=\{x|x=-y, y\in B\}$, 再利用定理 9 来证明。

点集 A 的上确界(下确界)不一定属于 A.

落在某个有限区间中的点集(数列)叫作**有界集**(数列).

定理 10(Bolzano-Weierstrass) 任何有界数列必有收敛子数列.

证 设数列$\{x_n\}$是有界的, 即有正数N, 使得$\{x_n\}\subset[-N, N]$. 于是在

两个区间$[-N,0]$，$[0,N]$中必有一个含有$\{x_n\}$中的无限多项，记这个区间为I_1（如果两个区间同时含有$\{x_n\}$中无限多项，那末任意取一个作为I_1）。譬如说$I_1=[0,N]$，将I_1等分为二：

$$\left[0,\frac{N}{2}\right],\ \left[\frac{N}{2},\ N\right]$$

选其中含有$\{x_n\}$中无限多项的一个，记为I_2。如此继续下去，得到一列闭区间$I_1, I_2, \cdots, I_m, \cdots$，其中每个$I_m=[a_m, b_m]$含有$\{x_n\}$中无限项，它们适合

$$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_m\supset\cdots$$

而且其长度$\frac{N}{2^{m-1}}$趋于0（$m\to\infty$）。由区间套定理，有$a\in\bigcap_{m=1}^{\infty}I_m$，

$$a=\lim_{m\to\infty}a_m=\lim_{m\to\infty}b_m$$

因为每个I_m中含有$\{x_n\}$中无限多项，取$x_{n_1}\in I_1$，再取$n_2>n_1$且$x_{n_2}\in I_2$，如此下去，那末有$\{x_n\}$的子数列$\{x_{n_k}\}$适合$x_{n_k}\in I_k$，即

$$a_k\leqslant x_{n_k}\leqslant b_k,\ k=1, 2, \cdots.$$

所以$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$。证毕。

定义 设D是直线上的点集，$\mathscr{F}$是一族开区间。如果

$$\bigcup_{(\alpha,\beta)\in\mathscr{F}}(\alpha,\beta)\supset D$$

就说区间族$\mathscr{F}$覆盖D。

定理 11（Heine-Borel） 设$\mathscr{F}$是一族开区间，覆盖着有界闭集F。那末必可以从$\mathscr{F}$中选取有限个开区间来覆盖F。

证 用反证法。设$F\subset[a,b]$。如果$\mathscr{F}$中任意有限个开区间不能覆盖F，将$[a,b]$等分为二，得$I_{11}=\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，$I_{12}=\left[\frac{a+b}{2},b\right]$，其中至少有一个与$F$的通集不空，记$F_{11}=F\cap I_{11}$，$F_{12}=F\cap I_{12}$，这都是闭集。这时$F_{11}$和$F_{12}$中必有一个，设为$F_{11}$使得$\mathscr{F}$中任意有限个开区间都不能覆盖$F_{11}$。因为不然的话，如果$\mathscr{F}$中有两组有限个开区间就能分别覆盖$F_{11}$和$F_{12}$，那末有限个也就能覆盖$F$。记$F=F_1$，$F_{11}=F_2$，就是说，$F_1$，$F_2$都不能用$\mathscr{F}$中有限个开区间予以覆盖。重复这个手续，就会得到一列有界闭集$F_1\supset F_2\supset\cdots$，它们分别包含在闭区间$I_1\supset I_2\supset\cdots$中，$I_k=[a_k,b_k]$，而且每个$F_k=F\cap I_k$，（$k=1,2,\cdots$）都不能被$\mathscr{F}$中有限个开区间覆盖。由于$I_k$的长度$|I_k|=\frac{1}{2^{k-1}}(b-a)\to0\,(k\to\infty)$，有

唯一的$a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$. 因为$F_k\neq\varnothing$, 有$x_k\in F_k$. 由$a_k\leqslant x_k\leqslant b_k$, 得到$x_k\to a$. 由于$\{x_k\}\subset F$, 而且$F$是闭集, 因此$a\in F$.

因为$\mathscr{F}$覆盖F, 有$(\alpha,\beta)\in\mathscr{F}$使$a\in(\alpha,\beta)$, 当$k$充分大时, $I_k\subset(\alpha,\beta)$, 从而$F_k\subset I_k\subset(\alpha,\beta)\in\mathscr{F}$, 这说明$\mathscr{F}$中有一个开区间$(\alpha,\beta)$就能覆盖$F_k$, 这是矛盾. 证毕.

下面我们要拓广实数列收敛的意义, 这里允许它收敛到$\pm\infty$.

定义　设$\{x_n\}$是一列实数, 如果对任何数A必有自然数N使得当$n\geqslant N$时$x_n>A$, (相应地$x_n<A$) 就称$\{x_n\}$收敛于∞, 记为$x_n\to\infty$. (相应地, $\{x_n\}$收敛于$-\infty$, 记为$x_n\to-\infty$.)

拓广了极限的概念后, 可以解除一些定理中关于数列有界或有上界或有下界的限制.

定理 7′　单调数列必有极限(允许极限是$\pm\infty$).

证　例如, 设$\{a_n\}$是单调增加数列. 如果$\{a_n\}$有上界, 定理7已讨论过. 如果$\{a_n\}$没有上界, 那末对每个自然数k, 必有$\{a_n\}$中的$a_{n_k}>k$. 我们在挑选n_k时注意到使得$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$, 那末$\{a_{n_k}\}$收敛于$\infty$. 再由$\{a_n\}$的单调增加性, 易知$\{a_n\}$也收敛于$\infty$. 证毕.

定理 10′　任何数列必有收敛(允许收敛于$\pm\infty$)子数列.

证　如果数列$\{x_n\}$是有界的, 由定理10, 它必有收敛子数列. 如果数列$\{x_n\}$是无界的, 那末对每个自然数k, N, 必有x_{n_k}, $n_k>N$, $|x_{n_k}|>k$. 从而存在$\{x_{n_k}\}$, $|x_{n_k}|>k$, 并且$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$. 子数列$\{x_{n_k}\}$中必有无限个是同符号的数, 例如$\{x_{n_{k_j}}\}$是$\{x_{n_k}\}$的取正号(或负号)的子数列, 立即知道$x_{n_{k_j}}\to\infty$(或$-\infty$). 证毕.

下面讨论实数列的上限和下限. 随着收敛概念被推广到允许极限值是$\pm\infty$, 自然, 数集A的上确界$\sup A$、下确界$\inf A$也可推广到允许取$\pm\infty$.

如果数集A中, 可取出一个收敛于∞的数列, 这时规定$\sup A=\infty$; 如果A中取不出收敛于∞的数列, 这时$\sup A$的定义和从前一样. 同样, 如果A中可取出一个收敛于$-\infty$的数列时, 这时规定$\inf A=-\infty$; 如果A中取不出收敛于$-\infty$的数列, $\inf A$的定义和从前一样.

引理 3　设$\{x_n\}$是一列实数. 那末

$$\sup_n x_n=\lim_{m\to\infty}\max(x_1,\cdots,x_m)\tag{5.6}$$

$$\inf_n x_n=\lim_{m\to\infty}\min(x_1,\cdots,x_m) \tag{5.7}$$

证 记 $M=\sup_n x_n$, $y_m=\max(x_1,\cdots,x_m)$. 显然$\{y_m\}$是单调增加的数列，它是有极限的. 如果$M=\infty$, 那末, 根据定义, 必有子数列$\{x_{n_k}\}$, 使得$x_{n_k}\to\infty$. 由于$y_{n_k}\geqslant x_{n_k}$, 所以$y_{n_k}\to\infty$, 从而(5.6)成立. 如果 $M<\infty$, 那末, 根据定义, 一切$x_n\leqslant M$, 从而$y_m\leqslant M$. 因此

$$\lim_{m\to\infty}y_m\leqslant M \tag{5.8}$$

反过来, 对任何$\varepsilon>0$, 必有某个x_n, 使得$x_n>M-\varepsilon$, 所以当$m\geqslant n$时, $y_m>M-\varepsilon$. 这样又得到

$$\lim_{m\to\infty}y_m\geqslant M-\varepsilon$$

令$\varepsilon\to0$, 注意到(5.8), 立即可知(5.6)成立.

同样可证(5.7). 证毕.

定义 $\{x_n\}$是一列实数, 它的所有收敛(允许收敛于$\pm\infty$)的子数列的极限值中最小(最大)值称为$\{x_n\}$ **的下限(上限)**, 记作$\varliminf_{n\to\infty}x_n$($\varlimsup_{n\to\infty}x_n$), 或记作$\liminf_n x_n$($\limsup_n x_n$).

按定义, 显然下式成立:

$$\inf_n x_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}x_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}x_n\leqslant\sup_n x_n \tag{5.9}$$

例:

1. 对于$\{1,\frac{1}{2},3,\frac{1}{4},\cdots,n^{(-1)^{n-1}},\cdots\}$, $\varlimsup_{n\to\infty}x_n=\infty$, $\varliminf_{n\to\infty}x_n=0$.
2. 对于$\{1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\}$, $\varlimsup_{n\to\infty}x_n=\infty$, $\varliminf_{n\to\infty}x_n=-\infty$.
3. 对于$\{1!,2!,3!,\cdots,n!,\cdots\}$, $\varliminf_{n\to\infty}x_n=\varlimsup_{n\to\infty}x_n=\infty$.
4. 对于$\left\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$, $\varliminf_{n\to\infty}x_n=\varlimsup_{n\to\infty}x_n=\lim_n x_n=0$.

关于数列的上、下限有下面的一些基本性质:

定理 12 (i) 任何实数列$\{x_n\}$的上、下限必存在, 并且

$$\varliminf_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\min(x_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+m}) \tag{5.10}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\max(x_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+m}) \tag{5.11}$$

(ii) $\{x_n\}$为收敛的数列的充要条件是

$$\varlimsup_{n\to\infty}x_n=\varliminf_{n\to\infty}x_n \tag{5.12}$$

(iii) 设 $\{y_n\}$ 是收敛数列，在下式右边有确定意义（即不出现 $\infty+(-\infty)$，或 $-\infty+\infty$ 这种不定形式）时，有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n \tag{5.13}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n \tag{5.14}$$

(iv) 在下式左边有确定意义（即不出现 $\infty+(-\infty)$ 或 $-\infty+\infty$ 这种不定形式）时，有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n) \tag{5.15}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n) \tag{5.16}$$

(v) $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 是两个数列，如果 $x_n\leqslant y_n\ (n=1,2,\cdots)$，那末

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}x_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n \tag{5.17}$$

(vi) α 是正数，β 是负数，那末

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha x_n=\alpha\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\alpha x_n=\alpha\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n \tag{5.18}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\beta x_n=\beta\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\beta x_n=\beta\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n \tag{5.19}$$

证 (i) 第一步先证明 (5.10) 右边的二次极限确实存在。为方便起见，记

$$G_{n,m}=\min(x_n,x_{n+1},\cdots,x_m)$$

固定 n 时，数列 $\{G_{n,m}\,|\,m=1,2,\cdots\}$ 是单调下降的。根据定理 $7'$ 它必有极限，把它的极限（可以是 $-\infty$）记为

$$G_n=\lim_{m\to\infty}G_{n,m}$$

根据引理 3，$G_n=\inf\limits_{k\geqslant n}x_k$。由于集 $\{x_k\,|\,k\geqslant n\}\supset\{x_k\,|\,k\geqslant n+1\}$，所以前者的下确界不大于后者的下确界，所以数列 $\{G_n\}$ 又是单调增加的，再用定理 $7'$，它的极限存在（也可以是 $\pm\infty$），记为 $G=\lim\limits_{n\to\infty}G_n$。那末

$$G=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\min(x_n,x_{n+1},\cdots,x_m)$$

存在。

第二步证明 G 是 $\{x_n\}$ 的某个收敛子数列的极限。

首先，由于 $G_n=\inf\limits_{k\geqslant n}x_k$，对每个 n，必有 $k_n\ (\geqslant n)$ 使得

$$\text{当 } G_n>-\infty \text{ 时},\ G_n\leqslant x_{k_n}<G_n+\frac{1}{n}, \tag{5.20}$$

$$\text{当 } G_n=-\infty \text{ 时},\ x_{k_n}<-n. \tag{5.21}$$

因为 $k_n \to \infty$，可以从中取出一个子列

$$k_{n_1} < k_{n_2} < \cdots < k_{n_\nu} < \cdots$$

使得这样一列 $\{n_\nu\}$ 或是都成立(5.20)，或是都成立(5.21)。如果(5.20)都成立，那末

$$G = \lim_{\nu\to\infty} G_{n_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} x_{k_{n_\nu}}$$

如果(5.21)都成立，那末

$$G = \lim_{\nu\to\infty} G_{n_\nu} = -\infty = \lim_{\nu\to\infty} x_{k_{n_\nu}}$$

总之，我们找到了子数列 $\{x_{k_{n_\nu}} | \nu = 1, 2, \cdots\}$ 使得

$$G = \lim_{\nu\to\infty} x_{k_{n_\nu}}$$

第三步我们要证明 $\{x_n\}$ 的任何一个收敛子数列 $\{x_{n_k}\}$ 的极限都不小于 G。由于

$$G_{n_k} = \inf_{m \geq n_k} x_m \leqslant x_{n_k}$$

所以

$$G = \lim_{k\to\infty} G_{n_k} \leqslant \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$$

因此 G 就是 $\{x_n\}$ 的一切收敛子数列的极限的最小值。因此 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在而且就等于 G。

类似地可以讨论上限。至于(ii)—(vi)的证明留给读者。证毕。

对于实函数序列 $\{f_n(t)\}$，可以仿照上面(i)相应地定义函数列的上限(下限)函数，即

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \min\{f_n(t), \cdots, f_m(t)\} \tag{5.22}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \max\{f_n(t), \cdots, f_m(t)\} \tag{5.23}$$

习　题

1. 证明定理 12 中(ii)—(vi)以及(i)中的(5.11)式成立。

2. 设 $\{x_n\}$ 的上限 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ 是有限值，证明数 $a = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ 的充要条件是：对任何 $\varepsilon > 0$，满足 $x_n > a + \varepsilon$ 的 x_n 只有有限个，而 $x_n > a - \varepsilon$ 的 x_n 必有无限个。

3. 设 $\{x_n\}$ 是实数列，如果它的一切收敛子数列的极限都是有限的，记这些极限值全体为 S，证明 S 是闭集。

第二章　测　　度

§0 引　　言

从本章开始，我们介绍本书上册主要内容——测度与积分．在数学分析中读者已学过黎曼积分，黎曼积分具有明显的直观性，即它是面积的推广．在相当广泛的场合，它也够用了．但随着人们对客观世界认识的不断深化，特别是在十八世纪，有关热、波、电磁等的研究的需要，数学上必须对函数项级数、含参变量的函数等进行更深入地探讨．如果说数学中的导数是力学中质点运动的速度、加速度的数学表达，那末数学中的积分就是表达功、能量的重要数学工具．随着物理学的发展，迫切希望数学能有一个比黎曼积分更为有效的积分，它既能保持黎曼积分的直观性，又能在逐项积分（即积分与极限交换顺序）方面比黎曼积分所需的条件（在黎曼积分中通常加一致收敛等类型条件）有较大的改进．数学家勒贝格(Lebesgue)首先建立了较为令人满意的一种积分——现在人们都称它为勒贝格积分．

介绍勒贝格积分却不能象介绍黎曼积分那样，一开始就定义什么叫勒贝格积分，然后研究这个积分有什么性质和应用．而先需要引入测度概念、可测函数概念，并且要用足够的篇幅对它们进行讨论后才能开始定义勒贝格积分，进而讨论它的性质和应用．这是一个较为复杂的过程．为了便于初学者了解本书上册中今后各章的目的和联系，先简要介绍引出勒贝格积分的思路．

首先看一个按黎曼积分意义下不能逐项积分的函数项级数：设$\{r_i\}$是$[0,1]$上有理点全体（它是可列集），函数$\varphi_{r_i}(x)$在r_i点的值为1，而在$[0,1]$上其余的点上的值为0．显然级数

$$D(x)=\sum_i \varphi_{r_i}(x) \tag{0.1}$$

在[0, 1]上处处收敛，极限函数 $D(x)$ 是熟知的狄里赫利(Dirichlet)函数．我们知道，每个 $\varphi_{r_i}(x)$ 是[0, 1]上性质很好的“简单函数”，是黎曼可积的，而且 $(R)\int_0^1 \varphi_{r_i}(x)dx=0$（积分号前加(R)表示这个积分是黎曼积分，用以区别其它意义下的积分）．然而 $D(x)$ 不是黎曼可积的．所以在黎曼积分意义下，级数(0.1)是不能逐项积分的．但是，能不能定义一种新的积分 $\int_a^b \varphi(x)dx$，使得每个黎曼可积函数 $\varphi(x)$，按新积分也是可积的，并且

$$\int_a^b \varphi(x)dx=(R)\int_a^b \varphi(x)dx$$

这样就保证了凡能用黎曼积分的地方新的积分仍然可以用．从而

$$\int_0^1 \varphi_{r_i}(x)dx=(R)\int_0^1 \varphi_{r_i}(x)dx=0 \qquad (i=1, 2, \cdots)$$

另外，有些按黎曼不可积的函数按新的积分的意义却是可积的．例如，如果有一种新积分，能使 $D(x)$ 可积，并且 $\int_0^1 D(x)dx=0$．那末，虽然函数项级数 $\sum_i \varphi_{r_i}(x)$ 不一致收敛于 $D(x)$，但按新积分仍可逐项积分．事实上，

$$\sum_i \int_0^1 \varphi_{r_i}(x)dx=\sum_i 0=0=\int_0^1 D(x)dx=\int_0^1 \sum_i \varphi_{r_i}(x)dx$$

上例可以启示我们作如下设想：如果引入一种新的积分，第一，凡黎曼可积函数都按新积分意义下可积，并且两种积分的值相同；第二，有不少黎曼不可积的函数，但按新积分仍是可积的．那末新积分的应用范围就不小于黎曼积分，并且就有可能改进黎曼积分中逐项积分的条件．

下面从分析黎曼积分入手，引出建立新积分的方案.

设 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 区间上定义的有界函数，在 $[a,b]$ 中任意取一组分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，再在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中任意取一个点 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$，作和式

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

如果有常数 A，使得对任何 $\varepsilon>0$，都有相应的 $\delta>0$，只要分点组 $\{x_i\}$ 满足 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})<\delta$，不管 ξ_i 如何取，上面作出相应的和式 S 都满足 $|S-A|<\varepsilon$，那末就说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是黎曼可积的，数 A 就称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的黎曼积分. 并且把它记成

$$(R)\int_a^b f(x)dx$$

对于区间 $[a,b]$ 的任何给定的一个分点组 $\{x_i\}$，我们把在第 i 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上函数值 $f(x)$ 的上确界及下确界分别记做 M_i 及 m_i：

$$M_i=\sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}f(x),\quad m_i=\inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}f(x)$$

又记 $\omega_i=M_i-m_i$，称 ω_i 为 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅. 我们从数学分析教程中知道，$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积的充分必要条件是对任何 $\varepsilon>0$，都可以找到一个分点组 $\{x_i\}$，使得相应的

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$$



图 2.1

我们现在直观地不严格地来讨论一下这个结论. 如果 $f(x)$ 是非负值的函数，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的黎曼积分就是由 x 轴，直线 $x=a$，$x=b$ 及曲线 $y=f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积（图 2.1）. 而和式

S 就相当于把曲边梯形分成 n 个狭长条的曲边梯形，且把每一个小曲边梯形的面积用一个矩形的面积来代替．小矩形面积之和就是 S，而当分法越来越精细的时候，S 将趋近于曲边梯形的面积．这就是黎曼积分的基本思想．

但是，在给定了一个分点组之后，每个小曲边梯形用小矩形代替时，矩形的高度（即 $f(\xi_i)$ 的值）还是有一个范围的，如果在各个小区间中，都取得使 $f(\xi_i)$"最大"（实际上可能只是接近于"最大"值），或是都取得使 $f(\xi_i)$"最小"，这时，相应作出的和 S 与 s 就有个差别，这相差的数值可以认为是 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1})$．因此函数 $f(x)$ 的黎曼可积性就相当于 S 和 s 有同样的极限，也就是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1})\to 0 \qquad (0.2)$$

当函数值变化急剧，使 ω_i 不变小的区间很多时，就会有黎曼不可积的情况出现．例如 $D(x)$ 就是因为在任何小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上 $\omega_i=1$，从而 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1})=(b-a)\neq 0$，所以 $D(x)$ 不可积．

由此可见，引起函数 $f(x)$ 黎曼不可积的原因是：当把曲边梯形分成小曲边梯形时，在小区间上函数值变化很大，从而用小矩形去代替小曲边梯形时误差就会相当大．针对这种情况，可以考虑一种改进的方案：在把 $[a,b]$ 分成若干块（但每一块不一定是小区间）的时候，要求在每一块上函数值都相差较小，然后每小块上作相应于上面的矩形的图形，做出这种图形的面积之和，和式的极限就作为积分的值．下面把这个"方案"具体地说一下．

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上定义的有界函数，其函数值满足 $A<f(x)<B$．我们不是在 $[a,b]$ 上取分点组而是在函数值的所在范围 $[A,B]$

上取一组分点$\{y_i\}(i=0,1,2,\cdots,n)$: $A=y_0<y_1<\cdots<y_n=B$. 记$E_i=\{x\mid x\in[a,b],y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\}$，它相当于前面所说的"第 i 个小区间". E_i 的"长度"记为 $m(E_i)$，然后，任取 $\xi_i\in[y_{i-1},y_i]$，作和式

$$S=\sum_{i=1}^{n}\xi_i m(E_i) \tag{0.3}$$

接下去使分法无限地精细(即使得$\max\limits_i(y_i-y_{i-1})\to 0$)，和式$S$的极限就叫做 $f(x)$在$[a,b]$上的积分.

例如，图 2.2 所示函数 $f(x)$的一组分点$\{y_i\}$，相当于"第二个小区间" 的 E_2 就是 x 轴上用粗线标出的四个小区间的和集，而$m(E_2)$自然应该理解为这四个小区间的长度之和.

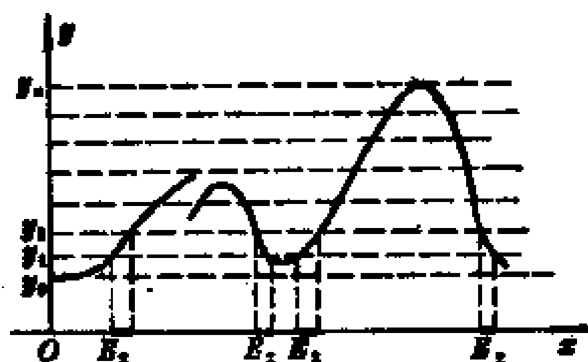


图 2.2

这样的一种想法是否可行呢？从要求和式S的极限存在的角度看，无疑这种做法是好的. 因为现在分法精细的标志就是所有的 ω_i 很小，因此$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i m(E_i)$将随着分法的精细而趋于零. 这样，似乎不会发生不可积的情况. 但是问题出在对一般的函数 $f(x)$，$m(E_i)$是否都有意义？例如对 $D(x)$，如果 $1\in(y_{i-1},y_i]$，那末集 E_i 就是$[0,1]$中有理数全体，记为$\mathscr{R}$；如果 $0\in(y_{i-1},y_i]$，那末集 E_i 就是$[0,1]$中无理数全体，记为 $\mathscr{Q}$. 熟知的区间的"长度"概念又怎么能在这种复杂的集上有意义呢？

因此，要实施新方案，第一步就是如何将区间的“长度”推广到更为复杂的点集上去．当然，最好是直线上所有的子集都有“长度”，而且有界集的“长度”是有限的，这样，一切有界函数都可以积分了．然而，一般地说，再要求这个积分有好的逐项积分性质，这是做不到的，只能做到直线上相当广泛的集（但不是直线上所有的子集），即所谓勒贝格可测集有“长度”（它的正式名称是测度）．既然只能一部分集才具有“长度”（测度），第二步就要解决怎样的函数 $f(x)$，才对任何 $y_{i-1}<y_i$，集合 $\{x \mid y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\}$ 是有“长度”（测度）的集．换言之，我们还要讨论：对任何 $c<d$，使集 $\{x \mid c\leqslant f(x)<d\}$ 总是具有“长度”的函数（它称为可测函数）的特点和性质．只有对这种（可测）函数，才能作出 (0.3) 中的和式．第三步才能讨论这种（可测）函数在什么时候有积分以及积分的性质和应用．特别是它与黎曼积分的关系．

第二章实际上只是做第一步的工作．第二、三步工作都在第三章中做．

建立勒贝格积分的这个过程的思想方法，早就被推广到远非直线、平面的情况，而是推广到相当广泛的一般集合上了．建立在一般集合基础上的测度、可测函数和积分的理论（简称为测度论）不仅统一了历史上许多重要积分，如黎曼积分、勒贝格积分、黎曼-斯蒂阶积分以及勒贝格-斯蒂阶积分等，并且已成为近代分析数学很普遍而重要的基础知识了．所以本书中主要讲的是一般集合上的测度和积分理论，而把直线上的勒贝格测度和积分作为一个特别重要的特例加以介绍．

为了便于读者更好地掌握第二章中的建立在一般集上的测度理论，我们先将直线上勒贝格测度建立的过程，即把区间的长度概念如何向复杂的点集（例如[0, 1]上有理点全体$\mathscr{R}$或无理点全体$\mathscr{D}$）上推广成测度（即“长度”）的过程作简略地介绍．设 $\boldsymbol{L}$ 是由直

线上某些(有些是"简单"的、有些是"复杂"的)子集所组成的集.我们说 m 是 $\mathbf{L}$ 上的测度,它主要应满足那些要求呢?通常有如下一些要求:

(i) 所有的区间,如 $(a,b]$、(a,b)、$[a,b]$ 等等都在 $\mathbf{L}$ 中,并且区间的测度就是区间的长度,即 $m((a,b))=m((a,b])=m([a,b])=b-a$.这个要求简单地说就是"测度与长度是符合的".

(ii) 如果 E_1、$E_2\in\mathbf{L}$,而且 $E_1\cap E_2=\varnothing$,那末 $E_1\cup E_2\in\mathbf{L}$,并且 $m(E_1\cup E_2)=m(E_1)+m(E_2)$.简单地说,要求测度具有类似于长度的可加性.

(iii) 如果 E_1、$E_2\in\mathbf{L}$, $E_1\supset E_2$,那末 $E_1-E_2\in\mathbf{L}$,而且当 $m(E_2)<\infty$ 时,$m(E_1-E_2)=m(E_1)-m(E_2)$,即测度和长度一样是可以相减的.

上面(i)—(iii)是对测度("长度")的直观而自然的要求.不过这些要求只影响测度的代数运算,对极限运算没有本质的影响.下面是作为测度在极限运算方面的要求.

(iv) 如果 $\{E_n\}$ 是 $\mathbf{L}$ 中一列互不相交的集,那末 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathbf{L}$,并且 $m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(E_n)$.这个要求称为可列可加性.可加性要求(ii)实际上是可列可加性要求(iv)的特例,即当 $\varnothing=E_3=E_4=\cdots=E_n=\cdots$ 时,(iv)就变成了(ii).

对于 $\mathbf{L}$ 上满足(i)—(iv)的测度 m,由(i)、(iii)立即知道任何单点集 $\{a\}$ 的测度是零,即 $m(\{a\})=0$.特别,当 a 是有理数 r 时,$m(\{r\})=0$.而 $[0,1]$ 上有理数全体 $\mathscr{R}$ 是可列集,由(iv)可知 $m(\mathscr{R})=0$.再由(i)、(iii),$m(\mathscr{D})=m([0,1]-\mathscr{R})=m([0,1])-m(\mathscr{R})=1$.对(0.1)式中 $\varphi_{r_i}(x)$, $D(x)$,直接计算(0.3)式,易知 $\varphi_{r_i}(x)$, $D(x)$ 关于 m 是可积分的,而且积分值为零.从而级数(0.1)就可

以逐项积分. 如果 m 不满足要求(iv), 就不能从单点集的测度是零推出 $m(\mathscr{R})=0$, 以及 $m(\mathscr{D})=1$. 从而谈不上 $D(x)$ 是可积分的, 更谈不上可以逐项积分.

在明确了测度应满足的一些基本要求之后, 重要的问题就是如何寻找 $\boldsymbol{L}$, 并在 $\boldsymbol{L}$ 上定义 m. 这个问题的大体想法是先在直线 E^1 上取某些区间, 例如取所有有限的左开右闭区间全体所成的集, 记为 $\boldsymbol{P}$, 对 $\boldsymbol{P}$ 中每个元素 $(a, b]$ 规定 $m((a, b])=b-a$(即区间 $(a, b]$ 的长度). 按测度要能加、减的要求, 先将 $\boldsymbol{P}$ 扩充成 $\boldsymbol{R}_0$, 这里 $\boldsymbol{R}_0$ 是由有限个互不相交的左开右闭区间的和集作为元素的集. 对 $\boldsymbol{R}_0$ 中的每个元素 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i]((a_i, b_i]\cap(a_j, b_j]=\varnothing, i\neq j)$, 规定 $m(E)=\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$. 这样, 定义在 $\boldsymbol{R}_0$ 上的 m 就满足(i)—(iii)的要求. 但(iv)还不能满足, 原因是 $\boldsymbol{R}_0$ 中元素太少, 例如开区间 (a, b), 闭区间 $[a, b]$ 都不在 $\boldsymbol{R}_0$ 中. 如何找出一个合适的 $\boldsymbol{L}$, 并且 $\boldsymbol{L}$ 中每个集都有测度? 一个较直观的想法是类似定义平面上曲边形的面积的方法(即先定义"外面积", 后定义"内面积", 而当"内、外面积相等时才规定为有面积), 先定义直线上任何子集 E 的外测度:

$$m^*(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}m(P_i)\,|\,P_i\in\boldsymbol{R}_0, \bigcup_{i=1}^{\infty}P_i\supset E\right\} \tag{0.4}$$

然后想办法定义 E 的内测度 $m_*(E)$. 取 $\boldsymbol{L}$ 为一切内外测度相等的集全体, 并规定 $\boldsymbol{L}$ 中的 E 的测度 $m(E)=m^*(E)=m_*(E)$.

但是内测度的定义一般不采用下面的方式:

$$m_*(E)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}m(P_i)\,|\,P_i\in\boldsymbol{R}_0, \bigcup_{i=1}^{\infty}P_i\subset E\right\} \tag{0.5}$$

因为 $\boldsymbol{R}_0$ 中的元素都是有限个互不相交的左开右闭区间的和. 按(0.5), 任何不含内点的集 E(例如 $\mathscr{R}$、$\mathscr{D}$ 等都是没有内点的集), $m_*(E)=0$. 这样, 集 $\mathscr{D}$ 就不可能是有测度的集. 否则, 便有 $m(\mathscr{D})=m^*(\mathscr{D})=m_*(\mathscr{D})=0$. 但[0, 1]是有测度的集并且 $m([0,1])=1$, 按测度应满足减法的要求, $\mathscr{R}=[0,1]-\mathscr{D}$ 也是有测度的集, 并且 $m(\mathscr{R})=m([0,1])-m(\mathscr{D})=1$. 这与 $m(\mathscr{R})=m_*(\mathscr{R})=0$ 相矛盾. 内测度的定义一般采用下面的方式(还有另外的方式): 对任何有界集 E, 不妨设 $E\subset(a,b]$, 规定

$$m_*(E)=b-a-m^*((a,b]-E) \tag{0.6}$$

对一个有界集 E, 当 $m_*(E)=m^*(E)$ 时, 称 E 是有测度的, 并规定测度 $m(E)=m_*(E)=m^*(E)$. 进而证明 $\boldsymbol{R}_0$ 中每个元素都是有测度的, 并且测度就是原来的测度. 再证 m 在所有有界的有测度集上满足(i)—(iv). 最后再推广到无界的情况. 这是一个复杂的过程.

在用内、外测度相等的办法建立测度的过程中, 要用到直线上某些特有的性质, 在向一般集合上推广时有时不是很方便. 本书中是采用的另一种方法, 是一种便于向一般集上推广的方法, 即直接分析由(0.4)所定义的外测度究竟在那些集上具有可加性. 从而找出具有测度的集必须具备的基本特征, 并以此特征作为有测度的集的定义, 从而建立测度的理论.

§1　集　　类

本节是为本章以后各节讨论测度时要用的集合论方面的准备知识, 特别要介绍几个重要的集类.

设 X 是某个取定的集, 有时也称为**基本空间**. 以 X 的某些子集为元素所成的集称为 X 上的**集类**, 或简称为**类**. 集类用黑体英文字母表示, 例如 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\boldsymbol{M}$ 等. 设 $\boldsymbol{E}$ 是 X 上某个集类, M 是 X 的某

个子集，$\mathbf{E}\cap M$表示集类$\{M\cap E\mid E\in\mathbf{E}\}$.

1. 环与代数

定义 设X是一个集，$\mathbf{R}$是X上的集类，如果对任何E_1、$E_2\in\mathbf{R}$，都有

$$E_1\cup E_2\in\mathbf{R},\qquad E_1-E_2\in\mathbf{R}$$

那末就称$\mathbf{R}$是X上的**环**. 特别，如果还有$X\in\mathbf{R}$，就称$\mathbf{R}$是X上的**代数**，或称为**域**.

由定义可知，环是对集的"$\cup$"及"$-$"运算封闭的非空类，而代数是对"余"运算也封闭的环.

下面举几个环的例子.

例1 设X是任意的集，X的有限子集(包括空集$\varnothing$)全体所成的集类$\mathbf{E}$是一个环. 当X本身是有限集时，$\mathbf{E}$是个代数.

例2 设X是任意无限集，X的有限子集及可列子集(包括空集$\varnothing$)全体所成的集类$\mathbf{E}$是个环. 当X本身是可列集时，$\mathbf{E}$是个代数.

例3 设X是任意集，X的所有子集全体所成的集类$\mathbf{E}$是个代数.

例4 E^1是实数全体，$\mathbf{R}_0$是由E^1中的有限个左开右闭的有限区间的和集$E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$全体所成的集类. 那末$\mathbf{R}_0$是个环.

现在验证$\mathbf{R}_0$是环. $\mathbf{R}_0$对于运算"$\cup$"的封闭性是显然的，所以只要验证$\mathbf{R}_0$对运算"$-$"是封闭的. 首先注意到空集$\varnothing$可以视为$(a, a]$，因而$\varnothing\in\mathbf{R}_0$，而任何两个左开右闭区间$(a, b]$，$(c, d]$的差只可能发生如下三种情况：或是空集，或是左开右闭区间，或是两个不相交的左开右闭区间的和，任何情况出现都说明$(a, b]-(c, d]\in\mathbf{R}_0$. 对$\mathbf{R}_0$中任何$E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$，$F=\bigcup\limits_{j=1}^{m}(c_j, d_j]$，由于

$$\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i] - (c, d] = \bigcup_{i=1}^{n}((a_i, b_i] - (c, d]),$$

因此 $\boldsymbol{R}_0$ 中任何元素 E 减去一个区间 $(c, d]$ 后仍属于 $\boldsymbol{R}_0$. 由于

$$E - F = (E - (c_1 d_1]) - \bigcup_{j=2}^{m}(c_j, d_j],$$

利用 $E-(c_1 d_1]\in\boldsymbol{R}_0$ 以及归纳法易知 $E-F\in\boldsymbol{R}_0$, 即 $\boldsymbol{R}_0$ 对运算"$-$"是封闭的.

显然 $\boldsymbol{R}_0$ 中的元都可以表示成有限个两两不相交的左开右闭的区间的和, 当然表示法并不唯一.

在这个例中, 如果把条件"左开右闭"改为"左闭右开", 那末仍然是一个环. 但要注意, 由有限个开区间(或闭区间)的和集全体所组成的集类并不是一个环, 这是因为两个开区间的差集可以不再是开区间(对闭区间的情况也是如此).

例 5 E^1 仍表示实数全体, $\boldsymbol{R}_1$ 表示由 E^1 中的有限个有限区间(不论是开的、闭的、还是半开半闭的)的和集全体所成的集类, 那末 $\boldsymbol{R}_1$ 是个环.

例 6 在二维欧几里得空间 E^2 中, 当 $a\leqslant b, c\leqslant d$ 时, 称

$$E = \{(x, y) \mid a<x\leqslant b, c<y\leqslant d\}$$

为 E^2 中的左下开右上闭的矩形, 由有限个左下开右上闭的矩形的和集全体所成的集类 $\boldsymbol{E}$ 是一个环.

对于 n 维欧几里得空间, 也可作出类似的环.

由于

$$E_1\cap E_2 = (E_1\cup E_2) - (E_1 - E_2) - (E_2 - E_1)$$

可见环对于"$\cap$"运算也是封闭的. 另外, 空集$\varnothing$是任何环$\boldsymbol{R}$的元素. 环$\boldsymbol{R}$中有限个元素 $E_1, \cdots, E_n$ 的和集 $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ 也属于$\boldsymbol{R}$, 这由环的定义可以直接知道. 我们再指出一点: 如果 $\boldsymbol{R}_1$ 与 $\boldsymbol{R}_2$ 是同一基

本空间X上的两个环(或代数),那末它们的通集 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_1\cap\boldsymbol{R}_2$ 也是个环(或代数). 这是因为当 $E_1, E_2\in\boldsymbol{R}$ 时,它们都属于 $\boldsymbol{R}_1$,也都属于 $\boldsymbol{R}_2$,所以 $E_1\cup E_2\in\boldsymbol{R}_1$, $E_1\cup E_2\in\boldsymbol{R}_2$,于是 $E_1\cup E_2\in\boldsymbol{R}$,同样理由可知 $E_1-E_2\in\boldsymbol{R}$. 更一般地, X上的任意个环(或代数) $\boldsymbol{R}_\iota$ 的通集 $\bigcap_\iota \boldsymbol{R}_\iota$ 仍是个环(或代数).

定理1 设 $\boldsymbol{E}$ 是由集X的某些子集所成的集类,那末必定有唯一的环(或代数)$\boldsymbol{R}$使得

(i) $\boldsymbol{E}\subset\boldsymbol{R}$

(ii) 对任何包含 $\boldsymbol{E}$ 的环(或代数)$\boldsymbol{R}'$ 都成立 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{R}'$.

换句话说,$\boldsymbol{R}$ 是包含 $\boldsymbol{E}$ 的最小的环(或代数).

证 首先,由于X的子集全体$\boldsymbol{X}$是个环,它当然包含$\boldsymbol{E}$,因此包含$\boldsymbol{E}$的环确实是有的. 作一族环 $\mathscr{M}=\{\boldsymbol{R}'\mid \boldsymbol{X}\supset\boldsymbol{R}'\supset\boldsymbol{E}, \boldsymbol{R}'$ 是环$\}$. 令 $\boldsymbol{R}=\bigcap_{\boldsymbol{R}'\in\mathscr{M}}\boldsymbol{R}'$,就是说 $\boldsymbol{R}$ 是所有包含 $\boldsymbol{E}$ 的环的通集. 由于任意个环的通集是环,所以 $\boldsymbol{R}$ 是环, $\boldsymbol{R}\supset\boldsymbol{E}$ 是显然的, 由 $\boldsymbol{R}$ 的定义可知性质(ii)成立. 而满足(i), (ii) 这两条性质的环当然只有一个. 对于代数的情况,类似可证. 证毕.

定理1中的环(代数)$\boldsymbol{R}$ 称为由集类 $\boldsymbol{E}$ 所张成的环(代数). 由集类 $\boldsymbol{E}$ 所张成的环(代数)一般用 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E})$ 或 $\mathscr{R}(\boldsymbol{E})$($\mathscr{F}(\boldsymbol{E})$)表示.

例7 设X是一个任意非空集, $\boldsymbol{E}$ 表示由X的单元素子集全体所成的集类, 那末 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E})$ 就是由X的有限子集(包括空集)全体所成的环(见例1).

例8 令 $\boldsymbol{P}$ 表示实轴上左开右闭区间 $(a,b]$ $(-\infty<a<b<\infty)$全体所成的集类,那末 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{P})$ 就是前面例4中的环 $\boldsymbol{R}_0$.

容易知道,如果 $\boldsymbol{E}$ 是个非空集类, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E})$ 就是由 $\boldsymbol{E}$ 中任意取有限个元素 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 经过有限次"$\cup$","$\cap$","$-$"运算后所得

的集全体．在类 E 中加进元素X后所成的类记为E'，显然$R(E')=\mathscr{F}(E)$.

2. σ-环与σ-代数 环和代数这两种集类只对集的"∪"、"−"运算封闭．对于分析数学来说，还必须考察对集的极限运算也封闭的集类，即考虑 σ-环和 σ-代数．

定义 设 S 是由集X的某些子集所成的集类，如果对任何一列 $E_i\in S(i=1,2,\cdots)$，都有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\in S, \qquad E_1-E_2\in S$$

就称 S 是X上的 σ-环．如果又有 $X\in S$，就称 S 是X上的 σ-代数，或 σ-域．

由定义可知 σ-环(σ-代数) 是对"差"和"可列和"运算（还有对"余"运算)封闭的非空集类．

前面例 2、3 中的环都是 σ-环，但例 4、5、6 所举的环并不是 σ-环．例 1 中的环一般也不是 σ-环，除非X本身是有限集，这时例 1 和例 3 是一样的．

显然空集$\varnothing$属于任何 σ-环，因此 σ-环必定是环．

根据和通关系式，可知

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i-\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j-E_i\right)$$

因此，σ-环对于"可列通"的运算也是封闭的．由第一章 (1.4)可知，如果一列集$\{E_i\}$都属于一个 σ-环，那末它们的上限集与下限集也属于这个 σ-环．这样，σ-环就是对极限运算也封闭的环．

与环(代数) 的情况一样，任意个σ-环(σ-代数)的通集仍是个σ-环 (σ-代数)．

定理 2 设 E 是由集X的某些子集所成的集类，那末必定有

唯一的 σ-环(σ-代数)$\boldsymbol{S}$ 使得

(i) $\boldsymbol{E}\subset\boldsymbol{S}$

(ii) 对于包含 $\boldsymbol{E}$ 的任何 σ-环(σ-代数)$\boldsymbol{S}_1$ 都成立 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{S}_1$.

定理 2 的证明与定理 1 相同，只要把证明中的"环(代数)"都改成"σ-环(σ-代数)"就可以了. 定理中的 σ-环 $\boldsymbol{S}$ 称为由集类 $\boldsymbol{E}$ 所张成的 σ-环. 由集类 $\boldsymbol{E}$ 所张成的 σ-环用 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$ 表示，而 $\boldsymbol{E}$ 张成的 σ-代数仍常记为 $\mathscr{F}(\boldsymbol{E})$.

系 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}))$.

证 因为 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})\supset\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})\supset\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E})$，从而 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})\supset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}))$. 反之，由于 $\boldsymbol{E}\subset\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E})$，所以 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})\subset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}))$. 证毕.

注意，当 $\boldsymbol{E}$ 是 X 上的某个集类时，我们不能简单地设想 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$ 是下面形式的集的全体：在 $\boldsymbol{E}$ 中任取一列集 $\{E_n\}$，进行一系列的"$\cup$"、"$\cap$"、"$-$"运算后所得到的集. 一般说来，对一列集 $\{E_n\}$，中间插入上述运算符号，依次运算所得的集的序列不一定有极限，即使有极限，把这些极限集全体拿来也只是 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$ 中一小部分. 所以 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$ 的结构远比 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E})$ 复杂.

3. 单调类 X 是基本空间，$\boldsymbol{E}$ 是由它的某些子集所成的类. $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E})$ 是对代数运算"$\cup$"、"$\cap$"、"$-$"封闭，且是包含 $\boldsymbol{E}$ 的最小的类. 为使极限运算封闭，将 $\boldsymbol{E}$ 扩张成 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$ 的结构是复杂的. 这里我们将用单调类概念给出 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$ 的某种描述（单调类的技巧在研究集类对极限运算封闭性中是常用的，例如见本书第三章 §5 以及下册第六章 §7).

定义 设 $\boldsymbol{M}$ 是由 X 的某些子集所成的集类. 如果对 $\boldsymbol{M}$ 中任何单调的序列 $\{E_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n\in\boldsymbol{M}$，那末称 $\boldsymbol{M}$ 是**单调类**.

单调类就是对单调序列的极限运算封闭的集类. 当然，单调类并不必对运算"$\cup$"、"$-$"封闭. 例如 X 是数直线，$\boldsymbol{M}=\{[0,1],[2,3]\}$ 是单调类，但 $\boldsymbol{M}$ 对"$\cup$"不封闭，对"$-$"也不封闭.

由定义直接可知，任意个单调类的通集仍是个单调类．因此，与定理 1 相同，可以证明下面的

定理 3 设 $\boldsymbol{E}$ 是由集 X 的某些子集所成的集类，那末必有唯一的单调类 $\boldsymbol{M}$ 使得

(i) $\boldsymbol{E}\subset\boldsymbol{M}$

(ii) 对于包含 $\boldsymbol{E}$ 的任何单调类 $\boldsymbol{M}_1$ 都有 $\boldsymbol{M}_1\supset\boldsymbol{M}$.

定理中的 $\boldsymbol{M}$ 称为由集类 $\boldsymbol{E}$ 所张成的单调类．由集类 $\boldsymbol{E}$ 所张成的单调类用 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{E})$ 表示．

引理 1 σ-环必是单调类，单调环必是 σ-环．

证 因为 σ-环对于可列和及可列通运算都是封闭的，而单调集列的极限集就是这一列集的和集或通集，因而 σ-环必定是单调类．

另一方面，如果 $\boldsymbol{M}$ 是个单调环，即 $\boldsymbol{M}$ 既是单调类又是个环，要证明 $\boldsymbol{M}$ 是 σ-环，显然只要证明 $\boldsymbol{M}$ 对可列和运算的封闭性．设 $E_n\in\boldsymbol{M}(n=1,2,3,\cdots)$，记 $F_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$，由于 $\boldsymbol{M}$ 是环，所以 $F_n\in\boldsymbol{M}$．而 $\{F_n\}$ 是单调上升的，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n\in\boldsymbol{M}$，但

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n=\lim_{n\to\infty}F_n\in\boldsymbol{M}$$

所以 $\boldsymbol{M}$ 对于可列和运算是封闭的，因此 $\boldsymbol{M}$ 是 σ-环．证毕．

定理 4 设 $\boldsymbol{R}$ 是由集 X 的子集所成的环，那末

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$$

证 因为 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 是包含 $\boldsymbol{R}$ 的 σ-环，由引理 1 它是单调类，但 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$ 是包含 $\boldsymbol{R}$ 的最小单调类，所以 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})\subset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$.

如果我们能证明 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$ 是环，那末 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$ 是个单调环，由引理 1 它是 σ-环．但 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 是包含 $\boldsymbol{R}$ 的最小 σ-环，所以就得到

$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})\subset\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$. 这样我们就证明了定理的结论.

要证明$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$是环, 就是要证明: 对任何 E、$F\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$, $E-F$、$F-E$、$F\cup E$ 都必属于$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$. 先假定 E、F 中有一个, 例如E是属于 $\boldsymbol{R}$ 的情况下来证明.

对任何集 $A\subset X$, 作类

$$\boldsymbol{K}(A)=\{B\mid B\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R}),\text{而且 } A-B、B-A、A\cup B \text{ 均属于}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})\}$$

先证 $\boldsymbol{K}(A)$是单调类: 事实上, 设$\{B_n\}$是 $\boldsymbol{K}(A)$中的任一单调序列, 因为 B_n-A、$A-B_n$、$A\cup B_n$ 均属于$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$, 且也是单调的序列, 利用极限运算能与"$\cup$"、"$-$"可交换, 即

$$\lim_{n\to\infty}(B_n-A)=\lim_{n\to\infty}B_n-A,\quad \lim_{n\to\infty}(A-B_n)=A-\lim_{n\to\infty}B_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(A\cup B_n)=A\cup\lim_{n\to\infty}B_n$$

易知$\lim\limits_{n\to\infty}B_n-A$、$\lim\limits_{n\to\infty}B_n\cup A$、$A-\lim\limits_{n\to\infty}B_n$ 均属于$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}B_n\in\boldsymbol{K}(A)$.

特别, 取 $A=E\in\boldsymbol{R}$ 时, 显然 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{K}(E)\subset\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$, 又因为$\boldsymbol{K}(E)$是包含 $\boldsymbol{R}$ 的单调类, 从而$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})\subset\boldsymbol{K}(E)$, 因此$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{K}(E)$.

$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{K}(E)$表示: 当 $E\in\boldsymbol{R}$ 时, 对任何 $F\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$, 总有 $F-E$、$E-F$、$E\cup F$ 等均属于$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$.

对任何 $E\in\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$, 根据上面的证明, 当$F\in\boldsymbol{R}$时, $E-F$、$F-E$、$E\cup F$ 均属于$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$, 从而 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{K}(E)(\subset\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R}))$. 但 $\boldsymbol{K}(E)$是单调类, 所以 $\boldsymbol{K}(E)=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$, 即$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})$是环. 证毕.

下面的系是明显的, 但常被引用.

系　设$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{R}$ 是X上的两个集类, 如果$\boldsymbol{M}$是单调类, $\boldsymbol{R}$ 是环, 并且$\boldsymbol{M}\supset\boldsymbol{R}$, 那末$\boldsymbol{M}\supset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$.

证　由定理 4, $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$, 所以$\boldsymbol{M}\supset\boldsymbol{M}(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$. 证毕.

4. $S(E)$结构的概略描述 设 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上的一个环，称 $\boldsymbol{R}$ 中的每个元为第零类的集．任取一列第零类集(允许重复) $\{E_n\}$，称 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$、$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 为第一类集，第一类集全体记为 $\boldsymbol{R}_1$．任取一列第一类集(允许重复)$\{E_n\}$，称 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 为第二类集，第二类集全体记为 $\boldsymbol{R}_2$，依次定义 $\boldsymbol{R}_3, \boldsymbol{R}_4, \cdots, \boldsymbol{R}_n, \cdots$．再从 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{R}_n$ 中任取一列集(允许重复)$\{E_n\}$，称集 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$、$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 为第 ω 类集，其全体记为$\boldsymbol{R}_\omega$．再从 $\boldsymbol{R}_\omega$ 又可定义 $\boldsymbol{R}_{\omega+1}$，继又定义 $\boldsymbol{R}_{\omega+2}$，$\cdots$，$\boldsymbol{R}_{\omega+n}, \cdots$．再从 $\bigcup_{\lambda=1}^{\omega+\infty} \boldsymbol{R}_\lambda$ 中任取一列集(允许重复)$\{E_n\}$，称 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$、$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 为第 2ω 类集，其全体记为 $\boldsymbol{R}_{2\omega}$．如此等等．

显然

$$
\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{R}_1\subset\boldsymbol{R}_2\subset\cdots\subset\boldsymbol{R}_n\subset\cdots\subset\boldsymbol{R}_\omega\subset\boldsymbol{R}_{\omega+1}\subset\cdots\subset\boldsymbol{R}_{\omega+n}
$$
$$
\subset\cdots\subset\boldsymbol{R}_{2\omega}\subset\boldsymbol{R}_{2\omega-1}\subset\cdots
$$

并且上述包含号“$\subset$”中有一个事实上是等号时，那末此后的一切“$\subset$”均将是等号．在等号未出现前，上面就是从 $\boldsymbol{R}$ 开始不断地扩大集类的过程．一旦等号出现就是扩大过程的终止．用超限数(是自然数概念的推广，例如 $\omega, \omega+1, \cdots, 2\omega, \cdots$ 等都是超限数)概念以及超限数所对应的势的知识可以证明：对任何环 $\boldsymbol{R}$，上述扩张过程到势不超过 $\aleph$ 的超限数时必终止(即包含号必是等号)．

本书中某些涉及不可列无限程序的重要定理的证明都用 Zorn 引理，且 Zorn 引理已有所介绍．而要介绍超限数以及超限归纳法（普通归纳法在超限数中的推广）尚需化一定篇幅，所以从略．有兴趣的读者可看[7]、[8]中有关章节．当然，对于极特

殊的 $\boldsymbol{R}$，上述扩张过程在什么时候终止是无需超限数的理论就可知道，不过往往是平凡的情况．

引理 2 设 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上的环，当 E、$F\in\boldsymbol{R}_1$ 时，$E-F$、$E\cup F\in\boldsymbol{R}_2$．

证 由定义，存在 $\boldsymbol{R}$ 中两个序列 $\{E_n\}$、$\{F_n\}$，使得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\left(\text{或}\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=E,\ \bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\left(\text{或}\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\right)=F$$

我们只考察 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n=E$，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n=F$ 的情况（其余情况由读者证明）．因为

$$\begin{aligned}E-F&=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n-\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(E_n-\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k\right)\\&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}(E_n-F_k)\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}E\cup F&=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\cup\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(E_n\cup\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k\right)\right)\\&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}(E_n\cup F_k)\end{aligned}\tag{1.2}$$

并且 E_n-F_k、$E_n\cup F_k\in\boldsymbol{R}$，而当 n 固定时，$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(E_n-F_k)$、$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}(E_n\cup F_k)\in\boldsymbol{R}_1$．因此 $E-F$、$E\cup F\in\boldsymbol{R}_2$．证毕

其实，更一般地是对任何超限数 λ，当 E、$F\in\boldsymbol{R}_\lambda$ 时，$E-F$、$E\cup F\in\boldsymbol{R}_{\lambda+1}$．

从上面的讨论以及 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E}))$ 可知，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$ 可以视为先将 $\boldsymbol{E}$ 扩张成 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E})$，然后从 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E})$ 出发再经逐次单调扩张，直到某个超限数（其所相应的势不会超过 $\aleph$），扩张过程终止时所得的集类便是．

习 题

1. $\boldsymbol{E}$ 是 X 的集类，在下列一些情况下分别求出 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E})$。

(i) $\boldsymbol{E}=\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$.

(ii) X 是数直线，$\boldsymbol{E}$ 是 X 中开区间全体.

(iii) X 是数直线，$\boldsymbol{E}$ 是形如 $(-\infty, a)$ 的开区间全体.

2. 求出习题 1 中各种情况下的 $\boldsymbol{E}$ 所张成的代数.

3. 证明直线上的开集、闭集、有理点全体、无理点全体等均属于 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0)$

4. 设 $\boldsymbol{G}$ 是直线上开区间全体所成的类. 证明 $\boldsymbol{R}_0$、$\boldsymbol{G}$ 张成的 σ- 环是一致的，即 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0)=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{G})$.

5. **定义** 设 $\{f_\lambda(x) \mid \lambda\in\Lambda\}$ 是定义在集 X 上的一族实有限函数. 对任何实数 c，令 $E_{\lambda c}=\{x \mid c<f_\lambda(x)\}$. 由类 $\boldsymbol{E}=\{E_{\lambda c}\}$ 张成的 X 上的 σ- 代数称为**由函数族 $\{f_\lambda(x) \mid \lambda\in\Lambda\}$ 产生的（或决定的）σ-代数**.

当 X 是数直线时，

(i) 求出由一个函数 $\operatorname{sign}x$ 产生的 σ- 代数.

(ii) 求出由一个函数 $E(x)$（不超过 x 的最大整数函数）产生的 σ- 代数.

(iii) 求证由一个函数 $f(x)=x^3$ 产生的 σ-代数是 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0)$.

(iv) 记 $\boldsymbol{R}_0[a, b)$ 是 $[a, b)$ 中所有左闭右开区间全体所张成的环，$\{x\}$ 是 x 的正小数部分函数. 求出由 $\{x\}$ 产生的 σ-代数与 $\boldsymbol{R}_0[0, 1)$ 的关系.

(v) $\{f_\lambda(x) \mid \lambda\in\Lambda\}$ 是直线上周期为 2π 的连续函数全体，求出由 $\{f_\lambda(x) \mid \lambda\in\Lambda\}$ 产生的 σ-代数与 $\boldsymbol{R}_0(0, 2\pi]$ 的关系（$\boldsymbol{R}_0(0, 2\pi]$ 是 $(0, 2\pi]$ 中左开右闭区间全体所张成的环）.

6. 证明定理 2.

7. 设 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上的一个集类. 证明 $\boldsymbol{R}$ 是环的充要条件是下面 (i)、(ii) 中的任何一个.

(i) $\boldsymbol{R}$ 对任意有限个互不相交集的和运算和减法运算封闭.

(ii) $\boldsymbol{R}$ 对运算"Δ"、"$\cap$"、"$-$"封闭.

8. $\boldsymbol{R}$ 是 X 上的一个集类. 证明 $\boldsymbol{R}$ 是代数的充要条件是对"$\cup$"、"$\cap$"、"余"运算封闭.

9. 设 X 是一集，$\boldsymbol{R}$ 是 X 的某些子集所成的环，A 是 X 的一个子集，证明 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})\cap A=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}\cap A)$. 当 $\boldsymbol{R}$ 是代数或 $A\in\boldsymbol{R}$ 时，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})\cap A$ 是 A 上的 σ-代数.

10. 设 X 是一集，$\boldsymbol{R}$ 是 X 的某些子集所成的环．$\boldsymbol{M}$ 也是由 X 的某些子集所成的环，它有如下的性质 (i) $\boldsymbol{M}\supset\boldsymbol{R}$，(ii) 当 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 是 $\boldsymbol{M}$ 中一列互不相交的集时，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\boldsymbol{M}$．证明 $\boldsymbol{M}\supset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$．

11. 设 $\boldsymbol{R}$ 是实数直线 $\boldsymbol{E}^1$ 中的一个环，对每个 $E\in\boldsymbol{R}$，作 $E^2=\{(x, y)\,|\,x, y\in\boldsymbol{E}^1\}$ 中形如 $\widetilde{E}=\{(x, y)\,|\,x\in E\}$ 的集．当 E 在 $\boldsymbol{R}$ 中变化时，这种 $\widetilde{E}$ 全体记为 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$．求出 $\boldsymbol{S}(\widetilde{\boldsymbol{R}})$ 与 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 的关系．

12. $\boldsymbol{E}$ 是 X 上的一个集类，证明对 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$ 中任何一个集 E，必存在 $\boldsymbol{E}$ 中一列集 $\{E_i\}$，使得 $E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$．

13. 完成引理 2 的全部证明．

§2 环上的测度

1. 测度的基本性质 我们用 $\hat{R}$ 表示实数全体再加上 $+\infty$，$-\infty$①所成的“推广数集”，设 $\boldsymbol{E}$ 是一个集类，如果 μ 是集类 $\boldsymbol{E}$ 到 $\hat{R}$ 的映照，就是说，μ 是以集为“自变元”的、取值是实数或 $\pm\infty$ 的函数，那末就称 μ 是个**集函数**．

例 1 设 $\boldsymbol{P}_1$ 是直线上的区间全体所成的集类，m 是 $\boldsymbol{P}_1$ 上定义的如下的集函数：对于 $\boldsymbol{P}_1$ 中的元 E，如果 E 是以 a, b $(a\leqslant b)$ 为端点的区间（不论 E 是开的，闭的或是半开半闭的），规定 $m(E)=b-a$．这个集函数就表示区间的长度．

下面我们要考察一种特殊的集函数．

---

① $+\infty$ 常简写成 ∞．我们规定对任何有限实数 a，$a+(\infty)=(\infty)+a=\infty$；$\infty$ 认为比任何有限实数大；而对一列大于或等于零的 a_i：如果其中有一个是 ∞，就认为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i=\infty$；如果 a_i 是非负的有限实数，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$ 发散时认为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i=+\infty$．

定义　设 $\boldsymbol{R}$ 是由集 X 的某些子集所成的环，μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的集函数，如果 μ 具有下列性质：

(i) $\mu(\varnothing)=0$；

(ii) 非负性：对于任何 $E\in\boldsymbol{R}$，$\mu(E)\geqslant 0$；

(iii) 可列可加性：对任何一列 $E_i\in\boldsymbol{R}(i=1,2,3,\cdots)$，如果 $E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j$ 时$)$ 且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in\boldsymbol{R}$，就必定有

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$$

那末集函数 μ 就称为**环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度**，称 $\mu(E)$ 为集 E 的**测度**.

容易看出，除了 μ 是恒取 ∞ 的 $\boldsymbol{R}$ 上集函数外，满足 (ii)、(iii)条件的 μ 必满足(i). 事实上，因为至少存在一个 $E\in\boldsymbol{R}$，$\mu(E)<\infty$. 取 $E_1=E$，$E_2=E_3=\cdots=\varnothing$，因此 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$，$E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$，由(iii)，

$$\mu(E)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=2}^{\infty}\mu(E_i)+\mu(E)$$

从上式消去有限数 $\mu(E)$，便得到

$$\sum_{i=2}^{\infty}\mu(\varnothing)=0$$

再从(ii)，立即得到 $\mu(\varnothing)=0$.

除了空集取值为零，其余一切集都取值为∞的测度是平凡的，一般场合都不用，所以一般文献中都把测度理解为非负、可列可加集函数(即总意味着有些集的测度是有限的).

下面给几个简单的例子.

例 2　设 X 是任意的一个集，$\boldsymbol{R}$ 表 X 的有限子集全体所成的

环，在 $\boldsymbol{R}$ 上定义集函数 μ 如下：

$$\mu(E)=E \text{ 中元素的个数} \quad (E\in\boldsymbol{R})$$

这个 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度.

例 3 设X是任意的一个(非空)集，$\boldsymbol{R}$ 表示X的所有子集全体所成的环. 在X中任意取定一个元 a，然后在 $\boldsymbol{R}$ 上定义集函数 μ 如下：对任何 $E\in\boldsymbol{R}$.

$$\mu(E)=\begin{cases}0 & \text{当 } a\overline{\in}E \text{ 时}\\ 1 & \text{当 } a\in E \text{ 时}\end{cases}$$

那末 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度.

例 4 $\boldsymbol{R}$ 是直线上的一切子集全体所成的环. 对于 $E\in\boldsymbol{R}$，$\mu(E)$是E中元素个数(如果E中有无限个点，$\mu(E)=\infty$). μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的测度.

下面的定理是测度的一些基本性质.

定理 1 如果 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度，那末有下列性质.

(i) 有限可加性：如果 $E_1, E_2, \cdots, E_n\in\boldsymbol{R}$，且这些集两两不相交，那末 $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(E_i)$.

(ii) 单调性：如果 E_1，$E_2\in\boldsymbol{R}$，且 $E_1\subset E_2$，那末 $\mu(E_1)\leqslant\mu(E_2)$.

(iii) 可减性：如果 E_1、$E_2\in\boldsymbol{R}$，且 $E_1\subset E_2$，又如果 $\mu(E_1)<\infty$，那末 $\mu(E_2-E_1)=\mu(E_2)-\mu(E_1)$.

(iv) 次可列可加性：如果 $E_n(n=1,2,3,\cdots)$ 及 E 都属于 $\boldsymbol{R}$，且 $E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$，那末 $\mu(E)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$.

(v) 如果 $E_n\in\boldsymbol{R}(n=1, 2, 3, \cdots)$，且 $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots$，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\boldsymbol{R}$，那末 $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)$.

(vi) 如果 $E_n\in\boldsymbol{R}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$, $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\in\boldsymbol{R}$, 而且至少有一个 E_n 使 $\mu(E_n)<\infty$, 那末

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$$

此外, 如果 $\boldsymbol{R}$ 本身是 σ-环, 那末还有下面的性质:

(vii) 如果 $E_n\in\boldsymbol{R}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$, 那末 $\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty}E_n)\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(E_n)$.

(viii) 如果 $E_n\in\boldsymbol{R}(n=1, 2, 3, \cdots)$, 而且有个自然数 k 使得 $\mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}E_n\right)<\infty$, 那末 $\mu(\overline{\lim}_{n\to\infty}E_n)\geqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}\mu(E_n)$.

(ix) 如果 $E_n\in\boldsymbol{R}(n=1,2,3,\cdots)$, $\lim_{n\to\infty}E_n$ 存在, 而且有个自然数 k 使得 $\mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}E_n\right)<\infty$, 那末 $\mu(\lim_{n\to\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$.

(x) 如果 $E_n\in\boldsymbol{R}(n=1, 2, 3, \cdots)$ 而且有一个自然数 k 使得 $\sum_{n=k}^{\infty}\mu(E_n)<\infty$, 那末 $\mu(\overline{\lim}_{n\to\infty}E_n)=0$.

证 (i) 对于 $\boldsymbol{R}$ 中有限个两两不相交的元 $E_1, \cdots, E_n$ 只要令 $E_{n+1}=E_{n+2}=\cdots=\varnothing$. 这样由可列可加性及 $\mu(\varnothing)=0$ 就得到有限可加性.

(ii) 因为 E_1, E_2-E_1, 是 $\mathbf{R}$ 中不相交的元, 其和集为 E_2, 所以由测度的有限可加性就得到

$$\mu(E_2)=\mu(E_1)+\mu(E_2-E_1) \tag{2.1}$$

又因 $\mu(E_2-E_1)\geqslant0$, 所以 $\mu(E_2)\geqslant\mu(E_1)$.

(iii) 由于 $\mu(E_1)<\infty$, 所以由(2.1)式两边同减 $\mu(E_1)$即得 $\mu(E_2-E_1)=\mu(E_2)-\mu(E_1)$.

(iv) 因为 $E_n\in\boldsymbol{R}$, $E\in\boldsymbol{R}$, $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$, 记 $F_n=E\cap E_n$, 就有 $F_n\subset E_n$, $F_n\in\boldsymbol{R}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i=E$. 再记 $G_1=F_1$, $G_n=F_n-\bigcup_{i=1}^{n-1}F_i$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$, 这时, $G_n\in\boldsymbol{R}(n=1, 2, \cdots)$, $G_n\subset F_n$ 而且

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i=E$$

此外, G_n 是两两不交的, 所以由可列可加性有

$$\mu(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(G_i)$$

又因为 $G_n\subset F_n\subset E_n$, 由 (ii) $\mu(G_n)\leqslant\mu(E_n)$, 再利用上式得到次可列可加性.

(v) 因为 $E_n\in\boldsymbol{R}$, $E_1\subset E_2\subset\cdots$, 记 $F_1=E_1$, $F_n=E_n-E_{n-1}$, $(n=2, 3, \cdots)$, 这时 F_n 是一列两两不相交的集, 而且 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$, $\bigcup_{i=1}^{n}F_i=E_n$, 所以

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(F_i)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu(F_i)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$$

(vi) 在单调下降的情况下, 因为由假设有一个 n 使 $\mu(E_n)<\infty$, 所以不妨认为 $\mu(E_1)<\infty$. 记 $F_n=E_1-E_n(n=1, 2, 3, \cdots)$, 这时, F_n 是单调上升的, 而且 $\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i=E_1-\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\in\boldsymbol{R}$, 所以由(v)得到

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)$$

但另一方面由有限可加性，可知

$$\mu(E_1)=\mu(F_n)+\mu(E_n),\ \mu(E_1)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right)+\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

所以①

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)=\mu(E_1)-\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right)=\mu(E_1)-\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\mu(E_1)-\mu(F_n)]=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$$

(vii) 由于 $\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$，记 $F_k=\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$，这时 $F_k(k=1,2,3,\cdots)$是单调上升的，而且 $F_k\subset E_k$，所以由(v)和(ii)可知

$$\mu\left(\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n\right)=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}\mu(E_n)$$

(viii) 由于 $\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$，记 $F_m=\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n$，这时 F_m $(m=1,2,3,\cdots)$是单调下降的，$F_m\supset E_m$，而且由假设只要 $m\geqslant k$，必有 $\mu(F_m)<\infty$，所以由(vi)可知

$$\mu(\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n)=\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} F_m\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)\geqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}\mu(E_n)$$

(ix) 由(vii)及(viii)即得．

(x) 由上限集的定义，可知对任何自然数 m，

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n\subset\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n$$

① 这里用到 $\mu(E_1)<\infty$，否则不能够做减法，因为 $\infty-\infty$ 是没有意义的。

因此，由单调性及次可列可加性，即得

$$\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n)\leqslant\mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty}E_n\right)\leqslant\sum_{n=m}^{\infty}\mu(E_n)$$

而因为 $\sum_{n=k}^{\infty}\mu(E_n)<\infty$，在上式中令 $m\to\infty$，上式最右边趋于零. 并由测度的非负性，得

$$\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n)=0$$

至此，定理 1 证毕.

在(vii)—(x)中，我们加上了 $\boldsymbol{R}$ 是 σ- 环的要求，只是为了叙述简单一点. 对于 $\boldsymbol{R}$ 是环，只要假设证明中出现的集都在 $\boldsymbol{R}$ 中就可以了. 又在(vi)中要求至少有一个 E_n，满足 $\mu(E_n)<\infty$，这个条件是不能少的. 例如在例 4 中取一列集 $E_n=\{n,\ n+1,\ n+2,\ \cdots\}(n=1,2,\ \cdots)$. 显然 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$，并且 $\lim\mu(E_n)=\infty$. 另一方面 $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\varnothing$，从而 $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu(\varnothing)=0$.

2. 环 $\boldsymbol{R}_0$ 上的测度 m 下面要讲一个在分析数学中重要的测度。由直线上左开右闭的有限区间 $(a,b]$ $(a\leqslant b)$ 全体所成的集类记为 $\boldsymbol{P}$，我们先定义 $\boldsymbol{P}$ 上的集函数 m 如下：对 $E=(a,b]\in\boldsymbol{P}$，令

$$m(E)=b-a$$

m 就表示区间的长度，由 $\boldsymbol{P}$ 中任意有限个元素作和集，这样的和集全体记为 $\boldsymbol{R}_0$，$\boldsymbol{R}_0$ 是一个环(见 §1 的例 4). 显然 $\boldsymbol{P}\subset\boldsymbol{R}_0$，而且 $\boldsymbol{R}_0$ 中元 E 可以写成 $\boldsymbol{P}$ 中有限个两两不相交的元 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 的和集. 我们称这种把 $\boldsymbol{R}_0$ 中元 E 分解成 $\boldsymbol{P}$ 中有限个互不相交的元的和集的分解为初等分解. 显然，初等分解并不是唯一的.

现在我们把集函数 m 按下面的办法由 $\boldsymbol{P}$ 延拓到 $\boldsymbol{R}_0$ 上；对于

$E\in \boldsymbol{R}_0$，设 $E=\bigcup_{i=1}^{n} E_i(E_1, \cdots, E_n\in \boldsymbol{P}, E_i=(a_i, b_i], E_1\cdots, E_n$ 互不相交)是 E 的一个初等分解，我们就令

$$m(E)=\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i) \tag{2.2}$$

首先我们注意，对于 $\boldsymbol{R}_0$ 中的一个元 E，初等分解的方法并不唯一，所以我们下面必须证明用上述方法规定的 $m(E)$ 的值与 E 的初等分解的方式无关，即它是由 E 所完全确定的.

引理 1 由(2.2)式定义的 $\boldsymbol{R}_0$ 上集函数 m 是有确定值的，即 $m(E)$ 的值只与 E 有关，而与 E 的初等分解的具体形式无关.

证 首先，我们对于 $E\in \boldsymbol{P}$ 的情况来证明引理 1. 设

$$(a, b]=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$$

是 $(a, b]$ 的一个初等分解. 不妨认为 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$. 因为 $(a_i, b_i]$, $i=1, 2, \cdots, n$, 是两两不交的，而且 $\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]=(a, b]$，所以必定

$$a=a_1\leqslant b_1=a_2\leqslant b_2=a_3\leqslant b_3=\cdots=a_n\leqslant b_n=b$$

由此 $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)=(b_1-a_1)+(b_2-a_2)+\cdots+(b_n-a_n)=(b_n-a_1)$ $=(b-a)$. 可见当 $E=(a, b]\in \boldsymbol{P}$ 时，无论对怎样的初等分解，由(2.2)式定义的 $m(E)$ 总是等于 $b-a$.

对于一般的 $E\in \boldsymbol{R}_0$，设 $E=\bigcup_{i=1}^{n} E_i$，$E=\bigcup_{j=1}^{l} F_j$ 是 E 的两个初等分解(即 $E_i, F_j\in \boldsymbol{P}$, $i=1, 2, \cdots, n$; $j=1, 2, \cdots, l$; E_i 之间互不相交，F_j 之间互不相交). 记 $G_{ij}=E_i\cap F_j(i=1, \cdots, n; j=1, \cdots, l)$.

显然 $G_{ij}\in\boldsymbol{P}$. 这时由于 $E_i=\bigcup_{j=1}^{l}G_{ij}$ 是 E_i 的初等分解，而且 $E_i\in\boldsymbol{P}$, 所以 $m(E_i)=\sum_{j=1}^{l}m(G_{ij})$. 因此

$$\sum_{i=1}^{n}m(E_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{l}m(G_{ij})\right) \tag{2.3}$$

同理 由 $F_j=\bigcup_{i=1}^{n}G_{ij}$ 是 F_j 的初等分解以及 $F_j\in\boldsymbol{P}$得到

$$\sum_{j=1}^{l}m(F_j)=\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{n}m(G_{ij})\right) \tag{2.4}$$

但(2.3)及(2.4)式的右边显然相等，所以

$$\sum_{i=1}^{n}m(E_i)=\sum_{j=1}^{l}m(F_j).$$

因此由 (2.2) 式定义的集函数 m 与集 E 的初等分解的方式无关，证毕.

这样，我们就用(2.2)式在 $\boldsymbol{R}_0$ 上定义了集函数 m. 它是区间长度概念的拓广，$m(E)$ 就是 E 中所有区间的总长度.

引理 2 上面作出的环 $\boldsymbol{R}_0$ 上的集函数 m 有下列性质:

(i) 集函数 m 有有限可加性.

(ii) 如果 $E_1,\cdots,E_n,E\in\boldsymbol{R}_0$, $E_1,\cdots,E_n$ 互不相交而且 $E\supset\bigcup_{i=1}^{n}E_i$, 那末

$$\sum_{i=1}^{n}m(E_i)\leqslant m(E) \tag{2.5}$$

(iii) 集函数 m 有(有限)次可加性: 如果 $E_1,\cdots,E_n,E\in\boldsymbol{R}_0$, 而且 $E\subset\bigcup_{i=1}^{n}E_i$, 那末

$$m(E) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(E_i) \tag{2.6}$$

证　(i) 设 $E_1, \cdots, E_n$ 是 $\boldsymbol{R}_0$ 中两两不相交的元，记 $E=\bigcup_{i=1}^{n} E_i$. 设 E_i 的初等分解是

$$E_i=\bigcup_{j=1}^{l_i} F_{ij} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.7}$$

由于 $E_1,\cdots,E_n$ 两两不交，因此 $F_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,l_i)$ 也是两两不交的，所有这些 F_{ij} 的和集是 E，因此 $E=\bigcup_{i,j} F_{ij}$ 是 E 的初等分解，所以 $m(E)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i} m(F_{ij})$. 又由 (2.7) 式得到 $m(E_i)=\sum_{j=1}^{l_i} m(F_{ij})$，所以

$$m(E)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i} m(F_{ij})=\sum_{i=1}^{n} m(E_i)$$

这就是 m 的有限可加性.

(ii) 记 $E_{n+1}=E-\bigcup_{i=1}^{n} E_i$，这时 $E_1, E_2, \cdots, E_{n+1}$ 两两不交，其和集为 E. 由性质(i)，立即得到 $m(E)=\sum_{i=1}^{n+1} m(E_i)$. 但集函数 m 是非负的，所以 $\sum_{i=1}^{n} m(E_i)\leqslant m(E)$.

(iii) 首先，由 m 的有限可加性及非负性，可知 m 具有单调性. 对于 $E_1,\cdots,E_n\in\boldsymbol{R}_0$, $E\in\boldsymbol{R}_0$, $E\subset\bigcup_{i=1}^{n} E_i$，记 $F_1=E_1$, $F_j=E_j-\bigcup_{i=1}^{j-1} E_i$ $(j=2,3,\cdots,n)$，这时 $F_1,\cdots,F_n$ 是两两不交的. 它们都属于 $\boldsymbol{R}_0$，因

而 $E\cap F_i\in \boldsymbol{R}_0\,(i=1,\cdots,n)$，同时 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}F_i=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$，所以 $E=E\cap\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i\right)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(E\cap F_i)$。由有限可加性和单调性有

$$m(E)=m\left(\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap F_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}m(E\cap F_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}m(E_i)$$

至此引理 2 证毕.

定理 2 $\boldsymbol{R}_0$ 上的集函数 m 是一个测度.

证 显然，需要证明的只是可列可加性.

设 $E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots$ 是 $\boldsymbol{R}_0$ 中一列两两不交的元，而且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i=E\in\boldsymbol{R}_0$.

由(2.5)式，可知对任何自然数 n，都成立

$$\sum_{i=1}^{n}m(E_i)\leqslant m(E)$$

令 $n\to\infty$，即得 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}m(E_i)\leqslant m(E)$. 下面证明相反的不等式成立.

设 E 的一个初等分解是 $E=\bigcup\limits_{j=1}^{l}(a_j,b_j]$. 每个 E_i 也有初等分解，因为 $E_i(i=1,2,\cdots)$ 是可列集，所以所有 E_i 分解所得的小区间全体也是可列个，设为 $(\alpha_n,\beta_n]\,(n=1,2,\cdots)$. 显然

$$\sum_{i=1}^{\infty}m(E_i)=\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n)$$

对任何 $\varepsilon>0$，(不妨要求 $\varepsilon<l(b_j-a_j)$) 作闭区间 $\left[a_j+\frac{\varepsilon}{l},\ b_j\right]$ $(j=1,2,\cdots,l)$. 我们又作开区间 $\left(\alpha_n,\ \beta_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)(n=1,2,3,\cdots)$，那末这列开区间 $\left\{\left(\alpha_n,\ \beta_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\middle|\,n=1,2,\cdots\right\}$ 覆盖了 E，因此也覆盖

了每个闭区间$\left[a_j+\frac{\varepsilon}{l}, b_j\right]$. 由 Borel 有限覆盖定理，可以选出有限个开区间覆盖住这些闭区间，这有限个开区间设为$\left(\alpha_{n_1}, \beta_{n_1}+\frac{\varepsilon}{2^{n_1}}\right), \cdots, \left(\alpha_{n_k}, \beta_{n_k}+\frac{\varepsilon}{2^{n_k}}\right)$. 这样，便有

$$\bigcup_{j=1}^{l}\left(a_j+\frac{\varepsilon}{l}, b_j\right]\subset\bigcup_{i=1}^{k}\left(\alpha_{n_i}, \beta_{n_i}+\frac{\varepsilon}{2^{n_i}}\right]$$

但$\left(a_j+\frac{\varepsilon}{l}, b_j\right]$, $j=1, 2, \cdots, l$ 是彼此不交的，所以

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{l}\left(a_j+\frac{\varepsilon}{l}, b_j\right]\right)=\sum_{j=1}^{l}\left(b_j-a_j-\frac{\varepsilon}{l}\right).$$

由(2.6)式即得

$$\sum_{j=1}^{l}\left(b_j-a_j-\frac{\varepsilon}{l}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\left(\beta_{n_i}+\frac{\varepsilon}{2^{n_i}}-\alpha_{n_i}\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n)+\varepsilon$$

由于 ε 是任意正数，所以

$$\sum_{j=1}^{l}(b_j-a_j)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n)$$

即 $m(E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m(E_i)$. 结合上面的不等式，就得到

$$m(E)=\sum_{i=1}^{\infty}m(E_i)$$ 证毕

后面要定义的勒贝格测度就是从这里的环 $\boldsymbol{R}_0$ 上的测度 m 出发经延拓而得到的.

3. 环 $\boldsymbol{R}_0$ 上的 g 测度 在 $\boldsymbol{R}_0$ 上还有一类经常用的 g 测度. 设 $g(x)$ 是$(-\infty, \infty)$上单调增加、右方连续函数. 对于任何 $E\in\boldsymbol{R}_0$, 如果 $E=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$是 E 的初等分解，规定

$$\mu_g(E)=\sum_{i=1}^{n}(g(b_i)-g(a_i)). \tag{2.8}$$

显然,特别 $g(x)=x$ 时,$\mu_g(E)$就是E的初等分解中区间的总长度,即 $\mu_g(E)=m(E)$. 为了好对比起见,可以称 $g(b)-g(a)$是$(a,b]$按 g 量的长度,或简称为 g- 长度.

由 (2.8) 所定义的 $\boldsymbol{R}_0$ 上集函数 μ_g 是 $\boldsymbol{R}_0$ 上测度. 读者可以类比证明m是 $\boldsymbol{R}_0$ 上测度的过程去证明这点,即先在 $\boldsymbol{R}_0$ 上证明 μ_g 是单值的,然后证明在 $\boldsymbol{R}_0$ 上可列可加. 在证明m的可列可加性时所应用的 Borel 覆盖的技巧,对于 g- 长度,由于 g 是右连续的,那种技巧也是同样可以应用的.

为书写方便,常把集函数 μ_g 简写成 g,$\mu_g(E)$简写成 $g(E)$,即由 $g(x)$按(2.8) 产生的集函数与 $g(x)$ 本身一致起来. 将来要把 g 测度延拓到包含 $\boldsymbol{R}_0$ 的某个 σ- 代数上去,得到勒贝格-斯蒂阶(Lebesgue-Stieltjes)测度,简称为 L-S 测度.

如果在直线上分布了一定质量的物质,用 $g(x)$表示该物质在$(-\infty,x]$部分中的质量总和,它就是 x 的单调增加、右连续的函数. 由 $g(x)$按(2.8)产生的 $g(E)(E\in\boldsymbol{R}_0)$正是$E$中所含的总质量. 特别,当该物质是均匀地分布在直线上时,并且 $(0,1]$ 中总质量为 1 时,这时的 $g(x)=x$(或 $g(x)=x+c$,c 是常数). 由此可见,在遇到非均匀分布时就不可避免地用到 g 测度. g 测度是比 m 测度更为广泛的并且是常被用到的一种测度.

4. 有限可加性和可列可加性 正如本章引言中所说,对于测度,重要的一点是要求它有可列可加性. 这就自然地要求使测度有意义的集类至少是 σ- 环. 为什么我们前面讨论的测度是定义在环上,而不直接定义在 σ- 环上呢? 这是因为由一个集类 $\boldsymbol{E}$(例如直线上左开右闭有限区间全体$\boldsymbol{P}$)扩张成$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E})$(例如 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{P})=\boldsymbol{R}_0$)的结构远比 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$(例如 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0)$)简单. 所以在 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E})$ 上先

给出满足可列可加性测度比在 $S(E)$ 上给出满足可列可加性要容易得多. 例如在 R_0 上给出的 m, 只要用覆盖定理就能证明 m 在 R_0 上是具有可列可加性的. 如果想要直接在 $S(R_0)$ 上给出集函数 m, 恐怕连 m 在 $S(R_0)$ 中的复杂点集上如何定义都是困难的, 更不必说证明它有可列可加性了. 所以我们先把测度定义在环上. 正如前说, 环对极限运算不封闭, 一遇到极限就得假设所讨论中出现的极限集在环中(例如定理 1 中从 (iv) 开始都要做这样的假设). 下面的一节(§ 3)我们将证明在环 R 上给定的测度 μ 必定可以自动地延拓成在某个 σ- 环 $R^*\supset S(R)$ 上的测度. 这个定理的重要性是明显的, 可以说是测度论中第一个最基本的定理.

(下面初学者可暂不读)在这里我们还要考虑另一个问题: 假如事先给出的环 R 上的集函数 μ 只是满足(i)非负的; (ii)空集上取值为零; (iii)有限可加的, 问什么时候 μ 能成为 R 上的测度? 即问在什么条件下, μ 满足可列可加性.

为此, 我们引入

定义 设 R 是 X 上的环, μ 是 R 上非负的、空集上取值为零的有限可加集函数. 如果对 R 中任何单调下降集列 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$, 其中至少有一个集, 不妨设为 E_1, $\mu(E_1)<\infty$, 而且 $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\varnothing$, 那末必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)=0$. 就称 μ 是 $\varnothing$ 上连续.

利用上述概念, 有如下定理.

定理 3 设 R 是 X 上的环, μ 是 R 上非负的、空集上取值为零的有限可加集函数. μ 成为 R 上测度的充要条件是

(i) 对 R 中任何单调增加序列 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$, 如果 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in R$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)<\infty$, 那末 $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)<\infty$;

(ii) μ 是 $\varnothing$ 上连续的.

证 必要性是显然的. 因为由定理 1 的(v)、(vi)可分别得到定理 3 的(i)、(ii).

充分性 设 $E_1, \cdots, E_n, \cdots$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中一列互不相交的集, 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \boldsymbol{R}$. 记 $F_k=\bigcup_{n=1}^{k} E_n$, 显然 $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k \subset \cdots$, $F_k \in \boldsymbol{R}$, $\lim_{k\to\infty} F_k=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \boldsymbol{R}$. 由 μ 的有限可加性、非负性可知 μ 具有单调性(证明参见定理 1 中 (ii) 的证明), 从而 $\mu(F_1)\leqslant\mu(F_2)\leqslant\cdots\leqslant\mu(F_k)\leqslant\cdots\leqslant\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$. 如果 $\lim_{k\to\infty}\mu(F_k)=\infty$, 由单调性必有 $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=\infty$. 再利用 μ 的有限可加性便得到

$$
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=\infty=\lim_{k\to\infty}\mu(F_k)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\mu(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n) \tag{2.9}
$$

这样便证明了在 $\lim_{k\to\infty}\mu(F_k)=\infty$ 时, μ 具有可列可加性.

再证 $\lim_{k\to\infty}\mu(F_k)<\infty$ 情况下 μ 的可列可加性. 由定理条件(i), 这时 $\mu(F)<\infty$, 这里 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 记 $G_k=F-F_k$. 显然, $G_1\supset G_2\supset\cdots\supset G_k\supset\cdots$, 且 $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k=\varnothing$. 由于 $\mu(F)<\infty$ 所以 $\mu(G_k)<\infty$. 根据 $\varnothing$ 上连续假设, $\lim_{k\to\infty}\mu(G_k)=0$. 利用可减性(证明参见定理 1 中(iii)的证明)便得到

$$
0=\lim_{k\to\infty}\mu(G_k)=\lim_{k\to\infty}(\mu(F)-\mu(F_k))=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)-\lim_{k\to\infty}\mu(F_k)
$$

$$= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n). \tag{2.10}$$

最后等式中利用了有限可加性: $\mu(F_k)=\sum_{n=1}^{k}\mu(E_n)$. (2.10) 说明 μ 是可列可加的. 证毕.

现在举例说明定理 3 中的条件(i)、(ii)是独立的, 并且一个也不能少.

例 5　设 X 是可列(无限)集, $X=\{x_1, x_2, \cdots\}$, $\boldsymbol{R}$ 是 X 的一切子集全体所成的环(其实是代数). 规定 μ 在空集和有限子集上的值为零, 而在无限子集上的值为无限大. 显然, μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上非负的、空集上取值为零的有限可加集函数. μ 还是 $\varnothing$ 上连续的. 事实上, 对 $\boldsymbol{R}$ 中任何一列 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$, 如果存在某项, 例如 E_n, $\mu(E_n)<\infty$, 意味着 $\mu(E_n)=0$, 即 E_n 是有限子集. 显然, 当 $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\varnothing$ 时, $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=0$. 但是 μ 就不满足定理 3 中的 (i). 例如只要取 $E_n=\{x_1, \cdots, x_n\}$, 便有 $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=0$, 但 $\mu(\lim_{n\to\infty}E_n)=\infty$.

例 6　设 X 仍如例 5, $\boldsymbol{R}$ 是包含 X 的一切有限子集的最小代数(当然, 它也是环). 显然, $\boldsymbol{R}$ 中的元素 E 必是 X 的有限子集或有限子集的余集(这是无限集). 规定 μ 在空集和有限集上的值为零, 在无限集上的值为 1. 显然, μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上非负的、空集上取值为零的有限可加集函数, 并且对一切 $E\in\boldsymbol{R}$, $\mu(E)<\infty$. 所以定理 3 中的 (i)是满足的. 但 μ 在 $\boldsymbol{R}$ 上不是可列可加的, 所以 μ 不是 $\varnothing$ 上连续的(这也可直接从下面事实看出: 取 $E_n=\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$, 由于 $\mu(E_n)=1$, 所以 $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=1$, 但 $\varnothing=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$).

当然，仅从具体验证有限可加集函数是不是成为可列可加的测度这方面来衡量，验证定理 3 中的两个条件并不比直接验证可列可加性容易多少．但定理 3 在讨论随机过程中样本以及“测度存在”等一些基本的理论问题中它还是常常被用到的．

习　题

1．设 $g(x)$ 是直线上的一个单调增加函数，而且 $g(x)=g(x+0)$．当 $(\alpha,\beta]\in \boldsymbol{P}$ 时定义

$$g((\alpha,\beta])=g(\beta)-g(\alpha)$$

证明这个集函数 g 可以唯一地延拓成 $\boldsymbol{R}_0$ 上的测度

2．设 $\boldsymbol{P}'$ 为直线上的开区间的全体，作 $\boldsymbol{P}'$ 上的集函数 m' 如下：$m'((\alpha,\beta))=\beta-\alpha$，证明 m' 必可唯一地延拓成 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{P}')$ 上的测度．

3．设 $\boldsymbol{P}$ 是平面上左下开右上闭的矩形 $(a,b]\times(c,d]=\{(x,y)\mid a<x\leqslant b,\ c<y\leqslant d\}$ 全体，作 $\boldsymbol{P}$ 上的集函数 m 如下

$$m((a,b]\times(c,d])=(b-a)(d-c)$$

证明 m 必可唯一地延拓成 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{P})$ 上的测度．

4．设 μ 是直线上环 $\boldsymbol{R}_0$ 上的测度．证明：存在单调增加右连续的函数 $g(x)$，使得 $\mu(E)=\mu_g(E)\ (E\in\boldsymbol{R}_0)$ 的充要条件是对一切 $(a,b]\in\boldsymbol{P}$，$\mu((a,b])<\infty$．（此即说明：对 $\boldsymbol{P}$ 中每个集都有限的 $\boldsymbol{R}_0$ 上测度必是 g 测度）

5．举例说明定理 1 中 (viii) 的条件 $\mu\left(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}E_n\right)<\infty$，(ix) 的条件 $\mu\left(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}E_n\right)<\infty$，(X) 的条件 $\sum\limits_{n=k}^{\infty}\mu(E_n)<\infty$ 都不能去掉．

6．设 $\{\mu_n\}$ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上一列测度，并且对一切 $E\in\boldsymbol{R}$，以及任何自然数 n，都有 $\mu_n(E)\leqslant 1$．证明

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(E)\qquad (E\in\boldsymbol{R})$$

也是 $\boldsymbol{R}$ 上测度，并且满足 $\mu(E)\leqslant 1\quad(E\in\boldsymbol{R})$．

又去掉假设 $\mu_n(E)\leqslant 1$，证明 $\mu(E)$ 仍是 $\boldsymbol{R}$ 上测度．

7．设 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上测度，如果对一切 $E\in\boldsymbol{R}$，$\mu(E)\leqslant 1$，证明 μ 的原子全体

最多是可列集(这里"原子"是指 $\boldsymbol{R}$ 中一种单点集 $\{x\}$, 但满足 $\mu(\{x\})>0$).

8. 设 $\boldsymbol{R}$ 是集 X 上的环, $\{\mu_n\}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上一列测度, 并且对任何 $E\in\boldsymbol{R}$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(E)$ 存在, 记为 $\mu(E)$. 证明 μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上非负、空集上取值为 0 的有限可加集函数, 并举例说明, μ 未必是 $\boldsymbol{R}$ 上测度.

9. 设 $\boldsymbol{R}_n(n=1,2,\cdots)$ 是集 X 上一列环, 并且 $\boldsymbol{R}_1\subset\boldsymbol{R}_2\subset\cdots\subset\boldsymbol{R}_n\subset\cdots$. 又设 μ_n 是 $\boldsymbol{R}_n$ 上测度, 并且对任何 $E\in\boldsymbol{R}_n$, 当 $m\geqslant n$ 时, $\mu_m(E)=\mu_n(E)$ (通常称为 $\{\mu_n\}$ 在 $\{\boldsymbol{R}_n\}$ 上是**符合**的). 证明(i) $\boldsymbol{R}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{R}_n$ 是 X 上的环. (ii) 定义 $\boldsymbol{R}$ 上函数 μ: 对每个 $E\in\boldsymbol{R}$, 必存在某个 n, $E\in\boldsymbol{R}_n$, 规定 $\mu(E)=\mu_n(E)$, 证明 μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上非负、空集上取值为 0 的有限可加集函数(μ 未必是 $\boldsymbol{R}$ 上测度, 参见下面习题 10).

10. 设 $X=\{x\,|\,x=(x_1,x_2,\cdots x_n,\cdots),x_n=\dfrac{j}{n^2}(j=0,1,2,\cdots n^2),\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\frac{1}{2}}<\infty\}$, 对每个自然数 n, $x\in X$, 令 $\tilde{x}_n=\{y\,|\,y\in X,y_1=x_1,\cdots,y_n=x_n\}$ (即 $\tilde{x}_n$ 是 X 中一切前 n 个坐标与 x 相同的 y 全体所成的集), $\boldsymbol{R}_n$ 是由一切 $\tilde{x}_n$ 张成的环(显然, $\boldsymbol{R}_n$ 是有限集). 又在 $\boldsymbol{R}_n$ 上作 μ_n 如下, 对任何 $E\in\boldsymbol{R}_n$, 如果 $E=\bigcup\limits_{l=1}^{k}\tilde{x}_n^{(l)}$, $\tilde{x}_n^{(l)}\cap\tilde{x}_n^{(m)}=\varnothing\,(m\neq l)$, 那末规定 $\mu_n(E)=k\prod\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{1+j^2}$, 再规定 $\mu_n(\varnothing)=0$. 证明:

(i) $\boldsymbol{R}_1\subset\boldsymbol{R}_2\subset\cdots\subset\boldsymbol{R}_n\subset\cdots$, 并且 $X\in\boldsymbol{R}_n\,(n=1,2,\cdots)$

(ii) μ_n 是 $\boldsymbol{R}_n$ 上测度, $\mu_n(X)=1$ 并且 $\{\mu_n\}$ 在 $\{\boldsymbol{R}_n\}$ 上是符合的(见习题 9).

(iii) 对每个自然数 n, 令 $E_n=\{x\,|\,x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots),0<x_i\leqslant 1,\ i=1,2,\cdots,n\}$, 那末 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$, $\mu(E_n)=\prod\limits_{j=1}^{n}\left(1-\dfrac{1}{1+j^2}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)\neq 0$, 但是 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n=\varnothing$.

§3 测度的延拓

本节的主要任务是要证明任何一个给定在环 $\boldsymbol{R}$ (由基本空间

X 上的某些子集所组成的)上的测度 μ 必可延拓到某个 σ- 环 $\boldsymbol{R}^*\supset \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$上，成为 $\boldsymbol{R}^*$ 上的测度. 如何实现这种延拓？正如本章引言中所说，先造外测度，然后分析外测度能在那些集上具有可加性，最后找出 $\boldsymbol{R}^*$ 以及 μ 在 $\boldsymbol{R}^*$ 上的延拓.

1. 外测度 设 X 是基本空间，$\boldsymbol{R}$ 是 X的环. 下面先引进一个包含 $\boldsymbol{R}$ 的 σ- 环：$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$表示 X 中能用 $\boldsymbol{R}$ 中一列元素(即 X 中某些子集的序列)加以覆盖的子集全体所成的类，即

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})=\{E\,|\,E\subset X,\ 存在\ E_i\in\boldsymbol{R}(i=1,2,\cdots)使\ E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\}$$

例 1 设 X 是任意的集，$\boldsymbol{R}$ 表示 X 的有限子集(包括空集$\varnothing$)全体所成的环，那末 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$就是 X 的有限或可列子集(包括空集$\varnothing$)全体所成的集类.

例 2 对于 §2 第二小节的环 $\boldsymbol{R}_0$, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}_0)$就是直线的所有子集全体.

引理 1 对任何环 $\boldsymbol{R}$, 必定 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$；当 $E\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$时，$E$ 的任何子集 F 必定也属于 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$；$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$必定是 σ- 环.

证 引理的结论中，前面两条是显然的. 而要证明 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$是 σ-环，显然只要证明 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$对可列和运算的封闭性.

设 $E_i\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})(i=1,2,3,\cdots)$，那末对每个 E_i，有一列 $E_i^{(j)}$ $(j=1,2,\cdots)$使得

$$E_i^{(j)}\in\boldsymbol{R},\ E_i\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}E_i^{(j)}$$

这时显然 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_i^{(j)}$，其中 $E_i^{(j)}(i,j=1,2,\cdots)$是 $\boldsymbol{R}$ 中的一列元素. 因此 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$. 证毕.

定义 如果 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度，在 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$上作集函数 μ^*：当

$E \in H(R)$时

$$\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \,\middle|\, E_i \in R \text{ 且 } E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}$$

μ^*称为由测度μ所引出的**外测度**.

首先注意，$H(R)(\supset R)$上集函数μ^*限制到R上就是μ，即

$$\mu^*|_R = \mu \quad (\text{即 } \mu^*(E) = \mu(E),\ E \in R) \tag{3.1}$$

事实上，如果$E \in R$，由测度的次可列可加性(见§2定理1的(iv))，对任何一列$E_i \in R$，$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$，都有$\mu(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$，从而$\mu(E) \leqslant \mu^*(E)$. 另一方面，特别取$E_1 = E$，$E_2 = E_3 = \cdots = \varnothing$作为$E$的覆盖，又由可列可加性$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \geqslant \mu^*(E)$. 所以$\mu(E) = \mu^*(E)$.

其次注意，即使μ对于R中每个集E，$\mu(E)$是有限值，μ^*作为$H(R)$上集函数，也可能出现$F \in H(R)$，而$\mu^*(F) = \infty$. 这种例子甚多.

下面先列出μ^*的几个明显的简单性质.

引理 2 由环R上的测度μ所引出的外测度μ^*有下列性质:

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$;

(ii) (非负性) 对任何$E \in H(R)$，$\mu^*(E) \geqslant 0$;

(iii) (单调性) 如果E_1、$E_2 \in H(R)$，且$E_1 \subset E_2$，那末$\mu^*(E_1) \leqslant \mu^*(E_2)$;

(iv) 对于$E \in R$，$\mu^*(E) = \mu(E)$.

由引理2的(iv)知道$H(R)$上集函数μ^*是R上集函数μ的延拓. 但是不是作为测度μ的延拓呢？即μ^*是不是$H(R)$上测

度呢？只是在明显的少数特殊情况下，μ^* 才是 $H(R)$ 上的测度(例子可参见习题 1)，一般说来，μ^* 不是 $H(R)$ 上的测度. 下面便是一例.

例 3 设 $X=(0,1]$，$R=\{\varnothing,(0,1]\}$，而 R 上 μ 是 $\mu(\varnothing)=0$，$\mu((0,1])=1$. 这时 $H(R)$ 是 $(0,1]$ 中所有子集全体. 显然，按定义，对任何非空集 $E\in H(R)$，$\mu^*(E)=1$. 这样，$\mu^*\left(\left(0,\frac{1}{2}\right]\right)+\mu^*\left(\left(\frac{1}{2},1\right]\right)=2\neq\mu^*\left(\left(0,\frac{1}{2}\right]\bigcup\left(\frac{1}{2},1\right]\right)=1$，即 μ^* 在 $H(R)$ 上不满足有限可加性，自然 μ^* 不可能是测度.

但 μ^* 在 $H(R)$ 上仍具有次可列可加性.

定理 1 设 μ^* 是由环 R 上测度 μ 所引出的外测度，那末对于任何一列 $E_i\in H(R)$，成立不等式

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i) \tag{3.2}$$

证 首先由引理 1，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in H(R)$，因此 $\mu^*\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\right)$ 是有意义的. 如果有某个 i，$\mu^*(E_i)=\infty$，那末(3.2)无疑成立. 因此，不妨设所有 $\mu^*(E_i)<\infty$. 对任何 $\varepsilon>0$，对于 E_i，由 μ^* 的定义，可取一列 $E_i^{(j)}(j=1,2,\cdots)$，它们都属于 R，$E_i\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_i^{(j)}$，且使

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_i^{(j)})\leqslant\mu^*(E_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}$$

因而 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\mu(E_i^{(j)})\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)+\varepsilon$. 但是 $\bigcup\limits_{i,j=1}^{\infty}E_i^{(j)}\supset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$，所以得到

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\sum_{i,j=1}^{\infty}\mu(E_i^{(j)})\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)+\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to 0$ 就得到(3.2)式. 证毕.

次可列可加性当然蕴涵着次有限可加性, 但次可列可加性离可列可加性相差甚远. 我们的目标就是希望在 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 上能找出一个类 $\boldsymbol{R}^*$, 它是 σ-环, 且包含 $\boldsymbol{R}$, 而 μ^* 在 $\boldsymbol{R}^*$ 上是测度. 为此, 我们先看 μ^* 究竟在 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 的哪些子集上具有有限可加性.

定理 2 设 μ^* 是由环 $\boldsymbol{R}$ 上测度 μ 在 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 上引出的外测度, 如果 $E\in\boldsymbol{R}$, 那末对任何 $F\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$,

$$\mu^*(F)=\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E) \tag{3.3}$$

证 由于 $F=(F\cap E)\cup(F-E)$, 由(3.2)式可知

$$\mu^*(F)\leqslant\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E) \tag{3.4}$$

因此只要证明相反的不等式也成立. 对于 $\mu^*(F)=\infty$, 显然, 由(3.4)立即可以得到(3.3). 所以下面不妨设 $\mu^*(F)<\infty$.

由 $\mu^*(F)$ 的定义, 对任何 $\varepsilon>0$, 有一列 $E_i\in\boldsymbol{R}$ $(i=1,2,\cdots)$, 使得 $F\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$, 而且 $\mu^*(F)+\varepsilon>\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$. 令 $E_i'=E\cap E_i$, $E_i''=E_i-E$, 显然 E_i'、$E_i''\in\boldsymbol{R}$, 并且 $\mu(E_i)=\mu(E_i')+\mu(E_i'')$ $(i=1,2,\cdots)$, 从而

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i'=\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\cap E\supset F\cap E,\quad \bigcup_{i=1}^{\infty}E_i''=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i-E\supset F-E$$

而且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i')+\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i'')\geqslant\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E)$$

因此 $\mu^*(F)+\varepsilon>\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\geqslant\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E)$. 再令 $\varepsilon\to 0$, 结合(3.4), 就得到(3.3). 证毕.

(3.3)式表明 $\boldsymbol{R}$ 中的任何集 E，能够分割测量 $H(\boldsymbol{R})$ 中集的外测度，即如果 $H(\boldsymbol{R})$ 中两个集，一个是 E 的子集(例如 $F\cap E$)，另一个是 $X-E=E^c$ 的子集(例如 $F-E$)时，那末它们的和集(例如 F)的外测度就等于这两个集的外测度之和.

显然，上述分割测量外测度的性质可以推广如下，当 X 分解成有限个互不相交的 n 个集 $E_1,\cdots,E_n$ 的和时，而且 $E_1,\cdots,E_n$ 中至少有 $n-1$ 个属于 $\boldsymbol{R}$，那末下式成立

$$\mu^*(F)=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(F\cap E_i),\quad F\in H(\boldsymbol{R}) \tag{3.3'}$$

利用定理 2 找出 $\boldsymbol{R}^*$.

2. μ^*-可测集 为了找出 $\boldsymbol{R}^*$，先做点分析：设想由 μ 引出的 μ^* 用某种方法已从 $H(\boldsymbol{R})$ 中找到一个子 σ-环 $\boldsymbol{R}^*\supset\boldsymbol{R}$，并且 μ^* 在 $\boldsymbol{R}^*$ 是可列可加的，即由 $\boldsymbol{R}$ 上的测度 μ 扩张成 $\boldsymbol{R}^*$ 上测度 μ^*. 但 σ-环 $\boldsymbol{R}^*$ 也是环，又可用 $\boldsymbol{R}^*$ 代替 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}^*$ 上的 μ^* 代替 $\boldsymbol{R}$ 上的 μ，重复上述某种扩张过程，即先作出类 $H(\boldsymbol{R}^*)$ 以及 $H(\boldsymbol{R}^*)$ 上的外测度 $(\mu^*)^*$(记为 μ^{**})，然后又可找出更大的 $\boldsymbol{R}^{**}\supset\boldsymbol{R}^*\supset\boldsymbol{R}$. 这样，似可一直扩张下去. 其实不然，上述扩张过程只能做一次就不能再扩张了. 即下面事实成立.

引理 3 $\boldsymbol{R}^*$ 是 $H(\boldsymbol{R})$ 的一个子环，如果 $\boldsymbol{R}^*\supset\boldsymbol{R}$，那末 $H(\boldsymbol{R}^*)=H(\boldsymbol{R})$，并且 $\mu^*=\mu^{**}$.

证 因为 $H(E)$ 是一切能用 E 中可列个元素覆盖的(X 的)子集全体，自然，从 $\boldsymbol{R}^*\supset\boldsymbol{R}$ 可推出 $H(\boldsymbol{R}^*)\supset H(\boldsymbol{R})$.

反之，对任何 $E\in H(\boldsymbol{R}^*)$，必有 $\boldsymbol{R}^*$ 中序列 $\{E_i^*\}$，使得 $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i^*$. 但对每个 $E_i^*\in\boldsymbol{R}^*(\subset H(\boldsymbol{R}))$ 又必有 $\boldsymbol{R}$ 中序列 $\{E_j^i\}$，使得 $E_i^*\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j^i$. 所以 $E\subset\bigcup_{i,j}E_j^i$，从而 $H(\boldsymbol{R}^*)\subset H(\boldsymbol{R})$. 因此 $H(\boldsymbol{R}^*)$

$=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$.

再证 $\mu^*=\mu^{**}$ 因为 $\boldsymbol{R}^*\supset\boldsymbol{R}$, 而且在 $\boldsymbol{R}$ 上, $\mu=\mu^*$. 所以对任何 $E\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}^*)$,

$$\begin{aligned}\mu^*(E)&=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\,\middle|\,E_i\in\boldsymbol{R},\text{且 }E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right\}\\&=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)\,\middle|\,E_i\in\boldsymbol{R},\text{且 }E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right\}\\&\geqslant\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i^*)\,\middle|\,E_i^*\in\boldsymbol{R}^*,\text{且 }E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i^*\right\}\\&=\mu^{**}(E)\end{aligned}$$

当 $\mu^{**}(E)=\infty$ 时, 从上式已经有 $\mu^*(E)=\mu^{**}(E)$. 所以不妨设 $\mu^{**}(E)<\infty$ 情况下证明 $\mu^*(E)\leqslant\mu^{**}(E)$. 事实上, 对任何 $\varepsilon>0$, 必有 $\boldsymbol{R}^*$ 中 $\{E_i^*\}$ 使得 $E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i^*$, 并且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i^*)<\mu^{**}(E)+\varepsilon$$

由此可知 $\mu^*(E_i^*)<\infty$, 因而对任何 $\frac{\varepsilon}{2^i}$, 存在 $\{E_j^i\}\subset\boldsymbol{R}$, 使得 $E_i^*\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j^i$, 且 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\mu(E_j^i)<\mu^*(E_i^*)+\frac{\varepsilon}{2^i}$, 这样, 就有 $E\subset\bigcup\limits_{i,j}E_j^i$, 而且

$$\mu^*(E)\leqslant\sum_{i,j}\mu(E_j^i)<\sum_i\mu^*(E_i^*)+\varepsilon<\mu^{**}(E)+2\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to0$, 便得到 $\mu^*(E)\leqslant\mu^{**}(E)$. 证毕.

引理 3 说明了用外测度找 μ 的扩张只须一次就不能再扩大了. 如果再结合定理 2, 它就提供了我们找 $\boldsymbol{R}^*$ 的唯一途径, 因为假如 μ^* 在 $\boldsymbol{R}^*\supset\boldsymbol{R}$ 上是测度, 那末按定理 2, $\boldsymbol{R}^*$ 中任一个集都能分割测量 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}^*)$(即 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$)中每个集的外测度 μ^{**} (但是 $\mu^{**}=\mu^*$), 即对 $E\in\boldsymbol{R}^*$ 及 $F\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$, 应成立着

$$\mu^*(F)=\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E) \tag{3.5}$$

由此我们引入下面的定义.

定义 设 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度, μ^* 是由测度 μ 所引出的外测度, $E\in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$, 如果对任何 $F\in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 都成立 $\mu^*(F)=\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E)$, 就称 E 是 **μ^*-可测集**. μ^*-可测集全体记为 $\boldsymbol{R}^*$.

等式 (3.5) 称为集 E 的**卡拉泰屋独利(Caratheodory)**条件.

显然 $\boldsymbol{R}\subset \boldsymbol{R}^*$, 并且当 X 分解成有限个互不相交的集 E_1、…、E_n 的和时, 而且 E_1、…、E_n 中至少有 $n-1$ 个属于 $\boldsymbol{R}^*$, 类似于(3.3′), 有

$$\mu^*(F)=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(F\cap E_i),\quad F\in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) \tag{3.6}$$

引理 4 μ^*-可测集全体 $\boldsymbol{R}^*$ 是一个环.

证 用 $\boldsymbol{R}^*$ 中集分割测量 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 中集的外测度这个基本属性证明 $\boldsymbol{R}^*$ 是一个环. 设 E_1、$E_2\in \boldsymbol{R}^*$, 即

$$\mu^*(F)=\mu^*(F\cap E_1)+\mu^*(F-E_1)\qquad F\in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) \tag{3.7}$$

$$\mu^*(F)=\mu^*(F\cap E_2)+\mu^*(F-E_2)\qquad F\in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) \tag{3.8}$$

1° 证明 $\boldsymbol{R}^*$ 对和运算封闭 用 E_2 来分割 $F-E_1$, 有

$$\mu^*(F-E_1)=\mu^*((F-E_1)\cap E_2)+\mu^*(F-(E_1\cup E_2))$$

利用(3.7)以及 E_1 的分割测量的属性就得到

$$\begin{aligned}\mu^*(F)&=\mu^*(F\cap E_1)+\mu^*((F-E_1)\cap E_2)+\mu^*(F-(E_1\cup E_2))\\&=\mu^*((F\cap E_1)\cup((F-E_1)\cap E_2))+\mu^*(F-(E_1\cup E_2))\\&=\mu^*(F\cap(E_1\cup E_2))+\mu^*(F-(E_1\cup E_2))\end{aligned}$$

上式对任何 $F\in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 成立, 即 $E_1\cup E_2\in \boldsymbol{R}^*$.

2° 同样可证 $\boldsymbol{R}^*$ 对差运算封闭. 用 E_2 分割(3.7)中的 $F\cap E_1$, 有

$$\begin{aligned}\mu^*(F\cap E_1)&=\mu^*(F\cap E_1\cap E_2)+\mu^*((F\cap E_1)-E_2)\\&=\mu^*(F\cap E_1\cap E_2)+\mu^*(F\cap(E_1-E_2))\end{aligned}$$

利用(3.7)以及 E_1 的分割测量的属性就得到

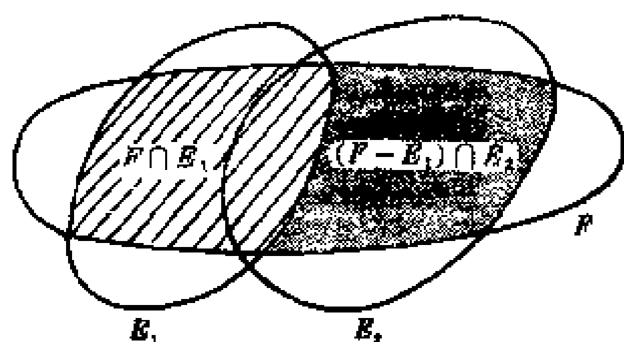


图 2.3

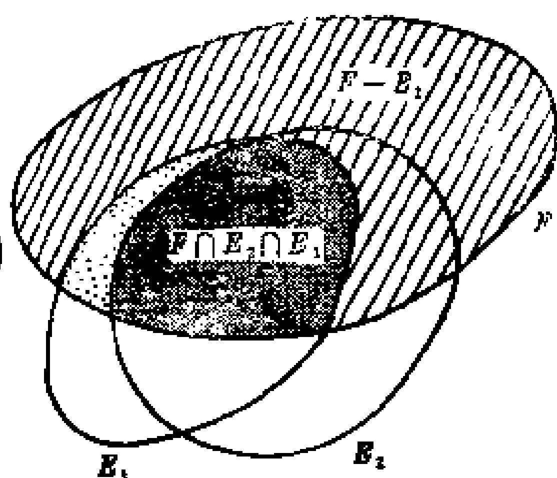


图 2.4

$$\mu^*(F)=\mu^*(F\cap(E_1-E_2))+\mu^*(F\cap E_2\cap E_1)+\mu^*(F-E_1)$$
$$=\mu^*(F\cap(E_1-E_2))+\mu^*(F-(E_1-E_2))$$

上式对任何 $F\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 成立，即 $E_1-E_2\in\boldsymbol{R}^*$. 证毕.

定理 3 μ^*-可测集全体 $\boldsymbol{R}^*$ 是 σ-环，并且 μ^* 是 $\boldsymbol{R}^*$ 上测度.

证 根据引理 4, $\boldsymbol{R}^*$ 是环，因此，要证明 $\boldsymbol{R}^*$ 是 σ-环，只要证明 $\boldsymbol{R}^*$ 对互不相交的一列集的和运算封闭就可以了. 设 $\{E_i\}$ 是 $\boldsymbol{R}^*$ 中一列互不相交的集，记 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，要证明 $E\in\boldsymbol{R}^*$，就是要证明

$$\mu^*(F)=\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E),\quad F\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})\tag{3.9}$$

又因为 μ^* 具有次可加性，所以只要证明

$$\mu^*(F)\geqslant\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E),\quad F\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})\tag{3.10}$$

因为 $E_1\cap E_2=\varnothing$, E_1、$E_2\in\boldsymbol{R}^*$，利用 E_1 分割测量 $F\cap(E_1\cup E_2)$ 得到

$$\mu^*(F\cap(E_1\cup E_2))=\mu^*(F\cap E_1)+\mu^*(F\cap E_2)$$

利用归纳法立即可知对任何自然数 n,

$$\mu^*\left(F\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(F\cap E_i)$$

由于 $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \boldsymbol{R}^*$，以及 μ^* 的单调性，就得到

$$\mu^*(F)=\mu^*\left(F\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\right)+\mu^*\left(F-\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\right)$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{n}\mu^*(F\cap E_i)+\mu^*\left(F-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right) \qquad (3.11)$$

令 $n\to\infty$，并利用 μ^* 的次可列可加性，由(3.11)得到

$$\mu^*(F)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(F\cap E_i)+\mu^*(F-E)$$

$$\geqslant\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E) \qquad (3.12)$$

这就证明了 $E\in\boldsymbol{R}^*$，即 $\boldsymbol{R}^*$ 是 σ-环。

特别在(3.12)中取 $F=E$，就得到

$$\mu^*(E)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)$$

但 μ^* 是具有次可列可加性的，因此 $\mu^*(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)$，即 μ^* 是 σ-环 $\boldsymbol{R}^*$ 上测度。证毕。

究竟 $\boldsymbol{R}^*$ 中有那些集呢？例如 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{R}^*$。又因为 $\boldsymbol{R}^*$ 是 σ-环，所以 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})\subset\boldsymbol{R}^*$。除此而外，$\boldsymbol{R}^*$ 中还包含了使得 $\mu^*(E)=0$ 的一切 E。

引理 5 如果 $E\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 而且 $\mu^*(E)=0$，那末 $E\in\boldsymbol{R}^*$。

(此引理说明外测度为零的集必是 μ^*-可测集)

证 对任何 $F\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$，由外测度的单调性及非负性，得到 $0\leqslant\mu^*(F\cap E)\leqslant\mu^*(E)=0$，因此 $\mu^*(F\cap E)=0$。又由次可加性可知

$$\mu^*(F-E)\leqslant\mu^*(F)\leqslant\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E)=\mu^*(F-E)$$

上式的左右两端相同，因此中间的不等式就成为等式。所以 $\mu^*(F)$

$=\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E)$，因此 $E\in \boldsymbol{R}^*$. 证毕.

定义 设 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度，$E\in\boldsymbol{R}$. 如果 $\mu(E)=0$ 就称 E 是 **μ-零集**，简称做零集.

显然，μ-零集的子集，如果也属于 $\boldsymbol{R}$，就必然也是零集. 但是对一般环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度 μ，μ-零集的子集不一定属于 $\boldsymbol{R}$.

例 4 设 X 是一集，$\boldsymbol{R}=\{X,\varnothing\}$，这是一个环(也是 σ-环、σ-代数)，$\mu(X)=\mu(\varnothing)=0$. 这是平凡的测度. 当 X 至少有两个元素时，X 的真子集不属于 $\boldsymbol{R}$，因此有必要引入下面的概念.

定义 设 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度，如果 $\boldsymbol{R}$ 中任何 μ-零集的任何子集都必定属于 $\boldsymbol{R}$，那末称 μ 是一个**完全测度**.

这样，由引理 5 我们还进一步得到下面的系.

系 μ^* 是 μ^*-可测集类 $\boldsymbol{R}^*$ 上的完全测度.

定义 设 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度，我们称 σ-环 $\boldsymbol{R}^*$ 上的测度 μ^* 是 μ 的**延拓**(或**扩张**).

现在我们把这几节中所讨论的内容扼要地小结一下：

我们从集 X 的某些子集所成的一个环 $\boldsymbol{R}$，以及环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度 μ 出发. 根据环 $\boldsymbol{R}$ 作集类 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$，它是 σ-环. 然后由测度 μ，在 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 上作出由 μ 引出的外测度 μ^*，μ^* 是 μ 的“延拓”，即对于 $E\in\boldsymbol{R}$，$\mu^*(E)=\mu(E)$. 外测度 μ^* 具有测度的一部分性质，但是 μ^* 不一定有可加性，一般说，μ^* 只具有次可加性. 但是在 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 中利用 Caratheodory 条件分出了一类集，即 μ^*-可测集，μ^*-可测集全体 $\boldsymbol{R}^*$ 是一个 σ-环，而且 $\boldsymbol{R}$ 中的元都是 μ^*-可测集. 如果把外测度 μ^* 限制在 $\boldsymbol{R}^*$ 上，那末可列可加性也是成立的，因此 μ^* 是 $\boldsymbol{R}^*$ 上的测度. 而且 μ^* 是 $\boldsymbol{R}^*$ 上的完全测度.

今后我们凡是遇到环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度 μ，总是立即把它延拓成为 $\boldsymbol{R}^*$ 上的测度 μ^*. 在不致发生混淆的时候，$\boldsymbol{R}^*$ 上的测度 μ^* 仍用记号 μ 来表示.

3. R^* 与 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 在这一小节中将证明，对相当广泛的一类测度，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$和 μ^*-零集就完全刻划出 $\boldsymbol{R}^*$.

为此，我们引入如下定义.

定义 设 $\boldsymbol{R}$ 是由集 X 的某些子集所成的环，μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的测度. 如果 $E\in\boldsymbol{R}$ 使 $\mu(E)<\infty$，那末称 E **有有限测度.**

如果任何 $E\in\boldsymbol{R}$ 都有有限测度，那末就称测度 μ 是**有限的**. 如果 $X\in\boldsymbol{R}$(即 $\boldsymbol{R}$ 是个代数) 且 $\mu(X)<\infty$，那末就称测度 μ 是**全有限的.**

定义 设 $\boldsymbol{R}$ 是由集 X 的某些子集所成的环，μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的测度. 如果 $E\in\boldsymbol{R}$，而且有一列 $E_i\in\boldsymbol{R}(i=1,2,3,\cdots)$，每个 E_i 都有有限测度且 $E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$，那末称 E 的测度是 **σ-有限的.** 如果每个 $E\in\boldsymbol{R}$ 的测度是 σ-有限的，就说测度 μ 是 **σ-有限的.** 如果 $X\in\boldsymbol{R}$ (即 $\boldsymbol{R}$ 是代数)而且 X 的测度是 σ-有限的，那末就说测度 μ 是**全 σ-有限的.**

§ 2 中的例 2 中的 μ 是有限测度. 如果例 2 中 X 是有限集，那末 μ 是全有限的. 而 § 2 中的例 3 中的测度 μ 是全有限的. § 2 定理 2 中的测度 m 是有限的，但不是全有限的. § 2 中例 4 就不是 σ-有限的.

例 5 任取一个有限的左开右闭区间$(a,b](a<b)$，那末$\boldsymbol{R}_0\cap(a,b]$是由$(a,b]$的某些子集所成的代数，当我们把$m$限制在$\boldsymbol{R}_0\cap(a,b]$上时，它当然是个测度，这个测度是全有限的.

例 6 如果我们把$(-\infty,\alpha]$，(α,∞)(α 是有限实数)及$(-\infty,\infty)$也看作“左开右闭”区间，所有左开右闭区间全体记做$\hat{\boldsymbol{P}}$($\hat{\boldsymbol{P}}$是$\boldsymbol{P}$再加上上面这种无限的左开右闭区间所成的集类). $\hat{\boldsymbol{P}}$所张成的环记为$\hat{\boldsymbol{R}}_0$，这时，$\hat{\boldsymbol{R}}_0$中的元是$\hat{\boldsymbol{P}}$中有限个元的和集，而且可以表示成$\hat{\boldsymbol{P}}$中有限个两两不交的元的和集. (这种分解法仍称做是初

等分解.)对于$E\in\hat{\boldsymbol{R}}_0$,我们仍可定义$m(E)$是$E$的初等分解式中各个区间的长度之和,当$E$的初等分解中有一个是无限区间时,$m(E)=\infty$. 这样作出的$m$是环$\hat{\boldsymbol{R}}_0$上的测度. 由于$(-\infty,\infty)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-n,n]$,因此$m$是$\hat{\boldsymbol{R}}_0$上的全$\sigma$-有限测度.

例7 设X是一个集,$\boldsymbol{R}$表示X的所有子集全体所成的σ-代数. 对于$E\in\boldsymbol{R}$,规定当E是无限集时$\mu(E)=\infty$,当E是有限集时$\mu(E)$等于集E中元素的数目. 容易验证,μ是$\boldsymbol{R}$上的测度.当X是有限集时,μ是全有限的;当X是可列集时,μ是全σ-有限的;而当X是不可列集时,μ就不是σ-有限的.

在概率论中出现的概率测度就是全有限的测度,而且全空间X的测度是1. 在一般分析数学中,σ-有限测度已足够应用了.它的特点就是每一个测度无限大的集,总能被分割成可列个测度有限的部分加以考虑. 今后本书中主要讨论的是σ-有限的测度.

引理6 $\boldsymbol{R}$是X上的环,μ是$\boldsymbol{R}$上σ-有限的测度,那末μ^*必是$\boldsymbol{R}^*$上σ-有限的测度.

证 对任何$E\in\boldsymbol{R}^*(\subset\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}))$,必存在$\boldsymbol{R}$中序列$\{E_i\}$,使得$E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$. 而对每个$E_i$,由$\mu$是$\sigma$-有限的,又存在$\boldsymbol{R}$中的$\{E_j^i\}$,$\mu(E_j^i)<\infty(j=1,2,\cdots)$,并且$E_i\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j^i$. 因此$E\subset\bigcup\limits_{i,j}E_j^i$,所以$E$是$\sigma$-有限的. 证毕.

下面考察$\boldsymbol{R}^*$与$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$的关系.

引理7 如果$E\in\boldsymbol{R}^*$,$\mu^*(E)<\infty$,那末必有$F\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$,使得$F\supset E$,并且$\mu^*(F-E)=0$.

证 对任何$\varepsilon>0$,由μ^*的定义,必有一列$E_i\in\boldsymbol{R}$,使$E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$,

而且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)<\mu^*(E)+\varepsilon,$$

所以 $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)<\mu^*(E)+\varepsilon$ 但是 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$，这就是说，对 $\varepsilon>0$，有 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 中元 $F_\varepsilon=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\supset E$ 且

$$\mu^*(F_\varepsilon)<\mu^*(E)+\varepsilon.$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，就得到一列 $F_{\frac{1}{n}}\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$，$F_{\frac{1}{n}}\supset E$，$\mu^*(F_{\frac{1}{n}})<\mu^*(E)+\frac{1}{n}$. 令 $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_{\frac{1}{n}}$，显然，$F\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$，$F\supset E$，而且 $\mu^*(F)=\mu^*(E)$. 因为 $F\in\boldsymbol{R}^*$，$E\in\boldsymbol{R}^*$，而 μ^* 在 $\boldsymbol{R}^*$ 上是测度. 因此 $\mu^*(E)=\mu^*(F)=\mu^*(E)+\mu^*(F-E)$，由于 $\mu^*(E)<\infty$，就得到 $\mu^*(F-E)=0$. 证毕.

定理 4 如果 μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的 σ-有限测度，那末

(i) $\boldsymbol{R}^*$ 中任何集必可表示成 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 中集与一个 μ^*-零集的差；

(ii) $\boldsymbol{R}^*$ 中任何集必可表示成 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 中集与一个 μ^*-零集的和.

证 (i) 设 $E\in\boldsymbol{R}^*$. 由引理 6 有一列 $\{E_n\}\subset\boldsymbol{R}^*$，$\mu^*(E_n)<\infty$ 使得 $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. 不妨认为 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$（否则用 $E_n\cap E$ 代替 E_n 就行了）. 由引理 7，对每个 E_n，有 $F_n\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$，$F_n\supset E_n$，$\mu^*(F_n-E_n)=0$. 作 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，那末 $F\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$，$F\supset E$ 而且

$$F-E=F-\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n-\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n-E_n)$$

所以 $\mu^*(F-E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(F_n-E_n)=0$，由 μ^* 的非负性得到 $\mu^*(F-E)=0$. 因此，$F-E$ 是 μ^*-零集. 这时 $E=F-(F-E)$.

(ii) 设 $E\in\boldsymbol{R}^*$. 由(i)，存在 $F_1\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$，使得 $F_1\supset E$，并且 F_1-E 是 μ^*-零集. 又因为 $F_1-E\in\boldsymbol{R}^*$，由(i)，又存在 $F_2\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$，$F_2\supset F_1-E$，并且 $\mu^*(F_2-(F_1-E))=0$. 显然

$$E=F_1-(F_1-E)=(F_1-F_2)\cup\{[F_2-(F_1-E)]\cap E\}$$

而这里的 $F_1-F_2\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$，$[F_2-(F_1-E)]\cap E$ 是 μ^*-零集 $F_2-(F_1-E)$ 的子集(自然也是 μ^*-零集). 证毕.

用 $\boldsymbol{N}_{\mu^*}$ 表示 μ^*-零集全体所成的类. 定理 4 的另一个等价形式如下:

定理 5 如果 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上 σ-有限测度，那末 $\boldsymbol{R}^*$ 中集的一般形式是 $(F\cup N_1)-N_2$，其中 $F\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$，$N_1$、$N_2\in\boldsymbol{N}_{\mu^*}$.

特别，当 $\boldsymbol{R}$ 本身就是 σ-环时，定理 4、5 又可叙述成如下形式

定理 6 如果 μ 是 σ-环 $\boldsymbol{R}$ 上的 σ-有限测度，那末 $\boldsymbol{R}^*$ 中的集可表示成 $F_1\cup N_1$ 或者 F_2-N_2 或者 $(F_3\cup N_3)-N_4$，其中 $F_i\in\boldsymbol{R}$ $(i=1,2,3)$，$N_j\in\boldsymbol{N}_{\mu^*}(j=1,2,3,4)$.

测度的增补 正如例 4 中已指出，对给定在环或 σ-环 $\boldsymbol{R}$ 上测度 μ，一般说来，由 $\mu(E)=0$，并不能推出 E 的任何子集 E_1 在 $\boldsymbol{R}$ 中，从而 μ 在 E_1 上可以没有意义. 这是因为 μ 并不一定是 $\boldsymbol{R}$ 上完全测度. 受定理 6 的启发，对于给定在 σ-环 $\boldsymbol{R}$ 上(不完全)测度 μ，总可以增补一些"零集"上去，使 μ 成为完全测度.

定理 7 设 μ 是 σ-环 $\boldsymbol{R}$ 上 σ-有限测度，$\boldsymbol{N}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中一切 μ 测度为零的集的一切子集全体. 那末

(i) $\boldsymbol{R}^*=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{N})$;

(ii) 对任何 $E\in\boldsymbol{R}^*$，总存在 $F\in\boldsymbol{R}$，N_1、$N_2\in\boldsymbol{N}$，使得 $E=(F\cup N_1)-N_2$；

(iii) 对(ii)中的 E，F，满足 $\mu^*(E)=\mu(F)$。

证 (i) 对任何 $N\in\boldsymbol{N}$，由定义，存在 $E\in\boldsymbol{R}$，$\mu(E)=0$，使得 $N\subset E$。但 $\mu^*(E)=\mu(E)=0$，μ^* 是 $\boldsymbol{R}^*$ 上完全测度，所以 $N\in\boldsymbol{N}_{\mu^*}$。由于 $\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{R}^*$，所以 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{N})\subset\boldsymbol{R}^*$。

反之，对任何 $E\in\boldsymbol{R}^*$，由定理 4 或 5，存在 $F\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}$，$N\in\boldsymbol{N}_{\mu^*}$(即 $\mu^*(N)=0$)，使得 $E=F\cup N$。而对于 $N\in\boldsymbol{N}_{\mu^*}$，再用定理 4 或 5，$N=F_1-N_1$，$F_1\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}$，$N_1\in\boldsymbol{N}_{\mu^*}$。由于

$$0=\mu^*(N)=\mu^*(F_1-N_1)=\mu^*(F_1)=\mu(F_1)$$

所以 $N\in\boldsymbol{N}$。从而 $E=F\cup N\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{N})$，即 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{N})\supset\boldsymbol{R}^*$，因此 $\boldsymbol{R}^*=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{N})$。从上面证明中我们还得到 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}_{\mu^*}$。

至于(ii)、(iii)可由定理 5 以及等式 $\mu^*(E)=\mu^*((F\cup N_1)-N_2)=\mu^*(F\cup N_1)=\mu^*(F)=\mu(F)$ 立即得到。证毕。

定理 7 表明，对于给定在 σ-环 $\boldsymbol{R}$ 上 σ-有限测度 μ，它的 Caratheodory 扩张 $\boldsymbol{R}^*$、μ^* 可以用下面的所谓增补法得到。

“增补法”是这样的：设 $\boldsymbol{R}$ 是 X 上的 σ-环，μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的测度(一般说来是非完全的)。$\boldsymbol{N}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中一切 μ 测度为零的集的一切子集全体，$\boldsymbol{R}'$ 表示一切形为 $(F\cup N_1)-N_2$($F\in\boldsymbol{R}$，N_1、$N_2\in\boldsymbol{N}$)的集全体所成的集类。在 $\boldsymbol{R}'$ 上引入 μ'，当 $E=(F\cup N_1)-N_2$ 时，规定

$$\mu'(E)=\mu(F)$$

易知(希读者证明) $\boldsymbol{R}'(\supset\boldsymbol{R})$ 是 X 上的 σ-环，并且 μ' 是 $\boldsymbol{R}'$ 上的测度，μ' 还是 $\boldsymbol{R}$ 上 μ 延拓出来的 $\boldsymbol{R}'$ 上的完全测度。

定理 7 表示，当 $\boldsymbol{R}$ 是 σ-环，μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上 σ-有限测度时，必有 $\boldsymbol{R}^*=\boldsymbol{R}'$，$\mu^*=\mu'$。从增补法可以看出：当 μ 是 σ-环上完全测度时，那末 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}'$，$\mu=\mu'$。

当 $\boldsymbol{R}$ 是 σ-环，但 $\boldsymbol{R}$ 上测度 μ 不是 σ-有限的测度时，一般只

能得到 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{R}'\subset\boldsymbol{R}^*$，而 μ^* 是 μ' 的延拓．下面举例说明确实会发生 $\boldsymbol{R}'\neq\boldsymbol{R}^*$ 的情况．

例 8 设 X 是直线，$\boldsymbol{R}$ 是由 X 中有限点集、可列点集等张成的 σ-代数(当然是 σ-环)．$\boldsymbol{R}$ 中的集 E 或是空集、或是有限集、或是可列集、或是它们的余集．$\mu(E)$ 是 $E(\in\boldsymbol{R})$ 中所含点的个数(当 E 是无限集时，$\mu(E)=\infty$)．显然，μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上完全测度，所以 $\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{R}$，$\mu'=\mu$．

现在看 $\boldsymbol{R}^*$：由于 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 是直线上一切子集全体．$\boldsymbol{R}^*$ 中除去 $\boldsymbol{R}$ 中集外还有那些类型的集呢？我们来证明 $\boldsymbol{R}^*=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$：为此，我们只要证明直线上不属于 $\boldsymbol{R}$ 的集 E 也满足 Caratheodory 条件即可．显然，E 不在 $\boldsymbol{R}$ 中的充要条件是 E 及 E 的余集都是不可列的无限集，因此对任何 $F\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$，不管 $\mu^*(F)$ 是有限、无限，易知总有
$$\mu^*(F)=\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E)$$
即 $\boldsymbol{R}^*=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})\neq\boldsymbol{R}'$．

4．延拓的唯一性 前面已多次指出，我们总希望将给定在环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度延拓到某个 σ-环上，以便能有效地讨论极限，并且希望扩张的 σ-环越大越好，以便更多的函数可以积分．Caratheodory 条件提供了一种一般的延拓方法，并得到相应的 σ-环 $\boldsymbol{R}^*$ 以及 $\boldsymbol{R}^*$ 上的完全测度 μ^*．这是问题的一个方面．但我们必须注意到 $\boldsymbol{R}^*(\supset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}))$ 这个 σ-环是依赖于测度 μ 的集类(因为 Caratheodory 条件中要用 μ^*，而 μ^* 是由 μ 决定的)，所以严格地说，应记 $\boldsymbol{R}^*$ 为 $\boldsymbol{R}^*_\mu$．今如在 $\boldsymbol{R}$ 上给了两个测度 μ、ν，这样，相应地产生 $\boldsymbol{R}^*_\mu$、$\boldsymbol{R}^*_\nu$ 以及 μ^*、ν^*．自然就发生如下问题：ν^* 在 $\boldsymbol{R}^*_\mu$ 上或 μ^* 在 $\boldsymbol{R}^*_\nu$ 上是否都有意义？显然，一般地说．$\boldsymbol{R}^*_\mu\neq\boldsymbol{R}^*_\nu$．由此可知，在发生同时需要讨论 $\boldsymbol{R}$ 上多个测度时，例如，假设在 $\boldsymbol{R}$ 上 $\mu(E)<\nu(E)(E\in\boldsymbol{R})$ 成立，延拓后，对 μ^*，ν^*，是否能保持这个不等式，这类问题可能就失去意义．所以，在很多场合，我们总把 μ^* 只限制

定义在 $\boldsymbol{R}_\mu^*$ 的子 σ-环 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$上. 因为 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$是 σ-环,能有效地保证讨论极限,更因为 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 是 $\boldsymbol{R}$ 按集合论方法(与有没有测度无关)引出的扩张,而它对 $\boldsymbol{R}$ 上一切 μ 的 μ^* 都有意义. 据此,尽管 μ^* 限制在 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 上已可能不再是完全的测度,一般文章中都用 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$作为 μ^* 的定义域.

现在给出测度唯一性定理.

定理 8 设 $\boldsymbol{R}$是 X 的某些子集所成的环,$\mu_k(k=1,2)$ 是$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$上两个测度,如果 μ_k 在 $\boldsymbol{R}$ 上都是 σ-有限的,且对任何 $E\in\boldsymbol{R}$, $\mu_1(E)=\mu_2(E)$①,那末在 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$上 $\mu_1=\mu_2$.

证 设 $E\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$,满足如下条件:(i)有一列 $E_n\in\boldsymbol{R}$, $\mu_1(E_n)<\infty$,使 $E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$;(ii)对一切 $A\in\boldsymbol{R}$,当 $\mu_1(A)<\infty$ 时,$\mu_1(A\cap E)=\mu_2(A\cap E)$. 这种集$E$的全体记为 $\boldsymbol{M}$.

当 $E\in\boldsymbol{R}$ 时,由于 μ_1 在 $\boldsymbol{R}$ 上是 σ-有限的,所以E满足条件(i),又由于 μ_1、μ_2 在 $\boldsymbol{R}$ 上相等,所以(ii)也满足. 因此 $E\in\boldsymbol{M}$,即 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{M}$,再证在 $\boldsymbol{M}$ 上 μ_1 与 μ_2 相等. 当 $E\in\boldsymbol{M}$ 时,由条件(i),有一列 $E_n\in\boldsymbol{R}$, $\mu_1(E_n)<\infty$使$E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$,显然可以做到使得$\{E_n\}$中任何两个不相交. 因此,由 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_n\cap E)$和条件(ii) $\mu_1(E_n\cap E)=\mu_2(E_n\cap E)$立即得到

$$\mu_1(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_1(E\cap E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_2(E\cap E_n)=\mu_2(E)$$

最后再证$\boldsymbol{M}$是单调类. 设$\{F_m\}$是$\boldsymbol{M}$中一列单调的集,由于每个 F_m 满足条件(i),所以有 $\boldsymbol{R}$ 中一列集 $E_n^{(m)}$使 $\mu_1(E_n^{(m)})<\infty$,而

① 其实只要假设对满足 $\mu_1(E)<\infty$的集成立,定理 8 就成立.

且 $F_m\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n^{(m)}$. 因此 $\lim_{m\to\infty}F_m\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n^{(m)}$. 这就是说 $\lim_{m\to\infty}F_m$ 满足条件(i). 又由于当 $A\in\mathbf{R}$, $\mu_1(A)<\infty$ 时

$$\mu_1(A\cap F_m)=\mu_2(A\cap F_m),$$

由 § 2 定理 1 的(v)和(vi)以及 $\mu_1(A)<\infty$, 有

$$\mu_1(A\cap\lim_{m\to\infty}F_m)=\mu_2(A\cap\lim_{m\to\infty}F_m)$$

因此 $\lim_{m\to\infty}F_m\in\boldsymbol{M}$, 即 $\boldsymbol{M}$ 是单调类. 再由 § 1 定理 4 的系可知 $\boldsymbol{M}\supset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 所以在 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 上 $\mu_1=\mu_2$. 证毕.

习　　题

1. 设 X 是可列无限集, $X=\{x_1,x_2\cdots x_n,\cdots\}$, $\boldsymbol{R}$ 是 X 中有限子集所成的环. 对任何 $E\in\boldsymbol{R}$, $\mu_1(E)$ 是 E 中点的个数, $\mu_2(E)=a\mu_1(E)$ (a 是常数). 证明 μ_1^*、μ_2^* 都是 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 上测度.

2. 设 $\boldsymbol{R}$ 是 X 的某些子集所成的 σ-环, μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的测度. 证明 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 上的集函数

$$\mu^*(E)=\inf\{\mu(F)\mid E\subset F\in\boldsymbol{R}\},\ E\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$$

是外测度.

3. 设 $\boldsymbol{R}$ 是 X 的某些子集所成的 σ-环, μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的测度. 作 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 上的集函数 μ_* 如下: 当 $E\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 时

$$\mu_*(E)=\sup\{\mu(F)\mid E\supset F\in\boldsymbol{R}\}$$

称 μ_* 为内测度, 试讨论内测度的各种性质.

4. 设 $\boldsymbol{R}$ 是 X 的某些子集所成的代数, μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的测度并且 $\mu(X)<\infty$, 定义

$$\mu_*(E)=\mu(X)-\mu^*(X-E),\ E\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$$

称 μ_* 为内测度, 讨论 μ_* 的各种性质. 当 $\boldsymbol{R}$ 是 σ- 代数时讨论这里的 μ_* 与第 3 题中定义的 μ_* 的关系.

5. 设 X 是一集, $\boldsymbol{R}$ 是 X 的某些子集所成的 σ-代数, μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的有限测度, μ_* 是 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 上的内测度: 当 $E\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ 时 $\mu_*(E)=\sup\{\mu(F)\mid E\supset F\in\boldsymbol{R}\}$.

证明 $E\in\boldsymbol{R}^*$ 的充要条件是 $\mu^*(E)=\mu_*(E)$.

6. 设 $\boldsymbol{R}$ 是 X 的某些子集所成的环, μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上测度. 任取 $E\subset X$, 记 $\boldsymbol{R}_E=\{F\mid F\in\boldsymbol{R},\ F\subset E\}$, μ_E 是 μ 在环 $\boldsymbol{R}_E$ 上的限制. $\boldsymbol{R}_E^*$、μ_E^* 是 $\boldsymbol{R}_E$ 上 μ_E 按

Caratheodory 条件的扩张。举例说明 $R_E^* \neq R^* \cap E$.

7. 举例说明环 R 上测度 μ 按 Caratheodory 条件所得的扩张 R^*、μ^* 并不一定是 R、μ 的最大扩张.

8. 设 R 是 X 的某些子集所成的环，μ 是 R 上的测度.

(i) 证明 μ-零集全体是 R 的子环，并举例说明不必是 σ-环.

(ii) 举例说明 R 虽不是 σ-环，但 μ-零集全体却是 σ-环.

(iii) 如果 R 是 σ-环，那末 μ-零集全体必是 σ-环.

9. (i) 证明定理 7 中 R^* 中 E 可以表示成 $E=(F-N_1)\cup N_2(F\in S(R)$, N_1、$N_2\in N)$ 或者 $E=F\Delta N\ (F\in S(R),\ N\in N)$.

(ii) 去掉 μ 是 R 上 σ-有限的假设. 证明定理 4—6 对 R^* 中 σ-有限集 E 成立.

10. 设 R 是 X 的某些子集所成的环，μ 是 R 上测度. N 是一切 μ-零集的一切子集全体. R' 为一切 $E=(F\cup N_1)-N_2(F\in R,\ N_1$、$N_2\in N)$ 全体，并规定 $\mu'(E)=\mu(F)$. 证明 μ' 是 σ-环 R' 上完全测度. 即证明 (i) R' 是 σ-环；(ii) 定义 $\mu'(E)=\mu(F)$ 是确当的，即 μ' 在 E 上的值不依赖于表示 $E=(F\cup N_1)-N_2$ 的具体形式；(iii) μ' 是 R' 上完全测度.

11. 举例说明在习题 10 中，可以取 N 的一个真子集 N_1，作相应的 $R^\circ=\{E\,|\,E=(F\cup N_1)-N_2,\ F\in S(R),\ N_1,\ N_2\in N_1\}$，规定 $\mu^\circ(E)=\mu(F)$，使得 R° 是 σ-环，并且 R 是 R° 的真子集，而 μ° 是 R° 上测度.

12. 设 R 是 X 的某些子集所成的环，μ 是 $S(R)$ 上的 σ-有限测度. 举例说明当 μ 限制在 R 上时，μ 不是 R 上的 σ-有限测度

13. 设 R 是 X 的某些子集所成的环，μ_1、μ_2 是 $S(R)$ 上两个 σ-有限测度，并且对一切 $E\in R$，$\mu_1(E)=\mu_2(E)$，举例说明在 $S(R)$ 上可以 $\mu_1\neq\mu_2$ (即存在 $E\in S(R)$，使得 $\mu_1(E)\neq\mu_2(E)$).

§4 勒贝格测度、勒贝格-斯蒂阶测度

在 §3 中讲的是如何从给定的一般的环 R 上测度 μ，扩张成 σ-环 R^* 上测度 μ^*. 在这一节里将具体地讨论从直线上环 R_0 上给定的测度 m 扩张成 L(是 R^* 在此特殊情况下的专门记号)上的勒贝格(Lebesgue)测度 m^* 以及 m^* 的性质. 并且还要附带讨论勒贝格-斯蒂阶(Lebesgue-Stieltjes)测度. 鉴于勒贝格测度和勒

贝格-斯蒂阶测度的重要性，为了便于今后的查找，我们仍将扩张过程的基本定义和定理一一列出，因此本节也可以单独地阅读. 由于有许多定理的证明和 §3 中相应的一般定理证明相同，所以我们只对 §3 中没有的性质给出证明.

本节中如无特殊声明，始终假设 X 是实数直线 E^1.

1. 外测度 $m^*(g^*)$ 如前所说，$\boldsymbol{R}_0$ 是直线上有限的左开右闭区间所成的环. 在 §2 已经证明 m（或 g）是 $\boldsymbol{R}_0$ 上的测度. 作

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}_0)=\{E\mid E\subset X, \text{存在 } E_i\in\boldsymbol{R}_0, E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\}$$

$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}_0)$ 就是直线的一切子集全体所成的类. 对任何 $E\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}_0)$，规定

$$m^*(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}m(E_i)\mid E_i\in\boldsymbol{R}_0,\ E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right\}$$

显然，有如下结果.

引理 1 m^* 在 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}_0)$ 上具有如下性质：(i) $m^*(\varnothing)=0$；(ii)（非负性）对任何直线的子集 E，$m^*(E)\geqslant 0$；(iii)（单调性）对任何直线上的子集 E_1、E_2，如果 $E_1\subset E_2$，那末 $m^*(E_1)\leqslant m^*(E_2)$；(iv) 当 $E\in\boldsymbol{R}_0$ 时，$m^*(E)=m(E)$.

一般说来，m^* 在 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}_0)$ 上不具有可列可加性，甚至有限可加性也不满足（将在本节末给出例子来说明这一点）. m^* 只具有次可列可加性.

定理 1 设 $\{E_i\}$ 是直线上的任何一列子集，$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(E_i)$.

如果 $E\in\boldsymbol{R}_0$，那末直线上的任何子集 F 被 E 所分割的两个部分 $F\cap E$，$F-E$，m^* 在这两个部分上是具有可加性的，即成立着下

面定理:

定理 2 设 $E\in R_0$, F 是直线上的任何一个子集. 下式成立:

$$m^*(F)=m^*(F\cap E)+m^*(F-E)$$

注 $g(x)$ 是$(-\infty,\infty)$上单调增加右连续函数, 由 $g(x)$ 导出 $\boldsymbol{R}_0$ 上测度 g, 同样在 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}_0)$(即直线上一切子集全体)引入

$$g^*(E)=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}g(E_i)\mid E_i\in R_0, E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\}$$

引理 1、定理 1、2 对于 g^* 也成立(只要将 m^* 换为 g^* 即可).

2. 勒贝格和勒贝格-斯蒂阶测度 现在引入 m^*-可测集和 g^*-可测集概念.

定义 设 E 是直线上的一个子集, 如果对任何直线上的子集 F, 都有

$$m^*(F)=m^*(F\cap E)+m^*(F-E)$$

称 E 是 **m^*-可测集** 或称为**勒贝格可测集**, 简称为 **L-可测集**. L-可测集全体记为 $\mathbf{L}$.

定理 3 (i) 如果 $m^*(E)=0$, 那末 $E\in\mathbf{L}$;

(ii) $\mathbf{L}$ 是 σ-环(其实是 σ-代数), 并且 $\mathbf{L}\supset R_0$;

(iii) m^* 是 $\mathbf{L}$ 上的完全测度.

勒贝格可测集类 $\mathbf{L}$ 上的测度 m^* **称为勒贝格测度**. 今后在不发生混淆时, 总仍用 m 表示 m^*.

注 将本小节的定义中 m^* 换为 g^*, 就可引入 **g^*-可测集**, 或称为(关于 g 的)**勒贝格-斯蒂阶可测集**, 简称为(关于 g 的)**L-S 可测集**①. (关于 g 的)L-S可测集全体记为 $\mathbf{L}^g$. 将定理 3 中 m^*、$\mathbf{L}$ 换为 g^*、$\mathbf{L}^g$ 时仍成立. 通常称 $\mathbf{L}^g$ 上的测度 g^* 为(由 g 导出的)**勒贝格-斯蒂阶测度**. 今后在不发生混淆时, 总仍用 g 表

---

① 在只有一个 g 出现的场合,"关于 g 的"这个说明词常省掉.

示 g^*.

因为对 $(-\infty, \infty)$ 上无论什么单调增加右连续函数 $g(x)$，总有 $L^g \supset R_0$，因而 $L^g \supset S(R_0)$，而 $S(R_0)$ 是由 R_0 唯一确定的，并不依赖于 $g(x)$. 所以我们经常把勒贝格-斯蒂阶测度(特例是勒贝格测度)限制在 σ-环 $S(R_0)$ 上. $S(R_0)$ 是直线上测度理论中特别重要的一个集类.

3. 波赖尔(Borel)集与勒贝格可测集

定义　$S(R_0)$ 中的每个集称为直线上的波赖尔(Borel)集. 常记 Borel 集全体 $S(R_0)$ 为 $\boldsymbol{B}$.

下面将给出一些常见的 Borel 集，并给出它们的勒贝格测度.

定理 4　(i) Borel 集类 $\boldsymbol{B}$(即 $S(R_0)$)是直线上 σ-代数;

(ii) 单点集、有限集、可列集都是 Borel 集，并且它们的勒贝格测度是零;

(iii) 区间 $<a, b>$(a、b 可取 $-\infty$, ∞)、开集 G 是 Borel 集，并且 $m(<a, b>) = b-a$, $m(G) = \sum\limits_{\nu}(b_\nu - a_\nu)$，其中 $\{(a_\nu, b_\nu)\}$ 是 G 的构成区间全体;

(iv) 闭集 F 是 Borel 集，当 $F \subset (a, b)$(有限开区间)时，$m(F) = (b-a) - m((a, b) - F)$；当 F 是无界闭集时，$m(F) = \lim\limits_{n\to\infty} m(F \cap [-n, n])$.

证　(i) 因为 $(-\infty, \infty) = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}(n, n+1]$，所以 $(-\infty, \infty) \in \boldsymbol{B}$，因此 $\boldsymbol{B}$ 是 σ-代数.

(ii) 因为单点集 $\{a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right]$，所以 $\{a\} \in \boldsymbol{B}$，从而有限集、可列集均属于 σ-代数 $\boldsymbol{B}$.

由单调性，$m(\{a\}) \leqslant m\left(\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right]\right) = \frac{2}{n}$ 再令 $n \to \infty$，立

即得到 $m(\{a\})=0$. 再由测度的可列可加性,易知有限集、可列集的勒贝格测度是零.

(iii) 如果 a、b 都是有限数,那末 $[a,b]=(a,b]\cup\{a\}$, $(a,b)=(a,b]-\{b\}$, $[a,b)=[a,b]-\{b\}$. 由 $\boldsymbol{B}$ 是环的性质立即知道 $\langle a,b\rangle$ 是 Borel 集. 再利用测度的可加性以及单点集的勒贝格测度是零就得到 $m(\langle a,b\rangle)=b-a$.

如果 $\langle a,b\rangle$ 的 a、b 中至少有一个是无限, 例如 $a=-\infty$, $\langle a,b\rangle$

$=(-\infty,b]=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(b-n-1,b-n]$, 所以 $(-\infty,b]$ 是 Borel 集. 再

由测度的可列可加性得到 $m((-\infty,b])=\sum\limits_{n=0}^{\infty}m((b-n-1,b-n])$

$=\infty=b-a$. 同样可证其它无限区间的情况.

如果 G 是开集, 因此 G 可以表示成它的构成区间之和: $G=\bigcup(a_\nu,b_\nu)$ ($\{(a_\nu,b_\nu)\}$ 是 G 的构成区间全体). 所以 G 是 Borel 集, 并且 $m(G)=\sum\limits_{\nu}m((a_\nu,b_\nu))=\sum\limits_{\nu}(b_\nu-a_\nu)$.

(iv) 当 F 是闭集时, $E'-F$ 是开集. 但 $\boldsymbol{B}$ 是代数, 所以 F 是 Borel 集.

如果 $F\subset(a,b)$(有限区间). 那末从第一章 §4 定理 7 得到 $(a,b)-F$ 是开集. 又由于 $m((a,b))=b-a<\infty$, 由测度的可减性得到 $m(F)=b-a-m((a,b)-F)$.

如果 F 是无界的闭集,那末对任何自然数 n, $F_n=F\cap[-n,n]$ 也是闭集,并且 $F_n\subset F_{n+1}(n=1,2,\cdots)$, $F=\lim\limits_{n\to\infty}F_n$. 利用测度的极限性质(本章 §2 定理 1 的(V)) 就得到 $m(F)=\lim\limits_{n\to\infty}m(F_n)$, 证毕.

在一般的测度理论中,我们已经较详细地讨论了 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 和 $\boldsymbol{R}^*$ 的关系(参见 §3 的第三小节). 把这些关系(§3 的定理 4-7)具体化为勒贝格测度时,虽也可以列出一些定理. 但我们不这样做.

因为对于勒贝格测度有下面更具体的结果，可以用 $\boldsymbol{B}(=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0))$ 中的开、闭集来刻划勒贝格可测集.

引理 2 直线上任何子集 E 的勒贝格外测度 $m^*(E)$ 是包含 E 的开集 O 的勒贝格测度 $m(O)$ 的下确界，即

$$m^*(E)=\inf\{m(O)\mid O\supset E, O\text{是开集}\} \tag{4.1}$$

证 由 m^* 的单调性，$m^*(E)\leqslant m^*(G)=m(G)$（$G$ 是包含 E 的任一开集）. 所以

$$m^*(E)\leqslant\inf\{m(O)\mid O\supset E, O\text{ 是开集}\} \tag{4.2}$$

由此可知，只要再证与(4.2)相反的不等式成立即可.

如果 $m^*(E)=\infty$，从(4.2)知道(4.1)必成立. 因此下面不妨假设 $m^*(E)<\infty$ 的情况下来证明.

这时，对任何 $\varepsilon>0$，有一列 $E_i\in\boldsymbol{R}_0$，使 $E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$，而且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}m(E_i)\leqslant m^*(E)+\varepsilon$. 每个 E_i 可以有初等分解 $E_i=\bigcup\limits_{j=1}^{n_i}E_i^{(j)}$，$m(E_i)=\sum\limits_{j=1}^{n_i}m(E_i^{(j)})$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_i}m(E_i^{(j)})\leqslant m^*(E)+\varepsilon$. 因为 $E_i^{(j)}$（$i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots,n_i$）总共不过可列个，设这一列集是 $(a_n, b_n]$. 上面的不等式就是

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)\leqslant m^*(E)+\varepsilon$$

取 $O=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n, \ b_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)$，显然 $O\supset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, \ b_n]=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{n_i}E_i^{(j)}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\supset E$. 由测度的次可列可加性，得到

$$m(O)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m\left(\left(a_n, b_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n+\frac{\varepsilon}{2^n}-a_n\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)+\varepsilon\leqslant m^*(E)+2\varepsilon$$

由这不等式即知 $\inf\{m(O)|O$ 是包含 E 的开集$\}\leqslant m^*(E)+2\varepsilon$. 令 $\varepsilon\to 0$, 并结合(4.2)式就得到(4.1). 证毕.

定理 5 集 $E\subset E^1$ 成为勒贝格可测集的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$, 有开集 $O\supset E$ 使得

$$m^*(O-E)<\varepsilon \tag{4.3}$$

证 设 $E\in\mathbf{L}$, 如果 $m(E)<\infty$, 由引理 2, 必有开集 $O\supset E$ 使得 $m(O)<m(E)+\varepsilon$. 由于 $O=(O-E)\cup E$ 及 m 的可加性, 得到

$$m(O-E)+m(E)<m(E)+\varepsilon$$

因此(4.3)式成立; 在 $m(E)=\infty$ 时, 记 $E_n=E\cap(-n, n)$, 由上所述, 必有 $O_n\supset E_n$, O_n 是开集, 且 $m(O_n-E_n)<\frac{\varepsilon}{2^n}$, 这时取 $O=\bigcup_{n=1}^{\infty}O_n$

O 是包含 E 的开集, 而且 $O-E=\bigcup_{n=1}^{\infty}O_n-\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(O_n-E_n)$,

所以

$$m(O-E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m(O_n-E_n)<\varepsilon$$

反过来, 如果集 E 满足定理的条件, 那末对自然数 n, 有开集 $O_n\supset E$, 且使 $m^*(O_n-E)<\frac{1}{n}$. 记 $O=\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$, 就有 $O\in\mathbf{S}(\mathbf{R}_0)$, 显然 $O\supset E$, 由 m^* 的单调性得 $m^*(O-E)<m^*(O_n-E)<\frac{1}{n}$, 所以 $m^*(O-E)=0$. 由定理 3 的(i), $O-E\in\mathbf{L}$. 由 $O\in\mathbf{L}$, $O-E\in\mathbf{L}$, 及 $O\supset E$, 立即知 $E=O-(O-E)\in\mathbf{L}$. 证毕.

定理 6 集 $E\subset E^1$ 成为勒贝格可测集的充要条件是对任何

$\varepsilon>0$，有闭集 $F\subset E$ 使得 $m^*(E-F)<\varepsilon$.

证　如果 $E\in\mathbf{L}$，就有 $E^c=(-\infty,\infty)-E\in\mathbf{L}$. 由定理 5，必有开集 $O\supset E^c$ 使 $m(O-E^c)<\varepsilon$. 记 $F=O^c=(-\infty,\infty)-O$，由于开集的余集是闭集，所以 F 是闭集，又由 $O\supset E^c$ 得 $E\supset O^c=F$. 注意到关系式 $O-E^c=E-O^c$，就得到 $m(E-F)<\varepsilon$.

反过来如果集 E 满足定理条件，则对 $\varepsilon>0$，有闭集 $F\subset E$，使 $m^*(E-F)<\varepsilon$. 因为 F^c 是开集，$F^c\supset E^c$，又 $E-F=E\cap F^c=F^c-E^c$，所以 E^c 满足定理 5 的条件，因此 $E^c\in\mathbf{L}$，从而 $E\in\mathbf{L}$，证毕.

定理 7　直线上子集 E 是勒贝格可测的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$，有开集 O 及闭集 F 使得 $O\supset E\supset F$ 且 $m(O-F)<\varepsilon$.

证　如果 $E\in\mathbf{L}$，由定理 5、6，对 $\varepsilon>0$，有开集 O 及闭集 F，使 $O\supset E\supset F$，且 $m(O-E)<\frac{\varepsilon}{2}$，$m(E-F)<\frac{\varepsilon}{2}$. 由 $O-F=(O-E)\cup(E-F)$ 即得 $m(O-F)=m(O-E)+m(E-F)<\varepsilon$.

反过来，如果 E 满足定理的条件，那末对 $\varepsilon>0$ 可找到开集 O 及闭集 F 使得 $O\supset E\supset F$，$m(O-F)<\varepsilon$. 这时 $m^*(O-E)\leqslant m^*(O-F)=m(O-F)<\varepsilon$，故由定理 5 即知 $E\in\mathbf{L}$. 证毕.

定义　直线上的子集 E 如果可以表示成一列开集的通集，就称 E 是 G_δ 型集或**内限点集**. 如 E 可以表示成一列闭集的和集，就称 E 是 F_σ 型集或**外限点集**.

由定理 4，开集和闭集都是勒贝格可测集，而且都是 Borel 集. 因此 G_δ 型和 F_σ 型的集也都是勒贝格可测的，而且都是 Borel 集.

定理 8　如果 $E\in\mathbf{L}$，那末必定有 G_δ 型集 O 及 F_σ 型集 H，使得 $O\supset E\supset H$，而且 $m(O-E)=m(E-H)=0$.

证　因为 $E\in\mathbf{L}$，由定理 7，对自然数 n，有包含 E 的开集 O_n，使 $m(O_n-E)<\frac{1}{n}$，同样又有闭集 $F_n\subset E$，使 $m(E-F_n)<\frac{1}{n}$. 这

时，$O=\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$ 是 G_δ 型集，$H=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ 是 F_σ 型集，显然 $O\supset E\supset H$。由 m 的单调性，$m(O-E)\leqslant m(O_n-E)<\frac{1}{n}$，$m(E-H)\leqslant m(E-F_n)<\frac{1}{n}$，令 $n\to\infty$，就得到

$$m(O-E)=m(E-H)=0$$

证毕.

由于 G_δ 型集及 F_σ 型集都是 Borel 集，由定理 8 即得下面的

定理 9 任何勒贝格可测集 E 必是某个 Borel 集与勒贝格零集① 的和集，同时它又是一个 Borel 集与勒贝格零集的差集.

定理 9 就相当于一般测度论中的 §3 的定理 4.

定理5—9(特别是定理7)是常被用来判断直线上的子集 E 是否勒贝格可测. 另外，引理2、定理5—9对勒贝格-斯蒂阶测度也成立.

这里我们还要指出一点：确实有不是 Borel 集的勒贝格可测集. 如果仅仅要求证明这个事实，还是比较容易做到的. 例如用势的知识可以证明直线上 Borel 集全体的势是 $\aleph$，而勒贝格可测集的势为 $2^{\aleph}$（因为 Cantor 集是非空完全集，它的势是 $\aleph$，所以它的一切子集所成的集的势为 $2^{\aleph}$. 又因为 Cantor 集的勒贝格测度为零，所以它的一切子集都是勒贝格可测集，因此 $\overline{\overline{L}}\geqslant 2^{\aleph}$. 另一方面直线上一切子集全体的势也是 $2^{\aleph}$，所以 $\overline{\overline{L}}=2^{\aleph}$）. 但 $2^{\aleph}>\aleph$，所以勒贝格可测集比 Borel 可测集要多得多！可是要想给出一个具体的集，它是勒贝格可测集而非 Borel 集确远比"证明"要困难得多. 苏联学者鲁津(Н. Н. Лузин)、阿列克塞德洛夫(П. С. Александров)以及苏斯林(М. Я. Суслин)等在深入研究 Borel 集类(它与连续性有深刻联系)结构基础上发现了比 Borel 集类广泛得多的 A 集类（它借助于 A 运算产生的）——也称为Суслин集类，

① 勒贝格零集是指勒贝格测度等于零的集。

而每个 A 集都是勒贝格可测的. A 运算的定义开始是很复杂的，后来 Лузин 给出了 A 集类许多较简便的等价定义，例如 A 集类与位于维数高的空间中 G_δ 集的投影所成的集类相同，也与无理数的连续象类相同等. 近来 Суслин 集在算子代数理论中也有所讨论.

4. 勒贝格测度的平移、反射不变性 对于任何一个实数 α，作 $E^1\to E^1$ 的映照 $\tau_\alpha: x\longmapsto x+\alpha$. 它是直线上的一个平移. 一个集 $E\subset E^1$ 经过平移 α 后所得的集记为 $\tau_\alpha E=\{x+\alpha\,|\,x\in E\}$. 现在我们讨论在平移变换下，集的测度有什么变化. 显然当 $E\in \mathbf{R}_0$ 时，$\tau_\alpha E\in \mathbf{R}_0$，而且 $m(E)=m(\tau_\alpha E)$.

定理 10 对任何 $E\subset E^1$，成立 $m^*(E)=m^*(\tau_\alpha E)$，而且当 $E\in \mathbf{L}$ 时 $\tau_\alpha E\in \mathbf{L}$.

证 因为对任何一列 $E_i\in \mathbf{R}_0$，$E\subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$，同时就有 $\tau_\alpha E_i\in \mathbf{R}_0$ 以及 $\tau_\alpha E\subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\tau_\alpha E_i)$，所以

$$
\begin{aligned}
m^*(E) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)\,\middle|\, E_i\in \mathbf{R}_0,\ E\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right\}\\
&\geqslant m^*(\tau_\alpha E)
\end{aligned}
$$

但 $\tau_\alpha E$ 在平移 $\tau_{-\alpha}$ 后就是 E，所以 $m^*(\tau_\alpha E)\geqslant m^*(E)$. 这样就得到 $m^*(E)=m^*(\tau_\alpha E)$.

如果 $E\in \mathbf{L}$，那末对任何 $F\subset E^1$ 成立

$$
m^*(F)=m^*(F\cap E)+m^*(F-E). \tag{4.4}
$$

由于 $\tau_\alpha(F\cap E)=\tau_\alpha F\cap \tau_\alpha E$，$\tau_\alpha(F-E)=\tau_\alpha F-\tau_\alpha E$，因此从(4.4)式得到

$$
m^*(\tau_\alpha F)=m^*(\tau_\alpha F\cap \tau_\alpha E)+m^*(\tau_\alpha F-\tau_\alpha E) \tag{4.5}
$$

在(4.5)式中，$\tau_\alpha F$ 是任意集，因此 $\tau_\alpha E\in \mathbf{L}$. 证毕.

定理 10 说明，集 $E\subset E^1$ 经平移后，它的勒贝格外测度不变. 而勒贝格可测集经平移后仍为勒贝格可测集（当然它的勒贝格测度也不变）. 这个性质称为勒贝格测度的平移不变性. 平移不变性是建立调和分析的基础.

用类似的方法可以证明勒贝格测度还具有反射不变性，就是说，如果记 τ 是 $E^1\to E^1$ 的如下映照，$\tau: x\longmapsto -x, \tau E=\{-x\mid x\in E\}$. 那末，对任何 $E\subset E^1$，$m^*(E)=m^*(\tau E)$，而且当 $E\in \mathbf{L}$ 时，$\tau E\in \mathbf{L}$. 我们把它的证明留给读者去做.

5. 勒贝格不可测集 是否直线上每个集都是勒贝格可测集？回答是否定的. 下面我们要作一个不是勒贝格可测的集. 我们要注意造这样的集是不很容易的，因为我们通常造集往往都是从区间出发经过一系列和，通，差等运算得出的，而这样的集都是 Borel 集，当然总是勒贝格可测的，因此要造不可测集必须从别的方面人手，下面我们是利用勒贝格测度的平移不变性来造.

我们的想法是这样的：在直线上造一个集 Z，要求对于 Z，可取这样的一列数 $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n, \cdots$，使得 Z 经平移 τ_{r_n} 后得到的集 $Z_n=\tau_{r_n}Z$ 有下面的性质：

(i) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ 包含一个区间（例如 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n\supset[0,1]$）.

(ii) $\{Z_n\}$ 是一列互不相交的集，而且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ 是有界集（例如 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n\subset[-1,2]$）.

如果 Z 具有这样两条性质，那末 Z 就一定不是勒贝格可测集. 因为如果 Z 是勒贝格可测的，那末 Z_n 也是勒贝格可测的，而且 $m(Z_n)=m(Z)$. 由于 Z_n 是两两不交的，所以

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}Z_n\right)=m(Z_1)+m(Z_2)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}m(Z) \qquad (4.6)$$

又因为$\bigcup_{n=1}^{\infty}Z_n$是有界集，并且它包含一个长度不为零的区间，因此，由m的单调性可知，存在正数α、β，$\alpha\leqslant m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}Z_n\right)\leqslant\beta$. 从这个式子及(4.6)式就发现$m(Z)$既必须等于零又必须大于零. 这个矛盾就说明$Z$必定不是勒贝格可测集.

现在我们具体地造这样的集Z: 对于$[0,1]$中的两个数ξ与η，如果$\xi-\eta$是有理数，就称ξ与η是"相亲"的，否则就称ξ与η是"互斥"的. 显然，当ξ与η相亲时η与ξ相亲，与同一数相亲的两个数也是相亲的. 对任何$\xi\in[0,1]$，把$[0,1]$中与ξ相亲的数全体记为$E(\xi)$，称它是一个"相亲集"①. 由上所述，对于任何两个相亲集$E(\xi)$和$E(\eta)$，当ξ与η相亲时，$E(\xi)=E(\eta)$，否则，$E(\xi)\cap E(\eta)=\varnothing$. 所以不同的相亲集是不相交的. 这样一来，就把$[0,1]$区间分解成一族两两不交的相亲集的和集，我们在每个相亲集中取一个代表数组成一个集Z②(当$E(\xi)=E(\eta)$时，尽管ξ可以不等于η，但这是同一个相亲集，我们只取这集中的一个代表数). 换句话说，对任何$\xi\in[0,1]$，$E(\xi)\cap Z$是一个单元素集.

接着我们把$[-1,1]$中的有理数全体排成一列$r_1, r_2, r_3, \cdots$，并记$Z_n=\tau_{r_n}Z$. 我们证明这样作出的Z_n确实具有前面说的性质(i)和(ii).

(i) 对于任何$\xi\in[0,1]$，$E(\xi)\cap Z$是单元素集，设为$\{\eta\}$，$\eta\in Z$. 因此$\xi-\eta$是有理数，由于ξ，η都在$[0,1]$中，所以$\xi-\eta\in[-1,1]$，

① 记ξ与η"相亲"为$\xi\sim\eta$，那末这是第一章§3中所提到的一种等价关系，$E(\xi)$就是等价类$\tilde{\xi}$.

② 严格说来，这里要用到第一章中的Zermelo选取公理.

因此 $\xi-\eta$ 是 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ 中的某一个，设 $\xi-\eta=r_{n_0}$. 可见 $\xi\in\tau_{r_{n_0}}Z=Z_{n_0}$. 这样，我们就证明了任何 $\xi\in[0,1]$必在 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}Z_n$中，即$[0,1]\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}Z_n$.

(ii) Z_n 这一列集是两两不交的，因为如果存在两个不同的自然数 l 及 n，使 $\xi\in Z_l\cap Z_n$，那末 $\xi-r_l$, $\xi-r_n$ 都属于 Z. 但这两个数属于同一个相亲集，且因 $l\neq n$，必定 $r_l\neq r_n$. 所以 $\xi-r_l$ 与 $\xi-r_n$ 是不同的数，但由 Z 的作法，它与每个相亲集的通集只有一个元，这就产生了矛盾. 这样证明了$\{Z_n\}$这一列集是互不相交的. 另外由 $Z\subset[0,1]$, $r_n\in[-1,1]$即知 $Z_n\subset[-1,2]$，所以$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}Z_n\subset[-1,2]$.

由性质(i)(ii)可知Z确是勒贝格不可测的集.

由此可知 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}_0)$上的外测度 m^* 不具有可列可加性，因为$\{Z_n\}\subset\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}_0)$，如果 m^* 有可列可加性，那末

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}Z_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m^*(Z_n)=\sum_{n=1}^{\infty}m^*(Z)$$

和前面所说的情况一样，自然会发生 $m^*(Z)$既大于零又等于零的矛盾.

6. n 维实空间中的勒贝格测度 我们考察 n 维实空间

$$E^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in E^1\}$$

中的集. 对于 $2n$ 个实数 $a_1,\cdots,a_n$; $b_1,\cdots,b_n$($-\infty<a_i\leqslant b_i<\infty$, $i=1,2,\cdots,n$)，作集

$$\begin{aligned}&(a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n]\\&=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid a_i<x_i\leqslant b_i,\ i=1,2,\cdots,n\}\end{aligned}$$

这种形式的集全体仍记为 $\boldsymbol{P}$，在 $\boldsymbol{P}$ 上定义集函数 m 如下:

$$m((a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n]) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

它表示 n 维的体积.

由 $\boldsymbol{P}$ 中有限个集的和集全体所成的集类仍记为$\boldsymbol{R}_0$. 可以象前面一样证明 $\boldsymbol{R}_0$ 是个环, 而且 $\boldsymbol{R}_0$ 中的元可以分解成有限个两两不交的 $\boldsymbol{P}$ 中集的和集, 这样的分解称为初等分解. 对于 $E\in\boldsymbol{R}_0$, 如果 $E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ 是 E 的初等分解($E_i\in\boldsymbol{P}$, $i=1, 2, \cdots, n$, $E_1, \cdots, E_n$ 两两不交). 就令 $m(E)=\sum_{i=1}^{n}m(E_i)$. 这时, $m(E)$的值只与E有关, 而与E的初等分解的方式无关. 这时, m 是环 $\boldsymbol{R}_0$ 上的测度. 由这个测度m可引出外测度 m^*, 并有 m^*-可测集的概念. 这样的 m^*-可测集称为(n 维空间中的)勒贝格可测集. 它的测度仍用m表示, 仍记勒贝格可测集全体为 $\boldsymbol{L}$. 在第三章中我们将进一步讨论这种勒贝格测度.

习　题

1. 证明[0, 1]上 Cantor 集的勒贝格测度是零.

2. 设 $g(x)$是$(-\infty, \infty)$上单调增加右连续函数, $\boldsymbol{L}^g$ 是关于 g 的勒贝格-斯蒂阶可测集类, g 是 $\boldsymbol{L}^g$ 上勒贝格-斯蒂阶测度. 证明

(i) $g(\{a\})=g(a)-g(a-0)$; $g((a, b))=g(b-0)-g(a)$; $g([a, b])=g(b)-g(a-0)$; $g([a, b))=g(b-0)-g(a-0)$; 当开集$O=\bigcup_{\nu}(a_\nu, b_\nu)$($\{(a_\nu, b_\nu)\}$是 O 的构成区间全体)时, $g(O)=\sum_{\nu}(g(b_\nu-0)-g(a_\nu))$

(ii) 引理 2. 定理 5—9 对于 $\boldsymbol{L}^g$、g也成立.

3. (i) 视 $f(x)=x^3$ 为$(-\infty, \infty)\to(-\infty, \infty)$ 的映照. 证明 $f(x)$把直线上勒贝格可测集(测度是零的集)映射成勒贝格可测集(测度是零的集).

(ii) 视 $f(x)=x^2$ 为 $(-\infty,\infty)\longrightarrow(-\infty,\infty)$ 的映照．证明对于 $f(x)$，(i) 中结论也成立．

4. 设 $g(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上单调增加右连续函数．证明 $g(x)$ 能够产生出勒贝格可测集类 $\boldsymbol{L}$ 上的测度 g，并且存在常数 α，对一切 $E\in\boldsymbol{L}$，$g(E)=\alpha m(E)$ 成立的充要条件是 $g(x)=\alpha x+c$，这里 c 是常数．

5. **定义** 设 E 是直线上勒贝格可测集，$x_0\in E$．又设 (a,b) 是包含 x_0 的任一开区间，如果下列极限存在

$$d=\lim_{(a,b)\to x_0}\frac{m((a,b)\cap E)}{b-a}$$

称 d 是 E 在点 x_0 的密度．显然 $0\leqslant d\leqslant 1$．如果 $d=1$，称 x_0 是 E 的全密点．

(i) 点 a 是否是 $E=[a,b]$ 的有密度的点．

(ii) 作一个集 E，使它在给定点 x_0 具有密度，并且密度等于事先给定的值 $c(0<c<1)$．

6. 将习题 5 的定义中的勒贝格测度换为勒贝格-斯蒂阶测度 g，同样引入(相对于 g 的)密度

$$d=\lim_{(a,b)\to x_0}\frac{g((a,b)\cap E)}{g((a,b))}\qquad(g((a,b))\neq 0)$$

和(相对于 g 的)全密点概念．

试同样讨论习题 5 中的(i)、(ii)．

7. 设 E 是直线上勒贝格可测集，并且 $m(E)\neq 0$．证明：对任何 $c(0<c<1)$，必存在 (a,b)，使得

$$\frac{m(E\cap(a,b))}{b-a}>c$$

此外，证明上述结论对勒贝格-斯蒂阶测度也有类似结果(将 $m(E\cap(a,b))$ 换成 $g(E\cap(a,b))$，$b-a$ 换成 $g((a,b))$)．

8. 设 $g_1(x)$、$g_2(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 处处可微的函数，并且 $0\leqslant\frac{d}{dx}g_1(x)\leqslant\frac{d}{dx}g_2(x)$ 处处成立．证明 g_2 测度的零集必是 g_1 测度的零集．

9. 举例说明引理 2 中的开集 O 不能换为闭集

10. 试作一个 Borel 集 E，使得对任何开区间 (a,b) 都有 $m(E\cap(a,b))>0$，$m(E^c\cap(a,b))>0$．

11. 令 $\boldsymbol{O}$ 是直线上开集全体，$\boldsymbol{F}$ 是直线上有界闭集全体，作 $\boldsymbol{O}\cup\boldsymbol{F}$ 上的

集函数 μ 如下：当 $\{(a_\nu, b_\nu)\}$ 是互不相交的开区间时，

$$\mu\left(\bigcup_\nu (a_\nu, b_\nu)\right)=\sum_\nu (b_\nu-a_\nu)$$

当 $F\in\boldsymbol{F}$ 时，如果 $F\subset(a, b)$，那末规定 $\mu(F)=b-a-\mu((a, b)-F)$. 对一切直线上的有界集 E，定义

$$\mu^*(E)=\inf\{\mu(O)\mid E\subset O, O\in\boldsymbol{O}\},\ \mu_*(E)=\sup\{\mu(F)\mid F\subset E, F\in\boldsymbol{F}\}$$

当 $\mu^*(E)=\mu_*(E)$ 时，称 E 是可测集. 令 $\boldsymbol{L}'$ 是可测集全体. 证明 $\boldsymbol{L}'$ 是 $\boldsymbol{L}$ 中有界集全体，而且在 $\boldsymbol{L}'$ 上 $\mu^*=\mu_*=m$.

12. 设 E 是直线上勒贝格可测集，对每个 E，作平面上的集 $\widetilde{E}=\{(x, y)\mid -\infty<x<\infty, y\in E\}$，令 $\boldsymbol{R}=\{\widetilde{E}\mid E$ 是直线上勒贝格可测集$\}$. 在 $\boldsymbol{R}$ 上作集函数 $\widetilde{m}$ 如下：对任何直线上勒贝格可测集 E，

$$\widetilde{m}(\widetilde{E})=m(E)$$

问：$\widetilde{m}$ 是否是完全测度？$\boldsymbol{R}^*$ 是怎样的集类？

13. 证明勒贝格可测集经反射变换 $x\longmapsto -x$ 仍是勒贝格可测集，而且勒贝格测度不变.

14. E 是勒贝格可测集. 如果对一切实数 a，$m(\tau_a E\cap E)=0$，那末 $m(E)=0$.

15. 设 g 是 Borel 集类 $\boldsymbol{B}$ 上的勒贝格-斯蒂阶测度，而且对任何实数 a，总有

$$g(\tau_a E)=g(E),\ E\in\boldsymbol{B}$$

证明必存在非负数 c，使得对一切 $E\in\boldsymbol{B}$，$g(E)=cm(E)$.

16. 设 m 是平面上的勒贝格测度，u_θ 是平面上的一个映照（旋转）：$(x, y)\longmapsto(x', y')$，

$$x'=x\cos\theta+y\sin\theta,\quad y'=-x\sin\theta+y\cos\theta$$

证明：对平面上任何勒贝格可测集 E，$u_\theta E$ 也是勒贝格可测集，而且 $m(u_\theta E)=m(E)$.

第三章　可测函数与积分

§1 可测函数及其基本性质

在第二章中，虽然已经解决了建立新积分方法的首要问题，把黎曼积分中用到的区间长度概念推广，建立了较一般集上的测度理论．正如第二章的引言中所说，“积分”是对函数进行运算，对于定义在集E上的一个函数f，先得对它作和式

$$S=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\mu(E_i),\quad E_i=E(y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i)$$

然后才能研究S是否在某种意义下有极限值．由此可见，有了测度概念后，要建立“积分”，还必须对E上的函数f加以适当的限制，即要求每个E_i是可测集，这样和式S才有意义，就是说要求f具有这样的性质：对任何实数c, d，集

$$E(c\leqslant f(x)<d)$$

是可测集．我们只能对具有这种性质的函数来建立“积分”．后面我们将称具有这种性质的函数为“可测”函数．同时，我们也应要求当f、g都“可积”和α、β是常数时，$\alpha f+\beta g$也可以“积分”（黎曼积分就具有这样的性质）．再如，当f_n, $n=1, 2, \cdots$都可“积分”，并且$\{f_n\}$在某种意义下收敛（黎曼积分中常用的是“一致收敛”）于f时，也希望f是可“积分”的等等．这样很自然地，必须考察“可测”函数的和、可测函数列的极限是否仍为“可测”函数的问题．这就是这一节的任务．

1. 可测函数

定义　设X是基本空间，$\boldsymbol{R}$是X上的一个σ-环，并且

$$X=\bigcup_{E\in R}E$$

称$(X, \boldsymbol{R})$是**可测空间**，相应地，称$\boldsymbol{R}$中的每个元素E是$(X, \boldsymbol{R})$**上的可测集**，简称为**可测集**．特别，当X是实数直线E^1，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{L}^g$或$\boldsymbol{L}$时，分别称$(E^1, \boldsymbol{L}^g)$、$(E^1, \boldsymbol{L})$是**勒贝格-斯蒂阶可测空间**，**勒贝格可测空间**；当X是E^1，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0)=\boldsymbol{B}$时，称$(E^1, \boldsymbol{B})$是**Borel 可测空间**

勒贝格可测空间上可测集称为勒贝格可测集，Borel 可测空间的可测集(即 Borel 集)称为 Borel 可测集．

注意，定义可测空间、可测集时，严格地说，并不要求在$\boldsymbol{R}$上已经具有某个测度，即把可测空间、可测集概念本质上当作是集合论范畴的概念，这已是通行的看法．另外，在很多场合，把可测空间$(X, \boldsymbol{R})$中的$\boldsymbol{R}$规定为σ-代数(在应用中已足够了)，本书中采用规定$\boldsymbol{R}$是σ-环．

下面引入可测函数的概念．

定义 设$(X, \boldsymbol{R})$是可测空间，E是X的一个子集，f是定义在E上的有限实函数．如果对一切实数c，集$E(c\leqslant f)$都是$(X, \boldsymbol{R})$上可测集(即$E(c\leqslant f)\in\boldsymbol{R}$)，那末称$f$是**$E$上关于$(X, \boldsymbol{R})$的可测的函数**，简称是**$E$上可测函数**．

特别，当$(X, \boldsymbol{R})$是勒贝格-斯蒂阶可测空间$(E^1, \boldsymbol{L}^g)$，勒贝格可测空间$(E^1, \boldsymbol{L})$或是 Borel 可测空间$(E^1, \boldsymbol{B})$时，分别称f是E上(关于g的)勒贝格-斯蒂阶可测函数，勒贝格可测函数或 Borel 可测函数．

可测函数的这个定义与本节一开始所说的"可测"函数的概念是等价的．

定理 1 设$(X, \boldsymbol{R})$是可测空间，f是定义在$E\subset X$上的有限实函数，f是E上可测函数的充要条件是对一切实数c和d，集

$E(c\leqslant f<d)$是可测集.

证 设 f 是可测函数，由于 $E(c\leqslant f<d)=E(c\leqslant f)-E(d\leqslant f)$，而 $E(c\leqslant f)$、$E(d\leqslant f)$ 都是可测集，所以 $E(c\leqslant f<d)$ 是可测集. 反之，如果已知对任何 c, d, $E(c\leqslant f<d)$是可测集，那末由

$$E(c\leqslant f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(c\leqslant f<c+n)$$

立即推出 $E(c\leqslant f)$是可测集. 证毕.

现在举几个例子.

例 1 定义在$[a,b]$上的任何一个连续函数 f 是$[a,b]$上勒贝格可测函数 .

事实上，对任何实数 c，由 f 的连续性，集$\{x\mid x\in[a,b],\ c\leqslant f\}$是$[a,b]$中的闭集(见第一章 §4 习题 3)，因此它是可测集. 所以 f 是$[a,b]$上的可测函数.

例 2 设函数 f 是定义在$(-\infty,\infty)$上，它分别在互不相交区间$\langle a_i,b_i\rangle$上取常数 α_i, $i=1,2,\cdots,n$，而在 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\langle a_i,\ b_i\rangle$外函数值为零. 这种函数称为**阶梯函数**，它是勒贝格可测函数.

事实上，这是因为对任何实数c，$\{x|-\infty<x<\infty,c\leqslant f\}$或是全直线，或是空集，或是有限个区间的和集.它们都是勒贝格可测的.

例 3 比例 2 更一般地，设$(X,\ \boldsymbol{R})$是可测空间，E、$E_i\in\boldsymbol{R}$，$i=1,2,\cdots,n$，$E\supset\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$，且 $E_i\cap E_j=\varnothing$，$i\neq j$. $f(x)$是定义在 E 上的函数，它在集 E_i 上取常数 α_i，而在 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$ 之外为零，这种函数是 E 上的可测函数.

例 4 不可测函数的例：$(E^1,\boldsymbol{L})$是勒贝格可测空间，Z 是勒贝格不可测集(见第二章 §4)，$f(x)$是 Z 的特征函数$\chi_Z(x)$，$x\in E^1$，由

于$\left\{x \mid x\in E^1, \chi_Z(x)\geqslant\frac{1}{2}\right\}=Z$，所以$E^1$上的函数$\chi_Z(x)$不是勒贝格可测的函数．

例5　也有这样的可测空间$(X, \boldsymbol{R})$，定义在X上的所有函数都是可测的．例如，取$\boldsymbol{R}$为X的所有子集全体．f是定义在X上的任何一个有限实函数，对任何c，显然$X(c\leqslant f)\in\boldsymbol{R}$，所以$f$是$X$上的可测函数．特别，当$X$是自然数集$N$时，定义在$N$上任何函数$f$必是$(N, \boldsymbol{R})$上可测函数．

2. 可测函数的性质

定理2　设$(X, \boldsymbol{R})$是可测空间，$E\subset X$，f是定义在E上的有限的实函数．下列命题成立：

1°　当f是E上可测函数时，E本身必是可测集；

2°　当f是E上可测函数时，f作为E的任何可测子集E_1上函数时，它是E_1上的可测函数；

3°　设$E_1\cap E_2=\varnothing$，$E=E_1\cup E_2$，E_1, E_2是可测集，那末f是E上的可测函数的充要条件是f为$E_j(j=1, 2)$上的可测函数；

4°　当$\boldsymbol{R}$是σ-代数时，集E是可测集的充要条件是定义在X上的集E的特征函数$\chi_E(x)$为可测函数．

证　1°　因为

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(-n\leqslant f)$$

而根据可测函数的定义，集$E(-n\leqslant f)$是可测的，所以E是可测集．

2°　对任何实数c，由于

$$E_1(c\leqslant f)=E(c\leqslant f)\cap E_1$$

而$E(c\leqslant f)$和E_1都是可测集，所以$E_1(c\leqslant f)$是可测集，即f作为E_1上函数时，它是E_1上的可测函数．

3° 设 f 是 E 上可测函数，由 2°，f 是 E_1，E_2 的可测函数．反过来，如果 f 是 E_1，E_2 上可测函数，对任何实数 c，由于

$$E(c\leqslant f)=E_1(c\leqslant f)\cup E_2(c\leqslant f)$$

所以 $E(c\leqslant f)$ 是可测集，即 f 是 E 上可测函数．

4° 必要性：由于

$$X(c\leqslant \chi_E(x))=\begin{cases}\varnothing, & \text{当 } c>1\\ E, & \text{当 } 1\geqslant c>0\\ X, & \text{当 } 0\geqslant c\end{cases}$$

而 $\varnothing$，E，X 都是可测集，所以 $\chi_E(x)$ 是 X 上可测函数．充分性由上面式子即知，证毕．

显然，性质 3° 可以推广到有限个或可列个可测集 E_1，E_2，…，E_n…，并且 E_i，E_j 可以相交的情况．

为今后讨论的方便，再介绍可测函数的另外几个等价定义．

定理 3 设 $(X, \boldsymbol{R})$ 是可测空间，$E\subset X$．下面三种条件中的任何一个都是 E 上有限的实函数 f 成为可测函数的充要条件：

1° 对任何 c，集 $E(c<f)$ 是可测集；

2° 对任何 c，集 $E(f\leqslant c)$ 是可测集；

3° 对任何 c，集 $E(f<c)$ 是可测集．

证 要证明以上三种条件 1°，2°，3° 都是可测函数的充要条件，只要由函数的可测性推出 1°，由 1° 推出 2°，由 2° 又推出 3°，再证满足条件 3° 的函数一定是可测函数就可以了．

现在证明可测函数有性质 1°：对任何 c，由于(可见第一章(1.7))

$$E(c<f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(c+\frac{1}{n}\leqslant f\right)$$

根据函数的可测性，上式右边的每个 $E\left(c+\frac{1}{n}\leqslant f\right)$ 是可测集，所以 $E(c<f)$ 是可测集．

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$　设 f 满足 1°，那末 $E(-n<f)$ 是可测集．因为 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(-n<f)$，所以 E 是可测集．对任何 c，由于

$$E(f\leqslant c)=E-E(c<f)$$

再根据 1°，立即知道 $E(f\leqslant c)$ 是可测集．

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$　设 f 满足条件 2°，那末 $E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n}\right)$ 是可测集．对任何 c，由于

$$E(f<c)=\bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n}\right)$$

所以 $E(f<c)$ 是可测集．

最后再证满足 3° 的函数必是可测函数：设 f 满足条件 3°，由于

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f<n)$$

所以 E 是可测集，再利用等式

$$E(c\leqslant f)=E-E(f<c)$$

便推出 $E(c\leqslant f)$ 是可测集，所以 f 是可测函数．证毕．

下面转入可测函数之间的代数运算和函数列极限的讨论．

定理 4　设 $(X, \mathbf{R})$ 是可测空间，$E\subset X$．又设 f, g 都是 E 上的可测函数，那末

1° 对任何实数 α，αf 是 E 上的可测函数．

2° $f+g$ 是 E 上的可测函数．

3° fg 以及 f/g（假设对每个 $x\in E, g(x)\neq 0$）都是 E 上的可测函数．

4° $\max(f, g)$，$\min(f, g)$ 都是 E 上的可测函数．

证　1° 当 $\alpha=0$ 时，$\alpha f\equiv 0$，显然它是 E 上可测函数．当 $\alpha>0$

时，对任何 c，由于

$$E(c\leqslant\alpha f)=E\left(\frac{c}{\alpha}\leqslant f\right)$$

而 $E\left(\frac{c}{\alpha}\leqslant f\right)$ 是可测集，所以 $E(c\leqslant\alpha f)$ 是可测集，因此 αf 是可测函数．同样可考察 $\alpha<0$ 的情况．

2° 设 r_1，r_2，…，r_n，…是有理数全体，对任何 c，下面等式成立：

$$E(c<f+g)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(E(f>r_i)\cap E(g>c-r_i)) \qquad (1.1)$$

事实上，对任何 $x_0\in E(c<f+g)$，那末

$$f(x_0)>c-g(x_0)$$

因此，至少有一个有理数 r_i，使得

$$f(x_0)>r_i>c-g(x_0)$$

所以这个 $x_0\in E(f>r_i)\cap E(g>c-r_i)$．从而

$$E(c<f+g)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(E(f>r_i)\cap E(g>c-r_i)) \qquad (1.2)$$

反过来，对任何 $x_0\in\bigcup_{i=1}^{\infty}(E(f>r_i)\cap E(g>c-r_i))$，必存在某个 i，使得 $x_0\in E(f>r_i)\cap E(g>c-r_i)$，即同时成立着

$$f(x_0)>r_i,\ g(x_0)>c-r_i$$

从而 $f(x_0)+g(x_0)>c$，即 $x_0\in E(c<f+g)$．也就是说

$$E(c<f+g)\supset\bigcup_{i=1}^{\infty}(E(f>r_i)\cap E(g>c-r_i)) \qquad (1.3)$$

(1.2)，(1.3)结合起来就是(1.1)．

当 f、g 可测时，(1.1)右边的每个集都是可测集，所以 $E(c<f+g)$ 是可测集，即 $f+g$ 是可测函数．

由 1°、2°，显然可知任意有限个可测函数的线性组合也是可

测的.

3° 先证明 f^2 是可测的. 事实上, 对任何非负数 c, 由于 $E(f^2\geqslant c)=E(f\geqslant\sqrt{c})\cup E(f\leqslant-\sqrt{c})$, 所以 $E(f^2\geqslant c)$ 是可测集. 而当 $c<0$ 时, $E(f^2\geqslant c)=E$, 这也是可测集. 这就是说 f^2 是可测函数. 一般情况, 由于

$$fg=\frac{1}{4}\{(f+g)^2-(f-g)^2\}$$

再根据 1°, 2° 以及刚证明的性质, fg 也是可测函数.

关于 f/g 的可测性可以这样证明: 由于

$$E\left(\frac{1}{g}>c\right)=\begin{cases}E\left(g<\frac{1}{c}\right)\cap E(g>0), & \text{当 } c>0\\ E(g>0)\cup\left(E(g<0)\cap E(g<\frac{1}{c})\right), & \text{当 } c<0\\ E(g>0), & \text{当 } c=0\end{cases}$$

上式三种情况 ($c>0$, $c<0$, $c=0$) 右边所出现的集都是可测的, 所以 $\frac{1}{g}$ 是可测函数. 因此 $f/g=f\cdot 1/g$ 是可测函数.

4° 对任何 c, 由于

$$E(c\leqslant\max(f,g))=E(c\leqslant f)\cup E(c\leqslant g)$$

所以 $\max(f,g)$ 是可测函数. 但是 $\min(f,g)=-\max(-f,-g)$, 利用 1° 便得到 $\min(f,g)$ 也是可测的.

系 如果 f 在 E 上是可测的, $|f|$ 也在 E 上是可测的.

证 由于

$$|f|=\max(f,-f)$$

根据定理 4 的 1°, 4° 便知道 $|f|$ 是可测函数.

3. 可测函数列的极限 关于可测函数列有如下结果.

定理 5 设 $(X,\mathbf{R})$ 是可测空间, $E\subset X$. 又设 $\{f_n\}$ 是 E 上一列可测函数, 那末当 $\{f_n\}$ 的上确界函数、下确界函数、上限函数、下限

函数分别是有限函数时，它们都是 E 上的可测函数.

证 先证 $\{f_n\}$ 的上确界函数 F 是可测的. 因为

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}\max\{f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)\}$$

由于 $F_n(x)=\max(f_1(x),\cdots,f_n(x))$ 是可测函数，而且 $\{F_n(x)\}$ 是函数的单调增加序列，$F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)$. 所以对任何 c,

$$E(F>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(F_n>c)$$

(见第一章 §1 习题 7)从而 $E(F>c)$ 是可测集.

同样，$\{f_n\}$ 的下确界函数

$$\begin{aligned}f&=\lim_{n\to\infty}\min\{f_1,f_2,\cdots f_n\}\\&=-\lim_{n\to\infty}\max\{-f_1,-f_2,\cdots,-f_n\}\end{aligned}$$

所以 f 是可测函数.

再证 $\{f_n\}$ 的上限函数 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n$ 是可测的. 记 G_n 为序列 f_n, $f_{n+1},\cdots,f_{n+m},\cdots$ 的上确界函数，根据上面所证，G_n 为可测的，根据第一章(5.22—23)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}f_n=\lim_{n\to\infty}G_n$$

但是 $G_1\geqslant G_2\geqslant\cdots\geqslant G_n\geqslant\cdots$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}G_n$ 又是可测函数列 $\{G_m\}$ 的下确界函数，它是可测的. 所以 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n$ 是可测的.

同样可证 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n$ 是可测的. 证毕.

系 设 $\{f_n\}$ 是 E 上一列有限的可测函数，如果对一切 $x\in E$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ 存在，而且是有限值，那末极限函数 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ 是可测的.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n$，所以它是可测的.

定理 6 设 $(X,\mathbf{R})$ 是可测空间，$E\subset X$. 又设 f 是 E 上有限的可测函数，一定存在一列 $\{f_n\}$，每个 f_n 是可测集的特征函数的线

性组合，使得$\{f_n\}$在E上处处收敛于f.

这个定理说明用可测集的特征函数线性组合可以逼近可测函数.

证 事实上，对任何自然数n，记

$$E_j^{(n)}=E\left(\frac{j}{n}\leqslant f<\frac{j+1}{n}\right),$$

$$j=-n^2,-n^2+1,\cdots,0,1,\cdots,n^2-1$$

作出函数

$$f_n=\sum_{-n^2}^{n^2-1}\frac{j}{n}\chi_{E_j^{(n)}}$$

显然，它是E上可测集的特征函数的线性组合. 任取$x_0\in E$，由于$|f(x_0)|<\infty$，所以存在N，使得$|f(x_0)|<N$，这时对自然数$n\geqslant N$，总有一个整数j，$-n^2\leqslant j<n^2-1$，使得$\frac{j}{n}\leqslant f(x_0)<\frac{j+1}{n}$，即$x_0\in E_j^{(n)}$. 然而根据$f_n$作法知道$f_n(x_0)=\frac{j}{n}$，所以当$n\geqslant N$时，

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|<\frac{1}{n}$$

这就是说$\{f_n(x_0)\}$收敛于$f(x_0)$. 由于x_0是E中任意取的，所以$\{f_n\}$在E上处处收敛于f. 证毕.

下面是一个有用的系，由读者自己证明它.

系 设f是E上有界的可测函数，必存在可测集上特征函数的线性组合的函数序列$\{f_n\}$，使得$\{f_n\}$在E上一致收敛于f.

4. 允许取 $\pm\infty$ 值的可测函数 前面讨论的可测函数都是限定函数值是有限的. 在某些场合(特别是出现极限运算时)，如将可测函数概念推广到可取$\pm\infty$值的函数是有一定方便的.

定义 设$(X, \mathbf{R})$是可测空间，$E\subset X$，f是定义在E上的实函数(允许取值$\pm\infty$). 如果对任何实数c(c可以是$\pm\infty$)，$E(c\leqslant f)$

$\in \boldsymbol{R}$, 那末称 f 是 E 上(关于 $(X, \boldsymbol{R})$)的可测函数, 简称是 E 上的可测函数.

取 $c=-\infty$, 从 $E=E(-\infty\leqslant f)$ 知道可测函数 f 的定义域 E 必是可测集.

从定义以及等式

$$E(f=\infty)=\bigcap_{n=1}^{\infty} E(n\leqslant f),$$

$$E=E(f=-\infty)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E(-n<f)\right)$$

立即又知道 $E(f=\infty)$、$E(f=-\infty)$ 都是可测集. 从而 $E_1=E-(E(f=\infty)\cup E(f=-\infty))$ 是可测集, 并且 f 是 E_1 上的有限实函数. 又由于 $E_1(f\geqslant c)=E_1\cap E(f\geqslant c)$, 所以 f 是 E_1 上有限的可测函数. 允许取 $\pm\infty$ 值的可测函数具有与有限可测函数相仿的代数与极限性质, 而证明方法差不多也是一样的, 有时仅需对取到 $\pm\infty$ 值的那些集作一点单独处理, 不难把本节中的定理 1—6 的结果加以推广. 今将它们概括为如下四个定理(读者自己证明.)

定理 1′ 设 $(X, \boldsymbol{R})$ 是可测空间, $E\subset X$, f 是 E 上实函数, 那末

1° 当 f 可测时, E 必是可测集;

2° 当 f 可测时, f 作为 E 的可测子集 E_1 上函数时也是可测的;

3° 当 $E_1\cap E_2=\varnothing$, $E=E_1\cup E_2$, E_1、$E_2\in\boldsymbol{R}$ 时, f 在 E 上是可测的充要条件为 f 同时是 E_1、E_2 上的可测函数;

4° f 是 E 上可测函数的充要条件为下面四个中的任何一个成立(下面"实数"指可取无限大的实数):

(i) $E(f=\infty)\in\boldsymbol{R}$, 并且对任何实数 c, d, $E(c\leqslant f<d)\in\boldsymbol{R}$.

(ii) $E(f=-\infty)\in \boldsymbol{R}$，并且对任何实数 c，$E(c<f)\in \boldsymbol{R}$.

(iii) 对任何实数 c，$E(f\leqslant c)\in \boldsymbol{R}$.

(iv) $E(f=\infty)\in \boldsymbol{R}$，并且对任何实数 c，$E(f<c)\in \boldsymbol{R}$.

定理 2′ 设$(X, \boldsymbol{R})$是可测空间，$E\subset X$，又设 f、g 是 E 上可测函数，那末

1° 对任何实数 α，如果 αf 有意义①，那末 αf 是 E 上可测函数；

2° 如果 $f+g$ 有意义①，那末 $f+g$ 是 E 上可测函数；

3° 如果 fg、f/g 是有意义的①，那末它们都是 E 上可测函数；

4° $\max(f, g)$、$\min(f, g)$都是 E 上可测函数；

5° $|f|$是 E 上可测函数.

定理 3′ 设$(X, \boldsymbol{R})$是可测空间，$E\subset X$. 又设$\{f_n\}$是 E 上可测函数的序列. 那末$\{f_n\}$的上确界函数、下确界函数、上限函数、下限函数等都是 E 上的可测函数.

定理 4′ 设$(X, \boldsymbol{R})$是可测空间，$E\subset X$. 又设 f 是 E 上可测函数，一定存在一列$\{f_n\}$，每个 f_n 是可测集的特征函数的线性组合，使得$\{f_n\}$在 E 上处处收敛于 f.

请读者注意，除这一小节外，本书其余地方，如无特别说明，“函数”均指“有限函数”，“实数”均指有限实数.

5. Borel 可测函数 前面讨论了一般可测空间$(X, \boldsymbol{R})$上的可测函数. 它的一个重要的特殊情况就是勒贝格可测空间上的勒贝格可测函数. 现在还要简要介绍一下比勒贝格可测函数更为特殊，但是却又常常用到的 Borel 可测函数概念.

定义 $\boldsymbol{B}$ 是 E^1 上 Borel 集全体，$(E^1, \boldsymbol{B})$是 Borel 可测空间，

---

① 即$\alpha f(x)$，$f(x)+g(x)$，$f(x)g(x)$，$f(x)/g(x)$等在 x 点不发生 $0\cdot\infty$，$\infty+(-\infty)$，$0/0$，∞/∞等不定情况。

设 f 是定义在 E 上的有限实函数，如果对一切实数 c，集 $E(c\leqslant f)$ 都是 Borel 集，那末称 f 是 E 上 **Borel 可测函数**，也称做贝尔(**Baire**)函数①.

对 $(E^1, \boldsymbol{B})$ 用定理 2 的 1°，就知道 Borel 可测函数的定义域 E 必是 Borel 可测集. 例 1、例 2 中函数都是 Borel 可测函数.

记 E 上所有 Borel 可测函数全体为 $\mathscr{B}(E)$，称 $\mathscr{B}(E)$ 为 Borel 可测函数类或 Baire 函数类. 根据定理 4, 5 及定理 5 的系便知道 $\mathscr{B}(E)$ 是关于代数运算及极限运算封闭的函数类. 换句话说，当 f, $h\in\mathscr{B}(E)$ 时，那末它们的线性组合 $\alpha f+\beta h$，最大值函数 $\max(f, h)$，绝对值函数 $|f|$ 等等都是 $\mathscr{B}(E)$ 中的函数. 当 $\{f_n\}$ 是 $\mathscr{B}(E)$ 中的一列函数，那末 $\overline{\lim} f_n$，$\underline{\lim} f_n$，$\lim f_n$(如果存在且是有限函数)都是 $\mathscr{B}(E)$ 中的函数.

Borel 可测函数类 $\mathscr{B}(E)$ 还可以用另一种方式引入. 例如当 $E=[a, b]$(E 为一般 Borel 集情况也一样讨论). E 上所有连续函数全体记为 $\mathscr{B}_0(E)$，称为第零类. 任取 $\mathscr{B}_0(E)$ 中一列函数 $\{f_n\}$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ 存在，而且是有限函数，当 $f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ 不属于 $\mathscr{B}_0(E)$ 时，这种 f 的全体记为 $\mathscr{B}_1(E)$，称为第一类. 然后再从 $\mathscr{B}_0(E)\cup\mathscr{B}_1(E)$ 中任取一列函数 $\{f_n\}$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ 存在且是有限函数，$f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ 不属于 $\mathscr{B}_0(E)\cup\mathscr{B}_1(E)$ 时，这种 f 的全体记为 $\mathscr{B}_2(E)$，如此一直进行下去所得到的函数全体记为 $\mathscr{B}(E)$. Baire 就曾经是用这种方式引入的，所以 $\mathscr{B}(E)$ 又称为 Baire 函数类.

下面是 Borel 可测函数和勒贝格可测函数的关系.

定理 7 设 E 是直线上点集，f 是定义在 E 上的有限实函数. 如果 f 在 E 上是 Borel 可测的，那末 f 必是 E 上勒贝格可测函数.

① 在一般拓扑空间情况下，Borel 函数类与 Baire 函数类是有区别的，在 n 维欧几里德空间中是没有区别的.

证 因 f 在 E 上是 Borel 可测的，所以，对任何实数 c，$E(f\geqslant c)\in\boldsymbol{B}$，但 $\boldsymbol{B}\subset\boldsymbol{L}$，因而 f 在 E 上是勒贝格可测的．证毕．

下面是更为深入的结果．

定理 8 设 E 是直线上的点集，f 是 E 上有限的勒贝格可测函数，那末一定存在全直线上的 Borel 可测函数 h，使得 $m(E(f\neq h))=0$．

证 根据定理 6，存在 E 上一列函数 $\{f_n\}$，每个 f_n 是勒贝格可测集（E 的子集）的特征函数的线性组合，即 $f_n=\sum_{i=1}^{l_n}\alpha_i^{(n)}\chi_{E_i^{(n)}}$，使得 $\{f_n\}$ 在 E 上处处收敛于 f．

又根据第二章 §4 定理 9，对每个 $E_i^{(n)}$，存在 Borel 集 $B_i^{(n)}$，使得 $E_i^{(n)}\supset B_i^{(n)}$，而且 $m(E_i^{(n)}-B_i^{(n)})=0$．

作直线上函数

$$h_n=\sum_{i=1}^{l_n}\alpha_i^{(n)}\chi_{B_i^{(n)}},\quad n=1,2,\cdots$$

显然，$h_n(n=1,2,\cdots)$ 都是 Borel 可测的，而且 $E(f_n\neq h_n)\subset\bigcup_{i=1}^{l_n}(E_i^{(n)}-B_i^{(n)})$，因此 $m(E(f_n\neq h_n))=0$．记 $E_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n\neq h_n)$，显然 $m(E_0)=0$．

由于在 E 上，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，所以

$$\lim_{n\to\infty}h_n(x)=f(x),\qquad x\in E-E_0 \tag{1.4}$$

再根据第二章 §4 定理 9，有 Borel 集 $B_0\supset E_0$，适合 $m(B_0)=0$．令 $B_1=E^1-B_0$，B_1 是 Borel 集．从 (1.4) 得到

$$\chi_{B_1}(x)f(x)=\lim_{n\to\infty}h_n(x)\chi_{B_1}(x),\quad x\in E\cap B_1 \tag{1.5}$$

当 $x\in E-B_1$ 时，(1.5) 式两边在这种点上的值都是零，因此 (1.5)

式实际上是在 E 上成立.

对原来只定义在 E 上的函数 $\tilde{h}(x)=\chi_{B_1}(x)f(x)$ 补充定义它在 E^1-E 上的值是零，补充定义后所得的全直线上定义的函数记为 $h(x)$。显然，在全直线上有

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}h_n(x)\chi_{B_1}(x) \tag{1.6}$$

因为 $\{h_n\chi_{B_1}\}$ 是直线上的 Borel 可测函数列，由定理 5 的系，h 是直线上的 Borel 可测函数. 显然 $E(f\neq h)\subset B_0$，因而 $m(E(f\neq h))=0$. 证毕.

定理 8 可以推广到更一般的测度空间上（可参见本章 §2 的习题 15）.

习　题

1. 设 $(X,\boldsymbol{R})$ 是可测空间，$E\subset X$，f 是 E 上可测函数. 证明：对任何实数 a，$E(f=a)$ 是可测集.

2. 设 $(X,\boldsymbol{R})$ 是可测空间，E_1、…，E_n 是有限个可测集. 证明：f 在 $E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ 上是可测的充要条件是 f 在每个 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$ 上是可测的. 再证上述命题对于 $\{E_i\}$ 是一列可测集也是正确的.

3. 设 $(X,\boldsymbol{R})$ 是可测空间，$E\subset X$. 证明 f 是 E 上可测函数的充要条件是对一切有理数 r，$E(f\geqslant r)$ 是可测集.

4. 设 $(X,\boldsymbol{R})$ 是可测空间，$E\subset X$，f 是 E 上有界可测函数. 证明必存在可测集的特征函数线性组合形式的函数序列 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f，并且 $|f_n(x)|\leqslant\sup_{x\in E}|f(x)|$ $(n=1,2,\cdots)$.

5. 设 $(X,\boldsymbol{R})$ 是可测空间，$E\subset X$，f 是 E 上可测函数. 证明下列命题成立.

(i) 对直线上任何开集 O，$f^{-1}(O)$ 是可测集.

(ii) 对直线上任何闭集 F，$f^{-1}(F)$ 是可测集.

(iii) 对直线上任何 G_δ 型或 F_σ 型集 M，$f^{-1}(M)$ 是可测集.

(iv) 对直线上任何 Borel 集 M，$f^{-1}(M)$ 是可测集.

6. 设$(X, \boldsymbol{R})$是可测空间，$E\subset X$，f是E上可测函数．又设h是直线上Borel可测函数，证明$h(f)$是E上可测函数．

7. 设$(X, \boldsymbol{R})$是可测空间，$E\subset X$，$\{f_n\}$是E上一列有限的可测函数，并且$\{f_n\}$在E上处处收敛(允许极限值是$\pm\infty$)f．证明$E(f=\infty)$、$E(f=-\infty)$都是可测集，并且对任何实数c，$E(f\geqslant c)$也是可测集．

8. 证明本节的定理$1'$，$2'$，$3'$，$4'$．

9. 设E是直线上的点集，f是E上勒贝格可测函数．h是直线上勒贝格可测函数．问$h(f)$是否必是E上勒贝格可测函数．

10. 设f是直线上点集E上的有限函数，并且关于(E^1, L^g)是可测的．证明，必存在全直线上的Borel可测函数h，使得$g(E(f\neq h))=0$(这是定理8在勒贝格-斯蒂阶可测函数情况下的推广)．

11. 设$f(x)$是直线上勒贝格(或Borel)可测函数，a是任一常数．证明$f(ax)$是直线上勒贝格(或Borel)可测函数．

12. 设$f(x)$是直线上勒贝格(或Borel)可测函数．证明$f(x^3)$，$f(x^2)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$(当$x=0$时，规定$f\left(\frac{1}{0}\right)=0$)等都是勒贝格(或Borel)可测函数．

13. (i) 当f是$[a, b]$上的连续函数、单调函数、阶梯函数时，f必是$[a, b]$上Borel可测函数．

(ii) 当$f(x)$是$(-\infty, \infty)$上处处可微的函数时，证明$\frac{d}{dx}f(x)$必是$(-\infty, \infty)$上的Borel可测函数．

14. 设X是一个集，$\{f_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$是定义在$X$上的一族有限实函数，$\boldsymbol{R}$是由$X$的某些子集所成的$\sigma$-环．

证明$\boldsymbol{R}$是使得一切$f_\lambda(\lambda\in\Lambda)$都可测的最小$\sigma$-代数的充要条件是$\boldsymbol{R}$是包含一切$X(r<f_\lambda)(\lambda\in\Lambda)$的最小$\sigma$-代数，这里$r$遍取有理数．

§2　可测函数列的收敛性与勒贝格可测函数的结构

在上一节中，我们考察了可测函数类对代数运算和极限运算的封闭性，在那里并未出现测度．从本节开始，将在可测空间上引入测度，讨论可测函数序列的两种与测度有关的重要收敛——几乎处处收敛和依测度收敛．最后还要讨论在测度观念下的勒贝格

可测函数的结构.

1. 测度空间和"几乎处处"

定义 设$(X, \boldsymbol{R})$是可测空间, μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的测度, 称$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是**测度空间**. 当 μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的有限测度, 或是 $\boldsymbol{R}$ 上的全有限测度、σ-有限测度、全 σ-有限测度时, 相应地称$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是**有限测度空间**, 或是**全有限测度空间**、**σ-有限测度空间**、**全 σ-有限测度空间**.

例 1 $(E^1, \mathbf{L}, m)$是全 σ-有限测度空间.

通常称$(E^1, \mathbf{L}, m)$是**勒贝格测度空间**

同样, $(E^1, \mathbf{L}^g, g)$也是全 σ-有限测度空间. 特别, 当 $g(\infty)-g(-\infty)<\infty$时, $(E^1, \mathbf{L}^g, g)$还是全有限的测度空间.

通常称$(E^1, \mathbf{L}^g, g)$是(由 g 导出的)**勒贝格-斯蒂阶测度空间**

引入测度的目的是在于建立积分, 可以设想, 具有零测度的集在积分中实质上不影响可积性和积分效果, 所以在积分的理论中, "几乎处处"是重要的观念.

几乎处处 设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是测度空间, $E\subset X$, P 是与 E 中的点有关的某个命题. 如果存在一个测度为零的集 E_0, 当 $x\in E-E_0$ 时, 命题 P 都成立, 我们称命题 P 在 E 上**几乎处处**成立, 或称在 E 上**概**成立.

换言之, 所谓命题 P 在 E 上几乎处处成立, 就是 E 中使得命题 P 不成立的点总是包含在某个测度为零的集中. 注意, 这里 E 本身并不一定是可测集, E_0 也不必要求包含在 E 中, 但当 E 是可测集时, E_0 就可不妨取为 E 的子集(否则用 $E\cap E_0$ 代替 E_0 即可).

例如"函数 f 和 h 在 E 上是几乎处处相等"意即 E 中使得 $f(x)\neq h(x)$ 的那些 x 全体是包含在某个测度为零的集 E_0 中, 而对于 $x\in E-E_0$, 总有 $f(x)=h(x)$. 我们用 $f\overset{\cdot}{\underset{\mu}{=}}h$ 或用 $f=h$, $a.e.$ 表示"函数 f 和 h 在 E 上几乎处处相等". 这里"·"表示"几乎处处", 而等

号下的"μ"表示这里的"几乎处处"是对测度μ而言的. 因为在一般情况下，在一个可测空间$(X, \boldsymbol{R})$上可以同时引入许多测度，一个$\boldsymbol{R}$中的集E_0可以是某个测度的零集，但可能不是另外一个测度的零集. 因而在用"几乎处处"这个术语时，必需要注明是对那个测度说的. 所以，在多个测度情况时，"μ"必须标出. 当然，在仅出现一个测度的场合，"μ"自然可以省去.

又如，"在E上f几乎处处大于h"就是$f(x)\leqslant h(x)$的所有x全体是包含在某个测度为零的集E_0中，记为$f\underset{\mu}{\geq} h$(或$f\underset{\mu}{\geq} h$, $a.e.$). 再如，"$\{f_n\}$在E上几乎处处收敛于f"就是$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$不存在的点、或虽存在但$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\neq f(x)$的点$x$的全体是包含在某个测度为零的集$E_0$中，记为$\lim\limits_{n\to\infty}f_n\underset{\mu}{\dot{=}}f$(或$\lim\limits_{n\to\infty}f_n\underset{\mu}{=}f$, $a.e.$)，或简记为$f_n\underset{\mu}{\dot{\to}}f$(或$f_n\underset{\mu}{\to}f$, $a.e.$).

定理 1　设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是测度空间，$\{f_n\}$是E上一列可测函数. 如果$\{f_n\}$在E上几乎处处收敛，那末必存在E上可测函数f，使得$\{f_n\}$在E上几乎处处收敛于f.

证　因为$\{f_n\}$在E上几乎处处收敛，所以存在μ-零集E_0(不妨设$E_0\subset E$)使得$\{f_n\}$在$E-E_0$上处处收敛. 因为$E-E_0$是E的可测子集，所以根据§1定理5的系，$\{f_n\}$在$E-E_0$上必收敛于(在$E-E_0$上的)可测函数f_1. 今作E上函数

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\in E-E_0\\ 0, & x\in E_0\end{cases}$$

再根据§1定理2的3°，f是E上可测函数. 显然

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\quad x\in E-E_0$$

即除去μ-零集E_0外，$\{f_n\}$收敛于E上可测函数f. 证毕.

定理 2 设$(X, \mathbf{R}, \mu)$是测度空间，$\{f_n\}$是E上的可测函数序列. 如果$\{f_n\}$在E上几乎处处收敛于h，那末必存在E上可测函数f，使得$f \doteq h$（自然$\lim_{n\to\infty} f_n \doteq f$）.

证 因为$\lim_{n\to\infty} f_n \doteq h$，所以存在$\mu$-零集$E_1$，不妨设$E_1 \subset E$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = h(x), \quad x \in E - E_1$$

由$\{f_n\}$的几乎处处收敛性，从定理 1，立即知道存在E上可测函数f，μ-零集$E_0 \subset E$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in E - E_0$$

因此$E(f = h) \supset (E - E_1) \cap (E - E_0)$，从而$E(f \neq h) \subset E_1 \cup E_0$. 显然，$\mu(E_1 \cup E_0) = 0$，所以$f \doteq h$. 证毕.

例 2 取$X = (0, \infty)$，$\mathbf{R} = \mathbf{S}(\mathbf{E})$，而$\mathbf{E} = \{(n, n+1], n = 0, 1, 2, \cdots\}$，$\mu$是$\mathbf{R}$上恒取零的集函数（显然，它是一个测度）. 设$f_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$是在每个区间$(k, k+1]$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$上取常数值$c_k^{(n)}$. 显然，每个f_n是X上的（关于$(X, \mathbf{R})$的）可测函数. 因为$\mu(X) = 0$，所以对任意选取的定义在X上的函数h，总有

$$\lim_{n\to\infty} f_n \underset{\mu}{\doteq} h$$

但应注意，很多h都不是X上（关于$(X, \mathbf{R})$）的可测函数，例如$h(x) = x$就不是X上（关于$(X, \mathbf{R})$）的可测函数. 定理 2 说明总可以找到**可测的**函数f，使得$f \doteq h$. 在此例中，例如我们可取X上$f = 0$这个函数.

2. 依测度收敛 现在，我们引进一种用测度描述的函数列的另一重要的收敛概念.

定义 设$(X, \mathbf{R}, \mu)$是测度空间，$E \subset X$，$\{f_n\}$是E上的一列可测函数. 假如有一个有限的函数f[①]，它和$\{f_n\}$满足下面的关系:

① 我们这里并没有假定f在E上是可测函数，只假定$|f - f_n|$是可测函数.

对任何 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E(|f-f_n|>\varepsilon))=0 \tag{2.1}$$

就称$\{f_n\}$(在E上)依测度μ收敛于f,或称$\{f_n\}$(在E上关于测度μ)**度量收敛**于f. 记为

$$f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$$

依测度收敛的另一个等价定义是

定义　设$(X, \mathbf{R}, \mu)$是测度空间,$E\subset X$, $\{f_n\}$是E上的一列可测函数. 假如有一个有限的函数f,它和$\{f_n\}$满足下面的关系:对任何$\varepsilon>0$以及$\delta>0$, 存在(只依赖于ε和δ的)自然数N, 使得当$n\geqslant N$时,成立着

$$\mu(E(|f_n-f|>\varepsilon))<\delta \tag{2.2}$$

就称$\{f_n\}$(在E上)依测度μ收敛于f.

显然,第二个定义不过是将第一个定义中的表达式

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E(|f_n-f|>\varepsilon))=0$$

改为用$\delta-N$来陈述而已. 所以这两种定义方式的等价性是显然的.

这是一种什么样的收敛呢?用文字来叙述,就是说,如果事先给了一个(误差)$\varepsilon>0$,不管这个ε有多小, 使得$|f_n(x)-f(x)|$大于(误差)ε的点x虽然可能很多, 但这种点x的全体用测度来衡量,它的测度却是随着n无限地增大而趋向于零.

在概率论中,常用μ表示概率,这时依测度收敛改称为依概率收敛.

我们先举两个例子, 来说明这种收敛概念和我们所熟悉的处处收敛或几乎处处收敛概念是有很大区别的.

例3　存在依测度收敛而处处不收敛的函数列: 在勒贝格测度空间$(E^1, \mathbf{L}, m)$上, 取$E=(0,1]$,将$(0,1]$等分,定义两个函数:

$$f_1^{(1)}=\begin{cases}1, & x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\\ 0, & x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases}\quad f_2^{(1)}=\begin{cases}0, & x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\\ 1, & x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

然后，同样地将(0, 1]四等分、八等分、……等等．一般地，对每个 n，作 2^n 个函数：

$$f_j^{(n)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left(\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right]\\ 0, & x\overline{\in}\left(\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right]\end{cases}\quad j=1,\cdots,2^n$$

我们把 $\{f_j^{(n)}, j=1, 2, \cdots, 2^n\}$ 先按 n 后按 j 的顺序逐个地排成一列：

$$f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)}, f_4^{(2)}, \cdots, f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_{2^n}^{(n)}, \cdots$$

$f_j^{(n)}$ 在这个序列中是第 $N=2^n-2+j$ 个函数．我们说，这个序列是依勒贝格测度 m 收敛于零的．这是因为对任何 $\varepsilon>0$,

$$E(|f_j^{(n)}-0|>\varepsilon)$$

或是空集(当 $\varepsilon>1$)或是 $\left(\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right]$(当 $0<\varepsilon<1$)，所以

$$m(E(|f_j^{(n)}-0|>\varepsilon))=\frac{1}{2^n}$$

由于当 $N=2^n-2+j\ (j=1, \cdots, 2^n)$ 趋于 ∞ 时，$n\to\infty$．由此可见 $\lim\limits_{n\to\infty}m(E(|f_j^{(n)}-0|>\varepsilon))=0$，即 $f_j^{(n)}\overset{m}{\Longrightarrow}0$.

但是，函数列 $\{f_j^{(n)}\}$ 在(0, 1]上的任何一点都不收敛！这是因为对任何 $x_0\in(0,1]$，无论 n 多么大，对这个 n，必有一个相应的 j，使

$$x_0\in\left(\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right]$$

因而 $f_j^{(n)}(x_0)=1$，然而 $f_{j+1}^{(n)}(x_0)=0$ 或 $f_{j-1}^{(n)}(x_0)=0$．换句话说，对任何 $x_0\in(0,1]$ 在 $\{f_j^{(n)}(x_0)\}$ 中必有两个子数列，一个恒为 1，另一个

恒为零，所以$\{f_j^{(n)}(x)\}$在$(0,1]$中任何一点x上是发散的.

反过来，是不是一个几乎处处收敛的序列$\{f_n\}$，一定是依测度收敛呢？下面例子说明也不是如此.

例4　在勒贝格测度空间$(E^1, \boldsymbol{L}, m)$上，取$E=(0,\infty)$，作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,n],\\ 0, & x\in(n,\infty),\end{cases}\quad n=1,2,\cdots$$

显然，$\{f_n\}$在E上处处收敛于1. 但是，当$0<\varepsilon<1$时，

$$E(|f_n-1|>\varepsilon)=(n,\infty),\ 然而\ m((n,\infty))=\infty$$

所以$\{f_n\}$不依测度收敛于1.

从上两例看出两种收敛区别很大，它们的区别正是在于：假如固定任一个$\varepsilon>0$，那末f_n处处收敛于f的特点是(i)对E中每点x_0，总有一个指标$n(x_0)$，对于从$n(x_0)$以后的一切n，$|f_n(x_0)-f(x_0)|\leqslant\varepsilon$，即$x_0\in\bigcap\limits_{n=n(x_0)}^{\infty}E(|f_n-f|\leqslant\varepsilon)$；(ii)对于每个指标$n$来说，使得$|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon$的点$x$全体却可能有较大的测度，甚至总是无限大，如例4那样. 而依测度收敛的特点是完全相反，它的特点是(i)$E(|f_n-f|>\varepsilon)$的测度一定要随$n\to\infty$而趋向零；(ii)而对每个x_0来说，却未必存在某指标$n(x_0)$，使得

$$x_0\in\bigcap_{i=n(x_0)}^{\infty}E(|f_i-f|\leqslant\varepsilon)$$

甚至可能对每个指标n，集$\bigcap\limits_{i=n}^{\infty}E(|f_i-f|\leqslant\varepsilon)$始终是空集，如例3那样.

尽管两种收敛区别很大，但还是有密切联系的. 下面就是两种收敛的联系.

定理3(F. Riesz)　设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是测度空间，$E\subset X$. 如果在

E 上可测函数列 $\{f_n\}$ 依测度收敛于 f, 那末必有子序列 $\{f_{n_\nu}\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f.

证 对任何自然数 ν, 取 $\varepsilon=\frac{1}{2^\nu}$, $\delta=\frac{1}{2^\nu}$, 根据 $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$, 由(2.2), 必然有自然数 n_ν, 使得当 $n\geqslant n_\nu$ 时, $\mu\left(E\left(|f_n-f|>\frac{1}{2^\nu}\right)\right)<\frac{1}{2^\nu}$. 因此

$$\mu(E_\nu)<\frac{1}{2^\nu},\ \nu=1,2,\cdots$$

这里 $E_\nu=E\left(|f_{n_\nu}-f|>\frac{1}{2^\nu}\right)$. 不妨在逐个取 n_ν 时把 n_ν 取得充分大, 使得 $n_1<n_2<\cdots<n_\nu<n_{\nu+1}<\cdots$. 本定理证明的关键在于作通集

$$F_k=\bigcap_{\nu=k}^{\infty}(E-E_\nu)$$

由于 $E-E_\nu=E\left(|f_{n_\nu}-f|\leqslant\frac{1}{2^\nu}\right)$, 所以 $F_k=E\left(|f_{n_\nu}-f|\leqslant\frac{1}{2^\nu},\ \nu=k,k+1,\cdots\right)$. 显然, 在 F_k 上, 序列 $\{f_{n_\nu}\}$ 收敛于 f(其实还是一致收敛于 f). 作 $F=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$, 那末 $\{f_{n_\nu}\}$ 在 F 上处处收敛于 f.

现在只要证明 $\mu(E-F)=0$ 就行了. 由于和通关系式

$$E-F=\bigcap_{k=1}^{\infty}(E-F_k)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{\nu=k}^{\infty}E_\nu=\overline{\lim_{\nu\to\infty}}E_\nu$$

以及 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu(E_\nu)\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}=1$. 根据第二章 §2 定理 1 的(x)

$$E-F=\overline{\lim_{\nu\to\infty}}E_\nu$$

是个 μ-零集. 证毕.

对于我们前面例 3 中的函数列, 它的子序列

$$f_1^{(1)},\ f_1^{(2)},\ \cdots,\ f_1^{(n)},\ \cdots$$

便是在 $(0,1]$ 上处处收敛于零的.

下面定理说明几乎处处收敛的序列是在什么条件下，必然是依测度收敛的.

定理 4　设$(X, \mathbf{R}, \mu)$是测度空间，$E\subset X$，又设$\{f_n\}$是在E上几乎处处收敛于可测函数f的可测函数的序列. 如果$\mu(E)<\infty$，那末$\{f_n\}$在E上必然依测度收敛于f.

证　根据几乎处处收敛的假设，存在μ-零集E_0，使得$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$在$E_1=E-E_0$上成立. 我们先证明，对任何固定的$\varepsilon>0$，下式成立

$$E_1=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}E_1(|f_n-f|\leqslant\varepsilon) \tag{2.3}$$

事实上，对任何$x_0\in E_1$，必存在$N(x_0)$，使得当$n\geqslant N(x_0)$时，$|f_n(x_0)-f(x_0)|\leqslant\varepsilon$成立. 因此$x_0\in\bigcap\limits_{n=N(x_0)}^{\infty}E_1(|f_n-f|\leqslant\varepsilon)$. x_0是任意取的，所以$E_1\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}E_1(|f_n-f|\leqslant\varepsilon)$. 而$E_1\supset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}E_1(|f_n-f|\leqslant\varepsilon)$是显然的，所以(2.3)成立，即$E_1=\varliminf\limits_{n\to\infty}E_1(|f_n-f|\leqslant\varepsilon)$.

根据第二章§2定理1的(vii)得到

$$\mu(E)=\mu(E_1)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\mu(E_1(|f_n-f|\leqslant\varepsilon)) \tag{2.4}$$

从而$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\mu(E_1(|f_n-f|>\varepsilon))=\varlimsup\limits_{n\to\infty}[\mu(E_1)-\mu(E_1(|f_n-f|\leqslant\varepsilon))]=0$. 然而$E(|f_n-f|>\varepsilon)\subset E_1(|f_n-f|>\varepsilon)\cup(E-E_1)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E(|f_n-f|>\varepsilon))=0$$

证毕.

前面的例4已说明定理4中的$\mu(E)<\infty$这个条件是不能去掉的. 定理4告诉我们，在$\mu(E)<\infty$的条件下，依测度收敛的要求弱于几乎处处收敛的要求.

系　设$(X, \mathbf{R}, \mu)$是测度空间，$E\subset X$，E上可测函数列$\{f_n\}$

(在 E 上)几乎处处收敛于有限函数 h. 如果 $\mu(E)<\infty$, 那末必存在 E 上的可测函数 f, 使得 $f\doteq h$, 并且 $f_n\Longrightarrow f$.

证 根据假设, 从定理 2 可知, 必存在 E 上可测函数 f, 使得 $f\doteq h$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n\doteq f$. 再利用定理 4 立即得本系的结论. 证毕.

由定理 3, 4 立即可以得到用几乎处处收敛刻划依测度收敛的一个定理如下.

定理 5 设 $(X, \mathbf{R}, \mu)$ 是测度空间, $E\subset X$, $\mu(E)<\infty$, $\{f_n\}$ 是 E 上的可测函数列, f 是 E 上可测函数, 那末 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f 的充要条件是: 对 $\{f_n\}$ 的任一子序列 $\{f_{n_k}\}$ 都可以从中再找到一个子序列 $\{f_{n_{k_\nu}}\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f.

证 必要性: 如果 $f_n\Longrightarrow f$, 那末它的任何子序列 $\{f_{n_k}\}$, 显然也有 $f_{n_k}\Longrightarrow f$. 对 $\{f_{n_k}\}$ 和 f 应用定理 3, 必有子序列 $\{f_{n_{k_\nu}}\}$ 几乎处处收敛于 f.

充分性: 设 $\{f_n\}$ 的任何子序列 $\{f_{n_k}\}$ 都有子序列 $\{f_{n_{k_\nu}}\}$ 几乎处处收敛于 f, 今证 $f_n\Longrightarrow f$. 假若不对, 那末存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$\mu(E(|f_n-f|>\varepsilon))$$

不收敛于零, 因此必有子序列 $\{f_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\mu(E(|f_{n_k}-f|>\varepsilon))>0 \tag{2.5}$$

这样一来, $\{f_{n_k}\}$ 中就不能存在几乎处处收敛于 f 的子序列. 因为如果有子序列 $\{f_{n_{k_\nu}}\}$ 几乎处处收敛于 f, 那末根据定理 4,

$$\lim_{\nu\to\infty}\mu(E(|f_{n_{k_\nu}}-f|>\varepsilon)=0$$

这和 (2.5) 相矛盾. 证毕.

在测度空间上, 依测度收敛还有如下一些基本性质.

定理 6 设 $(X, \mathbf{R}, \mu)$ 是测度空间, $E\subset X$, $\mu(E)<\infty$, $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ 都是 E 上可测函数的序列, 而且 $f_n\Longrightarrow f$, $g_n\Longrightarrow g$, 那末

1° f 必几乎处处等于一个 E 上可测函数;

2° 如果又有 $f_n \Longrightarrow h$, 那末 $f \doteq h$;

3° 如果 f、g 是 E 上可测的, α, β 是两个数, 那末 $\alpha f_n + \beta g_n \Longrightarrow \alpha f + \beta g$;

4° 如果 f、g 是 E 上可测的, 那末 $f_n g_n \Longrightarrow fg$;

5° 如果 g_n 和 g 几乎处处不等于零, 且 f、g 都是 E 上可测的, 那末 $f_n/g_n \Longrightarrow f/g$(这里在 g_n, g 为零的一个零集上, 可规定函数 f_n/g_n, f/g 为任意的数值).

读者可以利用定理 5 等来证明这些性质. 读者应注意, 对于性质 1°, 2°, 3° 来说, 定理 6 中的假设 $\mu(E)<\infty$ 是不必要的(对 4°、5° 是不可少的), 这里假设 $\mu(E)<\infty$ 只是为了证明起来方便。

类似于数学分析中讨论序列收敛性时, 常常用"基本序列"这样一个重要概念. 对于依测度收敛的讨论, 也可引入依测度基本序列的概念.

定义 设 $(X, \mathbf{R}, \mu)$ 是测度空间, $E \subset X$, $\{f_n\}$ 是 E 上的一列可测函数, 如果对任何 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \mu(E(|f_n-f_m|>\varepsilon))=0$$

就称 $\{f_n\}$ 是(在 E 上关于 μ)**依测度基本序列**, **或度量基本序列**.

显然, 依测度基本序列的另一个等价定义是

定义 设 $(X, \mathbf{R}, \mu)$ 是测度空间, $E \subset X$, $\{f_n\}$ 是 E 上的一列可测函数, 如果对任何 $\varepsilon>0, \delta>0$, 存在只依赖于 ε 和 δ 的 N, 使得当 $n, m \geq N$ 时,

$$\mu(E(|f_n-f_m|>\varepsilon))<\delta$$

就称 $\{f_n\}$ 是(在 E 上关于 μ)依测度基本序列.

依测度基本序列与依测度收敛序列的关系如下:

定理 7 设 $(X, \mathbf{R}, \mu)$ 是测度空间, $E \subset X$, $\{f_n\}$ 是 E 上一列可测函数, 它成为(在 E 上)依测度基本序列的充要条件是: 存在某个

E 上的可测函数 f，使得 $\{f_n\}$（在 E 上）依测度收敛于 f.

为证明这个定理，先引入如下引理.

引理 1 设 $(X, \mathbf{R}, \mu)$ 是测度空间，$E\subset X$，$\{f_n\}$ 是可测集 E 上的依测度基本序列，如果有子序列 $\{f_{n_\nu}\}$ 依测度收敛于 E 上的可测函数 f，那末 $f_n \Longrightarrow f$.

证 根据假设，对任何 $\varepsilon>0, \delta>0$，有 N，使当 $n, m\geq N$，$n_\nu > N$ 时，

$$\mu\left(E\left(|f_n-f_m|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)<\frac{\delta}{2},\quad \mu\left(E\left(|f_{n_\nu}-f|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)<\frac{\delta}{2} \tag{2.6}$$

由于 $|f_n-f|\leqslant|f_n-f_{n_\nu}|+|f_{n_\nu}-f|$，所以当 $|f_n-f|>\varepsilon$ 时，必然有 $|f_n-f_{n_\nu}|>\frac{\varepsilon}{2}$ 或者 $|f_{n_\nu}-f|>\frac{\varepsilon}{2}$，这就是说，

$$E(|f_n-f|>\varepsilon)\subset E\left(|f_n-f_{n_\nu}|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\cup E\left(|f_{n_\nu}-f|>\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

将 (2.6) 中 m 取为 n_ν，便知道当 $n>N$ 时，

$$\mu(E(|f_n-f|>\varepsilon))\leqslant\mu\left(E\left(|f_n-f_{n_\nu}|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)+\mu\left(E\left(|f_{n_\nu}-f|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)<\delta \tag{2.7}$$

这就是说 $f_n\Longrightarrow f$. 证毕.

定理 7 的证明 充分性较显然. 由于 $|f_n-f_m|\leqslant|f_n-f|+|f_m-f|$，完全类似 (2.7) 的证明有

$$\mu(E(|f_n-f_m|>\varepsilon))\leqslant\mu\left(E\left(|f_n-f|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)+\mu\left(E\left(|f_m-f|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

根据 $f_n\Longrightarrow f$，当 $n, m\to\infty$ 时，上式右边趋于零，所以左边也趋于零，因此 $\{f_n\}$ 为依测度基本序列.

必要性：设$\{f_n\}$是依测度基本序列，现在要证明存在一个可测函数f，使得$f_n \Longrightarrow f$，首先要作出f。为此，用类似定理3的方法，先证明依测度基本序列必有子序列几乎处处收敛：取$\varepsilon=\delta=\frac{1}{2^\nu}$，由于$\{f_n\}$是依测度基本序列，所以必然存在$n_\nu$，使得$n$，$m \geqslant n_\nu$时，

$$\mu\left(E\left(|f_n-f_m|>\frac{1}{2^\nu}\right)\right)<\frac{1}{2^\nu} \tag{2.8}$$

不妨设$n_\nu<n_{\nu+1}$，$\nu=1,2,\cdots$。由(2.8)得到

$$\mu\left(E\left(|f_{n_\nu}-f_{n_{\nu+1}}|>\frac{1}{2^\nu}\right)\right)<\frac{1}{2^\nu} \tag{2.9}$$

作通集

$$F_k=\bigcap_{\nu=k}^{\infty} E\left(|f_{n_{\nu+1}}-f_{n_\nu}|\leqslant\frac{1}{2^\nu}\right)$$

$$=E\left(|f_{n_{\nu+1}}-f_{n_\nu}|\leqslant\frac{1}{2^\nu},\ \nu\geqslant k\right) \tag{2.10}$$

和定理3中证明完全类似地得到

$$\mu(E-F_k)\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}$$

从而$\{f_{n_\nu}\}$在$F=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$上处处收敛，而且$\mu(E-F)=0$。

记$\{f_{n_\nu}\}$在F上的极限函数为f，把函数f延拓到E上(补充在$E-F$上规定$f=0$)后仍记为f。显然f是E上可测函数$f_{n_\nu}\xrightarrow{\mu} f$。对于$f$，根据(2.10)，有如下的估计式：对任何$k$，在$F_k$上

$$|f_{n_k}-f|=\lim_{k'\to\infty}|f_{n_k}-f_{n_{k'}}|\leqslant\lim_{k'\to\infty}\sum_{j=k}^{k'-1}|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}|\leqslant\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{2^j}$$

$$=\frac{1}{2^{k-1}} \tag{2.11}$$

所以 $F_k\subset E\left(|f_{n_k}-f|\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}\right)$. 因此

$$\mu\left(E\left(|f_{n_k}-f|>\frac{1}{2^{k-1}}\right)\right)\leqslant\mu(E-F_k)<\frac{1}{2^{k-1}} \tag{2.12}$$

对任何 $\varepsilon>0,\delta>0$, 取自然数 u 使得 $\frac{1}{2^u}<\min(\varepsilon,\delta)$, 那末由 (2.12), 当 $k>u$ 时,

$$\mu(E(|f_{n_k}-f|>\varepsilon))\leqslant\mu\left(E|f_{n_k}-f|>\frac{1}{2^{k-1}}\right)<\delta$$

因此 $f_{n_k}\Longrightarrow f$. 再由引理 1 可知 $f_n\Longrightarrow f$. 证毕.

系 设 $(X,\mathbf{R},\mu)$ 是测度空间, $E\subset X$, $\{f_n\}$ 是 E 上可测函数序列. 如果存在 E 上有限函数 h, 使得 $f_n\Longrightarrow h$, 那末必存在 E 上可测函数 f, 使得 $f\doteq h$, 并且 $f_n\Longrightarrow f$.

证 对任何 $\varepsilon>0$, 由于

$$E(|f_n-f_m|>\varepsilon)\subset\left[E\left(|f_n-h|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\cup E\left(|f_m-h|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$$

因此 $\{f_n\}$ 在 E 上是依测度基本的. 由定理 7, 存在 E 上可测函数 f, 使得 $f_n\Longrightarrow f$. 再由定理 6 的 2°, 又得到 $f\doteq h$. 证毕.

前面讨论了依测度收敛和几乎处处收敛关系, 下面再介绍爱戈洛夫(Д. Ф. Егоров)关于收敛的可测函数列的一个重要定理, 它指出了几乎处处收敛与一致收敛之间的联系.

定理 8(爱戈洛夫Егоров) 设 $(X,\mathbf{R},\mu)$ 是测度空间, $E\subset X$, $\{f_n\}$ 是 E 上一列可测函数, $\mu(E)<\infty$, 如果 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于有限函数 f, 那末, 对任何 $\delta>0$, 必定存在 E 中可测子集 E_δ, 使得 $\mu(E-E_\delta)<\delta$, 而且在 E_δ 上, $\{f_n\}$ 一致收敛于 f.

证 注意结论中只要求在 E 中挖去一个测度小于 δ 的集后 $\{f_n\}$ 一致收敛. 又由于定理 2, 所以今后不妨设 f 是 E 上可测函数(否则修改一个 μ-零集上 f 的值, 使 f 可测, 而把这个修改的 μ-

零集放入被挖掉的集中就可以了).

又根据假设,存在 μ-零集 E_0,使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),\quad x\in E_1=E-E_0$$

将 μ-零集 $E\cap E_0$ 放入被挖掉的集中,由此可知,我们只要在 E_1 上证明定理成立即可.

记

$$E_{m,k}=E_1\left(|f_m-f|\leqslant\frac{1}{k}\right)$$

作 $B_{n,k}=\bigcap_{m=n}^{\infty}E_{m,k}=E_1\left(|f_m-f|\leqslant\frac{1}{k},\ m=n,\ n+1,\ \cdots\right)$. 对于任意取的一列趋向无限大的自然数列 $\{n_k\}$,作集

$$F=\bigcap_{k=1}^{\infty}B_{n_k,k}=E_1\left(|f_m-f|\leqslant\frac{1}{k},\ m\geqslant n_k,\ k=1,\ 2,\ \cdots\right)\quad(2.13)$$

那末,对任何 $\varepsilon>0$,只要取 $k_0>\frac{1}{\varepsilon}$,当 $m\geqslant n_{k_0}$ 时,对一切 $x\in F$,就有

$$|f_m(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{k_0}<\varepsilon\quad(2.14)$$

即 $\{f_n\}$ 在 F 上一致收敛于 f.

剩下的便是要证明: 对处处收敛于 f 的可测函数列 $\{f_n\}$ 和任何 $\delta>0$,必可选出 $\{n_k\}$,使得所作可测集 F 适合 $\mu(E-F)<\delta$. 然后就取 $E_\delta=F$ 便得到定理的结论.

将(2.3)中 ε 取为 $\frac{1}{k}$,那末 $\lim\limits_{n\to\infty}B_{n,k}=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_{n,k}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}E_{m,k}=E_1$,再由第二章 §2 定理 1 的(ix)得到

$$\lim_{n\to\infty}\mu(B_{n,k})=\mu(E)$$

因为 $\mu(E)<\infty$,所以对任何 $\delta>0$,可以取 n_k 充分大,使得

$$\mu(E)-\mu(B_{n_k,k})<\frac{\delta}{2^k} \tag{2.15}$$

而且依次取 $n_k>n_{k-1}$，以子列 $\{n_k\}$ 按(2.13)作出集 F，由此得到

$$\mu(E-F)=\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E-B_{n_k,k})\Big)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E-B_{n_k,k})\leqslant\delta\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\delta$$

证毕.

应该注意，定理中 $\mu(E)<\infty$ 这个条件是不能去掉的. 例如例4中的函数列 $\{f_n(x)\}$ 是处处收敛于1的. 但是，对任何正数 δ 以及任何可测集 E_δ，当 $\mu(E-E_\delta)<\delta$ 时，$\{f_n\}$ 在 E_δ 上不能一致收敛于1. 事实上，由于假设 $\mu([0,\infty)-E_\delta)<\delta$，所以 E_δ 不能全部包含在 $(0,n]$ 中，因而必有一点 $x_n\in E_\delta\cap(n,\infty)$，$f_n(x_n)=0$. 这样，$\{f_n\}$ 在 E_δ 上就不能一致收敛于1.

3. 完全测度空间上的可测函数列的收敛 从前两小节可以看出，在讨论可测函数序列的收敛时，由它们的几乎处处收敛或依测度收敛(度量收敛)并不能推出极限函数 f 是可测的，往往需要在一个 μ-零集的子集上修改函数值后方能成为可测函数. 其原因就是这两种收敛并不关心一个 μ-零集的子集上函数值的情况. 可是在一般测度空间中，μ-零集的子集可以是不可测的，从函数的可测性来看，是不能随便改动一个 μ-零集的子集上的函数值的. 在完全测度空间上就不会发生上述问题了.

定义 设 $(X,\boldsymbol{R},\mu)$ 是测度空间，如果 μ 是 $\boldsymbol{R}$ 上完全测度，那末称 $(X,\boldsymbol{R},\mu)$ 是**完全测度空间**.

定理 9 设 $(X,\boldsymbol{R},\mu)$ 是完全测度空间.

1° 如果 E_0 是 μ-零集，那末定义在 E_0 上任何有限函数都是 E_0 上的可测函数.

2° 设 f、h 是 E 上的两个有限函数，如果存在某个 μ-零集 E_0，当 $x\in E-E_0$ 时，$f(x)=h(x)$. 那末 f 是 E 上可测的充要条件

为 h 是 E 上可测函数.

证　1° 对任何实数 c, $E_0(f>c)\subset E_0$. 利用测度 μ 的完全性, 从 $\mu(E_0)=0$ 立即可以推出 $E_0(f>c)$ 也是 μ-零集, 所以 f 是可测的.

2° 因为 μ 是完全测度, 显然 $E\cap E_0$ 也是 μ-零集, 因此 $E(f\neq h)(\subset(E\cap E_0))$ 也是 μ-零集. 由此可知, 2° 中假设的 μ-零集 E_0 不妨就认为是 $E(f\neq h)$, 即 $E_0=E(f\neq h)$. 记 $E_1=E-E_0$.

如果 f 是 E 上可测函数, 那末 E 是可测集, 从而 E_1 也是可测集, 在 E_1 上 $f=h$, 从而 h 是 E_1 上可测函数. 由于 $\mu(E_0)=0$, 由 1°, h 在 E_0 上是可测的. 因而 h 是 $E=E_1\cup E_0$ 上可测的.

f 和 h 地位是对称的, 所以 2° 成立. 证毕.

利用定理 9 以及第一、二小节的结果, 很容易获得完全测度空间上如下结果(读者自己证明).

定理 1′　设 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是完全测度空间. 如果 E 上可测函数序列几乎处处收敛于有限函数 f, 那末 f 必是 E 上可测函数.

定理 2′　设 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是完全测度空间, $\{f_n\}$、$\{h_n\}$ 是 E 上两个可测函数序列.

(i) 如果 $f_n\Longrightarrow f$(有限函数), 那末必有子序列 $\{f_{n_\nu}\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f, 从而 f 必是 E 上可测函数.

(ii) 如果 $\mu(E)<\infty$, 并且 $f_n\xrightarrow[\mu]{\cdot}f$(有限函数), 那末 $f_n\Longrightarrow f$.

(iii) 如果 $\mu(E)<\infty$, 那末 $f_n\Longrightarrow f$(有限函数)的充要条件是: 对任何 $\{f_n\}$ 的子序列 $\{f_{n_\nu}\}$, 必可再从中找出子序列在 E 上几乎处处收敛于 f.

(iv) 如果 $\mu(E)<\infty$, $f_n\Longrightarrow f$, $h_n\Longrightarrow h$(f、h 都是有限函数), 那末

1° 如果又有 $f_n \Longrightarrow k$, 那末必有 $k \doteq f$;

2° $\alpha f_n + \beta h_n \Longrightarrow \alpha f + \beta h$(这里 α、β 是常数);

3° $f_n h_n \Longrightarrow fh$;

4° 当 h_n 和 h 几乎处处不等于零时, $f_n/h_n \Longrightarrow f/h$.

当然, 定理 7.8 在完全测度空间上也成立.

4. 勒贝格可测函数的构造 前面(包括本章 §1)讨论了可测函数的一般性质. 显然, 由于可测空间或测度空间本身的结构不同, 随之, 有些情况下可测函数的结构就简单, 而有些情况下就很复杂. 对一般分析数学来说, 勒贝格测度空间$(E^1, \boldsymbol{L}, m)$有着特别重要的地位, 它上面的可测函数的结构就很复杂. 在 §1 第 5 小节中, 我们曾用 Borel 可测函数来描述它(参见 §1 定理 8). Borel 可测函数本身也还是很复杂的, 在本小节中, 我们要用熟悉的"连续函数"来描述勒贝格可测函数. 为此, 先介绍直线上任意集 E 上连续函数概念.

设 E 是直线上的点集, f 是 E 上的一个函数. 设 $x_0 \in E$, 如果对任何一个 $\varepsilon > 0$, 必有 $\delta > 0$, 使得当 $x \in E$, 而且 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

就称 x_0 是 f 的**连续点**. 和数学分析中一样, x_0 是 f 的连续点等价于: 对 E 中任何一个收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}$, 成立着

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

如果 E 中每个点都是 f 的连续点, 就说 f 是 E 上的**连续函数**[①].

例 5 区间$[0, 1]$上的 Dirichlet 函数,

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

它在$[0, 1]$上没有一个连续点. 但如果用 E 表示$[0, 1]$中无理数全

① 如果一个函数 f 的定义域是 E_1, $E \subset E_1$, 我们说 f 是 E 上的连续函数是指把 f 限制在 E 上时, E 中每个点都是连续点. 如例 5 中 $D(x)$ 就是 E 上的连续函数.

体，而将 $D(x)$ 限制在 E 上时，所得到的函数 $D(x)|_E$ 便是 E 上的常数函数零，因而它是连续函数．然而，$D(x)|_E$ 与 $D(x)$，这两个函数的定义域不同，不是同一函数．

例 6 设 $F_1, \cdots, F_m$ 是直线上 m 个互不相交的闭集，作 $F=\bigcup_{i=1}^{m} F_i$ 上函数

$$f(x)=\alpha_i,\quad x\in F_i$$

其中 α_i 为常数，那末 f 是 F 上的连续函数．

证 任取 $x_0\in F_j$，今证 x_0 是 f 的连续点．任取 $\{x_n\}\in F$，且 $x_n\to x_0$．$\{x_n\}$ 中最多只有有限个点落在 $F-F_j$ 中．否则 x_0 将成为闭集 $F-F_j=\bigcup_{i\neq j} F_i$ 的极限点，因而 $x_0\in F-F_j$．这与假设 $x_0\in F_j$ 矛盾．既然 $\{x_n\}$ 中除有限个点外都属于 F_j，所以数列 $\{f(x_n)\}$ 中除去有限个值外，$f(x_n)=\alpha_i=f(x_0)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$．因而 f 是 F 上的连续函数．

可同数学分析中一样地证明：如果 $\{f_n\}$ 是 E 上一列连续函数，而且 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f 时，那末 f 必是 E 上的连续函数．

下面是勒贝格可测函数构造定理．

定理 10（鲁津 Н. Н. Лузин） 设 E 是直线上的勒贝格可测集，f 是 E 上勒贝格可测函数．那末，对任何 $\delta>0$，必有 E 的闭子集 F_δ，使得 $m(E-F_\delta)<\delta$，而且 f 是 F_δ 上的连续函数．

证 先设 $m(E)<\infty$．对每个自然数 k，作可测集

$$E_{n,k}=E\left(\frac{n}{k}\leqslant f<\frac{n+1}{k}\right),\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

显然 $E=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} E_{n,k}$，而且当 $n\neq n'$ 时，$E_{n,k}\cap E_{n',k}=\varnothing$．因此 $m(E)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(E_{n,k})$．因为 $m(E)<\infty$，所以必有自然数 n_k，使得

$\left(\sum_{n=-\infty}^{-n_k-1}+\sum_{n=n_k+1}^{\infty}\right)m(E_{n,k})<\frac{\delta}{2^{k+1}}$. 当 $|n|\leqslant n_k$ 时，再作闭集 $F_{n,k}\subset E_{n,k}$，使得

$$\sum_{n=-n_k}^{n_k} m(E_{n,k}-F_{n,k})<\frac{\delta}{2^{k+1}}$$

记 $F_k=\bigcup_{n=-n_k}^{n_k}F_{n,k}$，那末 $E-F_k=\left(\bigcup_{n=-\infty}^{-n_k-1}E_{n,k}\right)\cup\left(\bigcup_{n=n_k+1}E_{n,k}\right)\cup\left(\bigcup_{n=-n_k}^{n_k}(E_{n,k}-F_{n,k})\right)$. 因此

$$m(E-F_k)<\frac{\delta}{2^k}$$

作 F_k 上的连续函数 f_k 如下：当 $x\in F_{n,k}$ 时，$f_k(x)=\frac{n}{k}$. 由例 6 知道 f_k 在 F_k 上是连续函数. 由 f_k 的定义，易知当 $x\in F_k$ 时，

$$0\leqslant f(x)-f_k(x)\leqslant\frac{1}{k}$$

因此，在 $F_\delta=\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k$ 上连续函数列 f_k 一致收敛于 f. 由和通关系式 $E-F_\delta=\bigcup_{k=1}^{\infty}(E-F_k)$，利用 $m(E-F_k)<\frac{\delta}{2^k}$，就得到 $m(E-F_\delta)<\delta$.

对于 $m(E)=\infty$ 的情况留作习题. 证毕.

然而，直线上任何闭集上的连续函数，必可延拓成全直线上的连续函数。

引理 2　设 F 是直线上的闭集，函数 f 在 F 上连续，那末必有直线上的连续函数 h，使得当 $x\in F$ 时，$f=h$.

证　当 $x\in F$ 时，规定 $h=f$. 把 F 的余集记为 O，$O=\bigcup_{\nu}(a_\nu,b_\nu)$，

$\{(a_\nu, b_\nu)\}$是O的构成区间集. 如果(a_ν, b_ν)是有限区间,那末$a_\nu, b_\nu \in F$. 在(a_ν, b_ν)上规定

$$h(x)=f(a_\nu)\frac{b_\nu-x}{b_\nu-a_\nu}+f(b_\nu)\frac{x-a_\nu}{b_\nu-a_\nu}$$

如果(a_ν, b_ν)是无限区间,例如$a_\nu=-\infty$,那末$b_\nu \in F$, 在$(-\infty, b_\nu)$上规定$h(x)=f(b_\nu)$。如果是(a_ν, ∞)类型的余区间, 便在它的上面规定$h(x)=f(a_\nu)$.

现在证明$h(x)$是全直线上的连续函数: 显然O中的每个点都是h的连续点. 再证F中的点也是h的连续点就可以了. 事实上,任取$x_0 \in F$,对任何$\varepsilon>0$,必有$\delta>0$,使当$x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\cap F$时

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

如果$(x_0-\delta, x_0)$中不含F中的点,那末x_0必是某构成区间(a_ν, b_ν)的右端点. 又因为h在$(x_0-\delta, x_0)$中是线性函数, 所以必存在η,使得当$x \in (\eta, x_0)$时

$$|h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$$

如果$(x_0-\delta, x_0)$中含有F中的点,例如η,那末当$x \in [\eta, x_0)\cap F$时,$h(x)=f(x)$, $h(x_0)=f(x_0)$. 因此

$$|h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$$

如果$x \in [\eta, x_0)-F$,那末必有F的余区间(a_ν, b_ν), $x \in (a_\nu, b_\nu)\subset(\eta, x_0)$,由于$a_\nu, b_\nu \in [\eta, x_0]\cap F$,所以由上式有

$$|h(a_\nu)-h(x_0)|<\varepsilon, \ |h(b_\nu)-h(x_0)|<\varepsilon$$

然而$h(x)$的值介于$h(a_\nu)$, $h(b_\nu)$之间,因此$|h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$. 这就证明了$x_0$是$h$的左连续点. 同样,可以证明$x_0$也是$h$的右连续点,因此$x_0$是$h$的连续点. 证毕.

利用这个引理,就得到鲁津定理的另一种形式:

定理 11(鲁津) 设E是直线上的勒贝格可测集, f是E上勒

贝格可测函数．那末对任何 $\delta>0$，必然有直线上的连续函数 h，使得

$$m(E(f\neq h))<\delta$$

证　因为对每个 $\delta>0$，存在 E 的闭子集 F_δ，使得 $m(E-F_\delta)<\delta$，而且 f 在 F_δ 上是连续的，把 f 延拓成直线上的连续函数 h，那末 $E(f\neq h)\subset E-F_\delta$，因此 $m(E(f\neq h))<\delta$．证毕．

系　设 E 是直线上勒贝格可测集，f 是 E 上勒贝格可测函数，并且存在常数 $M>0$，使得 $|f|\leqslant M$ 在 E 上成立．那末对任何 $\delta>0$，必存在直线上连续函数 h，满足 $|h|\leqslant M$，$m(E(f\neq h))<\delta$．

证　从引理 2 中 h 的作法立即可知 $|h|\leqslant M$．再由定理 11 便知本系成立．证毕．

读者注意，这一小节中的 Лузин 定理的证明中用到连续函数、闭集以及闭集上连续函数可以延拓成全空间上连续函数，所以 Лузин 定理是不能在一般测度空间中推广的．

习　题

1．设 $(X,\boldsymbol{R},\mu)$ 是完全测度空间，$E\subset X$，$\{f_n\}$ 和 $\{h_n\}$ 是 E 上两列可测函数，并且 $f_n\Longrightarrow f$、$h_n\Longrightarrow h$（f、h 是 E 上有限函数）．证明

(i)　f 是 E 上可测函数；

(ii)　对任何常数 α、β，$\alpha f_n+\beta h_n\Longrightarrow \alpha f+\beta h$；

（以下再假设 $\mu(E)<\infty$）

(iii)　$f_nh_n\Longrightarrow fh$；

(iv)　当 h_n、h 在 E 上均几乎处处不是零时，$f_n/h_n\Longrightarrow f/h$．

举例说明当 $\mu(E)=\infty$ 时，(iii)、(iv) 不成立．

2．设 $(X,\boldsymbol{R},\mu)$ 是测度空间，$E\subset X$，$\mu(E)<\infty$，$\{f_n\}$ 是 E 上可测函数的序列．证明当 $f_n\Longrightarrow f$（有限函数）时，对任何 $p>0$，

(i)　$|f_n|^p\Longrightarrow |f|^p$；

(ii)　对任何 E 上可测函数 h，$|f_n-h|^p\Longrightarrow |f-h|^p$．

3．设 f 是直线上勒贝格可测集 E（$m(E)<\infty$）上的勒贝格可测函数．证

明必存在一列阶梯函数(在有限个有限区间上为非零常数，其余地方为零的函数)$\{\varphi_n\}$，使得下面两式同时成立

$$\varphi_n \underset{m}{\Longrightarrow} f,\ \varphi_n \xrightarrow[m]{\cdot} f$$

在 $m(E)=\infty$ 时，$\varphi_n \xrightarrow[m]{\cdot} f$ 成立，并举例说明 $\varphi_n \Longrightarrow f$ 不成立。

4. 设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是测度空间，$E\subset X$，$\{f_n\}$是E上一列可测函数，$\mu(E)<\infty$，而且 $f_n \xrightarrow[m]{\cdot} \infty$. 证明：对任何 $\delta>0$，必存在 E 的可测子集 E_δ，使得 $\mu(E-E_\delta)<\delta$，并且$\{f_n\}$在 E_δ 上均匀发散于∞(即对任何数 $M>0$，必存在自然数N，使得当 $n\geqslant N$ 时，对一切$x\in E_\delta$，$f_n(x)\geqslant M$)。

5. 证明 Лузин 定理在 $\mu(E)=\infty$情况成立。

6. 将 Лузин 定理中的连续函数改为多项式，成立不成立？为什么？将 лузин 定理中的 δ 换为零，结论对不对？为什么？

7. 设 E 是勒贝格可测集，$\{f_n\}$ 是 E 上勒贝格可测函数序列，并且 $f_n \underset{m}{\Longrightarrow} f$(有限函数)。又设 h 是直线上连续函数，问是否有 $h(f_n)\underset{m}{\Longrightarrow} h(f)$？为什么？

又问$f_n\left(\frac{1}{x}\right)\underset{m}{\Longrightarrow} f\left(\frac{1}{x}\right)$？为什么？

8. 证明 f 是$[a, b]$上勒贝格可测函数的充要条件是下面几个条件中的任何一个。

(i) 存在多项式序列$\{p_n(x)\}$，在$[a, b]$上 $p_n(x)\xrightarrow[m]{\cdot} f(x)$.

(ii) 当$[a, b]\subset(0, 2\pi)$时，存在三角多项式序列$\{T_n(x)\}$，在$[a, b]$上 $T_n(x)\xrightarrow[m]{\cdot} f(x)$.

9. 设 f 是$(-\infty, \infty)$上勒贝格可测函数，而且对一切 t_1、$t_2\in(-\infty, \infty)$，

$$f(t_1+t_2)=f(t_1)+f(t_2)$$

证明必有常数 c，使得 $f(t)=ct$.

10. Лузин 定理对于勒贝格-斯蒂阶测度是否仍成立。为什么？

11. 习题 8 中勒贝格测度换成勒贝格-斯蒂阶测度后是否仍成立。为什么？

12. 设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是测度空间，$E\subset X$，$\{f_n\}$ 是E上可测函数序列，并且 $f_n\Longrightarrow f$ (有限函数)。证明必存在子序列 $\{f_{n_\nu}\}$，使得对任何 $\delta>0$，总存在 $E_\delta\subset E$，$\mu(E-E_\delta)<\delta$，并且$\{f_{n_\nu}\}$在 E_δ 上一致收敛于 f.

13. 设 $X=[a, b]\subset(0, 2\pi)$，记$[a, b]$上使得$\{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$都可测

的最小 σ-环为 $\boldsymbol{R}_P$, 使得$\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$都可测的最小 σ-环为 $\boldsymbol{R}_T$, 证明 $\boldsymbol{R}_P=\boldsymbol{R}_T$, 并且它们是$[a, b]$上的 σ-代数.

14. 证明存在$[a, b]$上一列连续函数$\{f_n\}$, 使得形式级数$f_1+f_2+\cdots+f_n+\cdots$在不打乱顺序, 但可将其中插入括号分段求和后所成的函数项级数(关于m)几乎处处收敛于任何事先给定的任何勒贝格可测函数.

15. 将本章 §1 的定理 8, (i) 推广到勒贝格-斯蒂阶测度的情况; (ii) 推广到一般测度空间, 即: 设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是σ-有限的测度空间, $(X, \boldsymbol{R}^*, \mu)$是$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$的完全化的测度空间, $E\subset X$. 如果 f 是E上关于$(X, \boldsymbol{R}^*, \mu)$ 的可测函数, 那末必存在 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 上的可测集D(即 $D\in\boldsymbol{R}$), $D\supset E$, 以及D上关于$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$可测的函数 h, 使得 f 和 h 在E上按$(X, \boldsymbol{R}^*\mu)$几乎处处相等.

16. 设 f 是直线上勒贝格可测函数, 又设有常数 a, b, 使对一切不全为零的整数 l、n, $la+nb\neq0$, 而且

$$f(x)\underset{m}{\doteq}f(x+a),\ f(x)\underset{m}{\doteq}f(x+b)$$

证明存在常数 c, 使得 $f\underset{m}{\doteq}c$.

§3 积分及其性质

在这一节中, 主要任务是利用第二章中介绍的测度和本章 §1—2的可测函数来建立积分. 在数学分析中, 一般是先建立有限区间上有界函数的黎曼积分, 然后再讨论无界区间或无界函数的广义黎曼积分. 现在, 新积分建立的顺序也是如此: 1. 在测度有限的集上有界可测函数的积分; 2. 在测度 σ-有限的集上可测函数的积分.

此外, 因为讨论的是积分, 所以本节中的"函数", 如无特别申明, 总是指有限函数.

1. 在测度有限的集上有界可测函数的积分 我们先按照第二章开始时所说的那种做法给出新积分的定义.

定义 设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是测度空间, E 是一个可测集, $\mu(E)<\infty$,

f 是定义在 E 上的可测函数，又设 f 是有界的，就是说存在实数 l 及 u 使得 $f(E)\subset(l,u)$. 在 $[l, u]$ 中任取一分点组 D: $l=l_0<l_1<\cdots<l_n=u$. 记

$$\delta(D)=\max_k(l_k-l_{k-1}),\ E_k=E(l_{k-1}\leqslant f<l_k)$$

并任取 $l_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant l_k$ 作和式

$$S(D)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mu(E_k)$$

称它为 f 在分点组 D 下的一个"和数". 如果存在数 s, 它满足如下条件：对任何 $e>0$, 总有 $\delta>0$, 使得对任何分点组 D, 当 $\delta(D)<\delta$ 时,

$$|S(D)-s|<e \tag{3.1}$$

那末就说

$$s=\lim_{\delta(D)\to 0}S(D) \tag{3.1'}$$

这时就称 f 在 E 上关于测度 μ 是**可积(分)**的，并称 s 是 f 在 E 上关于 μ 的**积分**①，记做

$$s=\int_E f d\mu$$

特别，当测度空间 $(X, \mathbf{R}, \mu)$ 是勒贝格测度空间 $(E^1, \mathbf{L}, m)$（或勒贝格-斯蒂阶测度空间 $(E^1, \mathbf{L}^g, g)$），f 关于 m（或 g）可积时，称 f 是勒贝格可积（或（关于 g）勒贝格-斯蒂阶可积）函数，又称 s 是 f 在 E 上的勒贝格积分（或（关于 g 的）勒贝格-斯蒂阶积分），记做 $(L)\int_E f dx\left(或\int_E f dg\right)$. 通常就简写为 $\int_E f dx$. 当 $E=[a,b]$ 时，勒贝格积分又写成 $\int_a^b f dx$. 如果讨论中还要用到黎曼积分，我们便把黎

---

① 在这里函数 f 的可积性和积分的定义从表面上来看与满足条件 $f(E)\subset(l, u)$ 的数 l 和 u 的选取有关，但是不难证明实际上它们与 l 及 u 的选取无关.

曼积分写为$(R)\int_a^b f dx$. 对于分点组 D, 我们称

$$\overline{S}(D)=\sum_{k=1}^{n} l_k \mu(E(l_{k-1}\leqslant f<l_k))$$

$$\underline{S}(D)=\sum_{k=1}^{n} l_{k-1} \mu(E(l_{k-1}\leqslant f<l_k))$$

分别为函数 f 在分点组 D 下的"大和数"与"小和数".

先举几个可积函数的例子.

例 1 设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是测度空间. E 是 μ-零集, 那末 E 上任何有界可测函数 f 是可积的, 而且积分是零.

(当$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是完全测度空间时, 那末 μ-零集 E 上的任何有界函数都是可测的, 所以 f 是可积的, 而且积分是零)

事实上, 这时一切 $\mu(E_k)=0$, 所以一切"和数"$S(D)=0$. 因此 f 是可积的而且

$$\int_E f d\mu=0$$

例 2 设 $X=[0, 1]$, $\boldsymbol{R}$ 是 X 的一切子集所成的 σ-代数, $\boldsymbol{R}$ 上测度 μ 定义如下:

$$\mu(E_1)=\begin{cases}1, & 0\in E_1,\\ 0, & 0\overline{\in} E_1,\end{cases} \quad E_1\in \boldsymbol{R}$$

在测度空间$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$上, 显然, 任何定义在 $E=X$ 上的有界函数 f 都是可积的, 而且

$$\int_E f d\mu=f(0)$$

事实上, 设 $f(E)\subset(l, u)$对$[l, u]$上的任何分点组 D, 必有唯一的 k:

$$l_{k-1}\leqslant f(0)<l_k$$

当 $i\neq k$ 时，$\mu(E_i)=0$，因此 $S(D)=\xi_k$，$l_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant l_k$，即

$$\lim_{\delta(D)\to 0} S(D)=f(0)$$

例 3 在勒贝格测度空间$(E^1, \mathbf{L}, m)$中，我们考察$[0, 1]$上的 Dirichlet 函数 $D(x)$（见第二章引言中有关黎曼积分的分析）的积分．对于分点组 D，当 $l_{k-1}\leqslant 0<l_k$ 时，$m(E_k)=1$．但这时 $l_{k-1}\leqslant\xi_k<l_k$，$|\xi_k|\leqslant\delta(D)$．而对别的 E_k 都有 $m(E_k)=0$．所以 $S(D)=\xi_k$，$|\xi_k|\leqslant\delta(D)$．因此 $D(x)$是勒贝格可积的而且

$$\int_0^1 D(x)dx=0$$

$D(x)$在黎曼积分意义下是不可积的，而按勒贝格积分意义是可积的．这说明这两种积分的可积函数类是有区别的．

对于我们这一节所引入的积分，究竟那些函数是可积的呢？下面的定理回答了这个问题．这是新积分理论很基本的结果．

定理 1 设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是测度空间，$E\in\boldsymbol{R}$，且 $\mu(E)<\infty$，那末 E 上一切有界可测函数 f（关于测度 μ）必是可积的．

证 按照函数可积的定义，便要证明存在一个数 s，使得对任何分点组 D，(3, 1′)成立．

作所有分点组“小和”的上确界 $\underline{S}=\sup\limits_{D}\underline{S}(D)$，“大和”的下确界 $\overline{S}=\inf\limits_{D}\overline{S}(D)$

第一步，先证 $\underline{S}\leqslant\overline{S}$．事实上，如果 D'，D'' 是两个分点组，将 D', D'' 的分点合并起来构成一个新分点组 $\overline{D}$，$\overline{D}$ 可以看成在 D' 或 D'' 中又增加了一些分点，例如当 D' 中的相邻分点是 l_{i-1}，l_i 时，相应的 $\underline{S}(D')$中的项是 $l_{i-1}\mu(E(l_{i-1}\leqslant f<l_i))$，如果把它们看成 $\overline{D}$ 的分点时，它们就不一定再相邻了，假设其中增加了某些分点 $\overline{l}_j, \cdots, \overline{l}_{k-1}$：

$$l_{i-1}=\overline{l}_{j-1}<\overline{l}_j<\cdots<\overline{l}_k=l_i$$

那末相应的$\underline{S}(\bar{D})$中的项是

$$\sum_{p=j}^{k} l_{p-1}\mu(E(l_{p-1}\leqslant f<l_p))\geqslant l_{i-1}\sum_{p=j}^{k}\mu(E(l_{p-1}\leqslant f<l_p))$$

$$=l_{i-1}\mu(E(l_{i-1}\leqslant f<l_i))$$

所以

$$\underline{S}(D')\leqslant\underline{S}(\bar{D})$$

类似地有$\bar{S}(\bar{D})\leqslant\bar{S}(D')$，即在一个分点组中如果增加了分点，那末“小和”不减，“大和”不增．从而，对任何两个分点组D',D''都有

$$\underline{S}(D')\leqslant\underline{S}(\bar{D})\leqslant\bar{S}(\bar{D})\leqslant\bar{S}(D'')$$

即

$$\underline{S}(D')\leqslant\bar{S}(D'')$$

因此数集$\{\underline{S}(D)\}$中一切数不超过数集$\{\bar{S}(D)\}$中任何一个数．这就得到

$$\underline{S}\leqslant\bar{S}$$

第二步，证明$\underline{S}=\bar{S}$：事实上，设D为任一分点组，由于

$$\underline{S}(D)\leqslant\underline{S}\leqslant\bar{S}\leqslant\bar{S}(D) \tag{3.2}$$

所以

$$0\leqslant\bar{S}-\underline{S}\leqslant\bar{S}(D)-\underline{S}(D)=\sum_{k=1}^{n}(l_k-l_{k-1})\mu(E_k)\leqslant\delta(D)\mu(E) \tag{3.3}$$

特别，如果取一列分点组$\{D_n\}$，$\delta(D_n)\to0$，那末，由(3.3)便得到$\underline{S}=\bar{S}$．

第三步，取$s=\underline{S}=\bar{S}$，现在来证明s满足(3.1)：对任何$\varepsilon>0$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{\mu(E)+1}$．对任何分点组$D$，当$\delta(D)<\delta$时，根据(3.2)、(3.3)式，并注意到$s=\underline{S}=\bar{S}$，$\underline{S}(D)\leqslant S(D)\leqslant\bar{S}(D)$，我们就得到

$$s-S(D)\leqslant\bar{S}(D)-\underline{S}(D)\leqslant\delta(D)\mu(E)<\varepsilon$$

$$S(D)-s\leqslant\bar{S}(D)-\underline{S}(D)\leqslant\delta(D)\mu(E)<\varepsilon$$

证毕．

下面介绍积分的性质．

引理 1 设$(X, \mathbf{R}, \mu)$是测度空间，$E\in\mathbf{R}$，并且$\mu(E)<\infty$，f是E上有界可测函数，且$l\leqslant f\leqslant u$，那末

$$l\mu(E)\leqslant\int_E fd\mu\leqslant u\mu(E) \tag{3.4}$$

证 任取正数ε，那末$f(E)\subset(l-\varepsilon,\ u+\varepsilon)$，任取一分点组$l-\varepsilon=l_0<l_1<\cdots<l_n=u+\varepsilon$，那末

$$(l-\varepsilon)\mu(E)\leqslant S(D)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mu(E_k)\leqslant(u+\varepsilon)\mu(E)$$

先令$\delta(D)\to 0$，再令$\varepsilon\to 0$，就得到(3.4)．证毕．

定理 2 设$(X, \mathbf{R}, \mu)$是测度空间，$E\in\mathbf{R}$，并且$\mu(E)<\infty$，f是E上有界可测函数．如果E分解成有限个互不相交的可测集$\{E_i\}$的和：$E=\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_i$，那末

$$\int_E fd\mu=\sum_{i=1}^{m}\int_{E_i}fd\mu \tag{3.5}$$

这个定理称为积分的**有限可加性**定理．

证 设D是任一分点组$l_0<l_1<\cdots<l_n$．记$E_k=E(l_{k-1}\leqslant f<l_k)$，$E_{ik}=E_i(l_{k-1}\leqslant f<l_k)$，$i=1, 2, \cdots, m$．显然$E_k=\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_{ik}$，而且当$i\neq i'$时，$E_{ik}\cap E_{i'k}=\varnothing$，因此

$$\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m}E_{ik}\Big)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\xi_k\mu(E_{ik})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mu(E_{ik}) \tag{3.6}$$

(3.6)式左边是f作为E上的函数，在分点组D下的"和数"，而(3.6)右边的和$\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\mu(E_{ik})$正是把$f$看做$E_i$上函数时，在分点组$D$下的"和数"．令$\delta(D)\to 0$，便得到(3.5)．证毕．

积分的有限可加性是黎曼积分中的有限可加性

$$(R)\int_a^b f dx=(R)\int_a^c f dx+(R)\int_c^b f dx$$

的发展. 以后我们还要证明积分有可列可加性.

例 4 设 f 是$[a, b]$上的函数, $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, f 在$[x_0, x_1]$, $(x_{i-1}, x_i](i=2, 3, \cdots n)$上取常数值 α_i, 那末 f 在$[a, b]$上是勒贝格可积的, 而且

$$(L)\int_a^b f dx=\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i-x_{i-1})=(R)\int_a^b f dx \tag{3.7}$$

事实上, 由勒贝格积分的定义, f 在$[x_0, x_1]$, 及$(x_{i-1}, x_i]$上是勒贝格可积的, 而且

$$(L)\int_{(x_{i-1}, x_i]} f dx=\alpha_i(x_i-x_{i-1})=(R)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f dx$$

在$[x_0, x_1]$上的积分也可得类似的等式, 再由定理 2 所述的积分的有限可加性就得到(3.7).

例 5 在勒贝格-斯蒂阶测度空间$(E^1, \mathbf{L}^g, g)$上, 取 f 仍如例 4 中函数. 那末 f 在$[a, b]$上关于 g 是可积的, 而且

$$\int_E f dg=\sum_{i=1}^n \alpha_i(g(x_i)-g(x_{i-1}))+\alpha_1(g(x_0+0)-g(x_0)) \tag{3.8}$$

其中 $E=[a, b]$, 而$\int_{[a,b]} f dg$ 又常写成$\int_a^b f dg$.

利用引理 1 和定理 2 就得到积分的线性.

定理 3 设$(X, \mathbf{R}, \mu)$是测度空间, $E\in\mathbf{R}$, 并且 f、g 是 E 上两个有界可测函数, $\mu(E)<\infty$. 那末,

(i) 对任何两个数 α, β,

$$\int_E(\alpha f+\beta g)d\mu=\alpha\int_E f d\mu+\beta\int_E g d\mu$$

(ii) 当 $\alpha\geqslant 0$ 时(α 的非负性假设以后可去掉，见本章§8)

$$\int_E f d\alpha\mu=\alpha\int_E f d\mu$$

这里$(\alpha\mu)(E)=\alpha\mu(E)(E\in\boldsymbol{R})$.

证 (i)从积分的定义，容易证明对任何常数 α,

$$\int_E \alpha f d\mu=\alpha\int_E f d\mu$$

所以定理证明的关键是在于证明当 $\alpha=\beta=1$ 时(i)的结论成立. 今证明于下:

设 $f(E)\subset(l,u)$, $g(E)\subset(l',u')$, 对任何正数 δ, 分别取(l,u)、(l',u')中分点组 D: $l=l_0<l_1<\cdots<l_n=u$; D': $l'=l'_0<l'_1<\cdots<l'_m=u'$, 使得 $\delta(D)<\delta$, $\delta(D')<\delta$. 作 $e_{ij}=E(l_{i-1}\leqslant f<l_i, l'_{j-1}\leqslant g<l'_j)$. 那末 E 分解为互不相交的有限个可测集的和: $E=\bigcup\limits_{i,j=1}^{n,m}e_{ij}$. 根据引理 1,

$$\int_{e_{ij}}(f+g)d\mu\leqslant(l_i+l'_j)\mu(e_{ij})\leqslant(2\delta+l_{i-1}+l'_{j-1})\mu(e_{ij})$$

$$\leqslant 2\delta\mu(e_{ij})+\int_{e_{ij}}f d\mu+\int_{e_{ij}}g d\mu$$

利用积分的有限可加性，对上式中 i,j 求和就得到

$$\int_E(f+g)d\mu\leqslant 2\delta\mu(E)+\int_E f d\mu+\int_E g d\mu$$

令 $\delta\to 0$, 就得到

$$\int_E(f+g)d\mu\leqslant\int_E f d\mu+\int_E g d\mu \tag{3.9}$$

可以类似地证明

$$\int_E(f+g)d\mu\geqslant\int_E f d\mu+\int_E g d\mu \tag{3.10}$$

从(3.9)、(3.10)便知在 $\alpha=\beta=1$ 时(i)成立.

(ii) 只要注意到 $\alpha\mu$ 也是可测空间 $(X, \boldsymbol{R})$ 上测度，并且对一切 $E\in\boldsymbol{R}$，$(\alpha\mu)(E)=\alpha\mu(E)$。再从积分的定义，易知(ii)成立. 证毕.

定理 4(积分的单调性) 设 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是测度空间，$E\in\boldsymbol{R}$，$\mu(E)<\infty$。又设 f 和 g 是 E 上的两个有界可测函数，而且 $f\geqslant g$，那末

$$\int_E f d\mu \geqslant \int_E g d\mu \tag{3.11}$$

特别，当 $f\doteq g$ 时，

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$$

证 记 $h=f-g$，那末 $h\geqslant 0$. 由积分的有限可加性

$$\int_E h d\mu = \int_{E(h\geqslant 0)} h d\mu + \int_{E(h<0)} h d\mu \tag{3.12}$$

由于 $\mu(E(h<0))=0$，根据例1，(3.12)中右边的第二个积分为零，而第一个积分不小于零. 因此 $\int_E h d\mu\geqslant 0$. 由积分的线性立即得到(3.11). 证毕.

系 设 f 是有界可测函数，$\mu(E)<\infty$，那末

$$\left|\int_E f d\mu\right| \leqslant \int_E |f| d\mu$$

证 由于 $-|f|\leqslant f\leqslant |f|$，利用(3.11)，得到

$$-\int_E |f| d\mu \leqslant \int_E f d\mu \leqslant \int_E |f| d\mu$$

证毕.

定理 5 设 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是测度空间，$E\in\boldsymbol{R}$，$\mu(E)<\infty$. 又设 f 是 E 上有界可测函数，而且 $f\geqslant 0$. 如果 $\int_E f d\mu=0$，那末 $f\doteq 0$.

证 任取一正数 $\alpha>0$，那末由积分的有限可加性，

$$\int_E f d\mu = \int_{E(f<\alpha)} f d\mu + \int_{E(f\geqslant\alpha)} f d\mu \tag{3.13}$$

但是由 $f\geqslant 0$ 得到

$$\int_{E(f<\alpha)} f d\mu \geqslant 0 \tag{3.14}$$

又由单调性

$$\int_{E(f\geqslant\alpha)} f d\mu \geqslant \alpha\mu(E(f\geqslant\alpha)) \tag{3.15}$$

因此

$$0\leqslant \alpha\mu(E(f\geqslant\alpha))\leqslant\int_E f d\mu=0$$

这只可能是 $\mu(E(f\geqslant\alpha))=0$, 因此 $E(f>0)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f\geqslant\frac{1}{n}\right)$ 是可列个零集的和集, 它当然是零集. 由此得到 $f\doteq 0$. 证毕.

虽然我们还可以进一步介绍积分的一些重要性质, 为了避免与无界函数及无限测度情况下积分的性质在叙述上太多重复, 所以我们将有界可测函数积分就介绍到此.

我们来讨论读者自然是很关心的问题, 就是上述积分的特别情形——勒贝格积分, 它究竟和黎曼积分是什么关系. 下面的定理说明勒贝格积分是比黎曼积分更为普遍的一种积分.

定理 6 设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的函数, 如果它是黎曼可积函数, 那末, 它必是勒贝格可积的, 而且

$$(L)\int_a^b f dx=(R)\int_a^b f dx \tag{3.16}$$

证 首先证明 f 是有界的: 事实上, 因为 f 黎曼可积, 所以对 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $[a, b]$ 上任一分点组 D: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 当 $\delta(D)=\max_k(x_k-x_{k-1})<\delta$ 时,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-(R)\int_a^b f dx\right|<\varepsilon \tag{3.17}$$

其中 ξ_i 是在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中任意取的. 特别取 $\varepsilon=1$, 并取一个分点组

D，使 $\delta(D)$ 小于相应于 $e=1$ 的 δ。取定 D 后，记 $\eta=\min\limits_k(x_k-x_{k-1})>0$。而对每个 i，取 $\xi_k=x_k, k\neq i$。那末，由于(3.17)，得到估计式

$$|f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})|\leqslant 1+\left|(R)\int_a^b f\,dx\right|+\sum_{k\neq i}|f(x_k)|(x_k-x_{k-1})$$

所以

$$|f(\xi_i)|\leqslant\left[1+\left|(R)\int_a^b f\,dx\right|+\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)|(x_k-x_{k-1})\right]\Big/\eta$$

但上式右边是与 i 无关的定数，而 ξ_i 是 $[a,b]$ 中任何一点，所以 f 是有界的。或者说：有常数 M，$|f|\leqslant M$。

再证 f 是勒贝格可积的，并且(3.16)成立：因为 f 是黎曼可积的，取一列分点组 $\{D_n\}$，$D_n\subset D_{n+1}$，$\delta(D_n)\to 0$。且 $a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<x_2^{(n)}<\cdots<x_{i_n}^{(n)}=b$，用 $m_k^{(n)}$，$M_k^{(n)}$ 表示 f 在 $[x_{k-1}^{(n)},\ x_k^{(n)}]$ 中的下确界、上确界。由黎曼积分定义，容易看出

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k m_k^{(n)}(x_k^{(n)}-x_{k-1}^{(n)})=\lim_{n\to\infty}\sum_k M_k^{(n)}(x_k^{(n)}-x_{k-1}^{(n)})$$

$$=(R)\int_a^b f\,dx \tag{3.18}$$

作两个函数列 $\{\varphi_n\}$，$\{\psi_n\}$：

$$\varphi_n=\begin{cases}m_k^{(n)},\ x\in(x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}];\\ f(a),\ x=a.\end{cases}\quad \psi_n=\begin{cases}M_k^{(n)},\ x\in(x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}];\\ f(a),\ \ x=a.\end{cases}$$

由于 $D_n\subset D_{n+1}$，当区间缩小时，上确界不增，下确界不减，所以

$$\psi_1\geqslant\psi_2\geqslant\cdots\geqslant\psi_n\geqslant\cdots\geqslant f$$

$$\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n\leqslant\cdots\leqslant f$$

记 $\bar{f}=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n$，$\underline{f}=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n$。显然 $\bar{f}$、$\underline{f}$ 是有界可测函数，$|\bar{f}|\leqslant M$，$|\underline{f}|\leqslant M$。而且

$$\underline{f}\leqslant f\leqslant\bar{f} \tag{3.19}$$

根据积分的单调性和例 4 我们得到

$$\sum_k m_k^{(n)}(x_k^{(n)}-x_{k-1}^{(n)})=(L)\int_a^b \varphi_n dx\leqslant(L)\int_a^b \underline{f}dx$$

$$\leqslant(L)\int_a^b \bar{f}dx\leqslant(L)\int_a^b \psi_n dx=\sum_k M_k^{(n)}(x_k^{(n)}-x_{k-1}^{(n)})$$

令 $n\to\infty$，利用(3.18)得到

$$(L)\int_a^b \underline{f}dx=(L)\int_a^b \bar{f}dx=(R)\int_a^b f dx \qquad (3.20)$$

由(3.19)，$\bar{f}-\underline{f}\geqslant 0$，和$(L)\int_a^b(\bar{f}-\underline{f})dx=0$，从定理 5 得到 $\underline{f}\doteq\bar{f}$. 再由(3.19)得到 $f\underset{m}{\doteq}\bar{f}\underset{m}{\doteq}\underline{f}$，因为$(E^1,\mathbf{L},m)$是完全测度空间，所以 f 也是可测函数. 由定理 4 就得到

$$(L)\int_a^b f dx=(R)\int_a^b f dx$$

证毕.

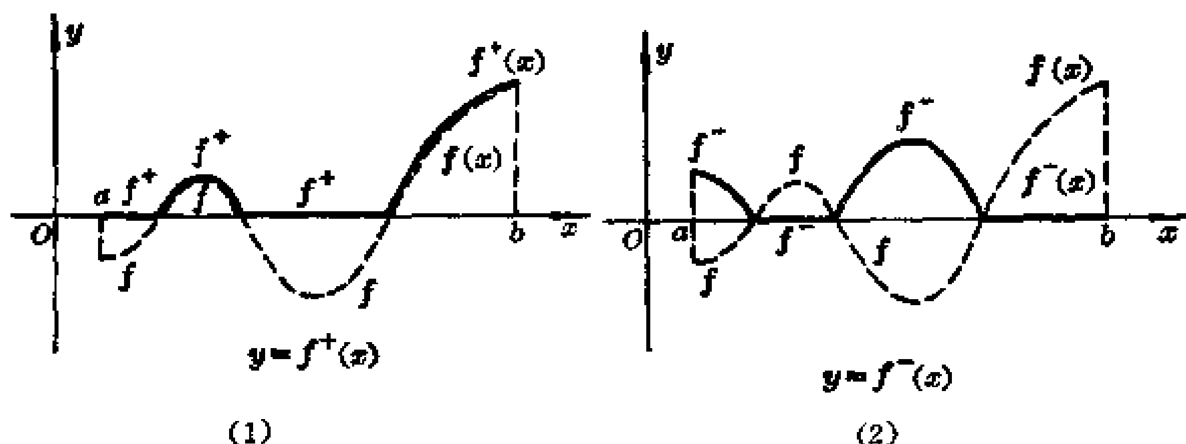


图　3.1

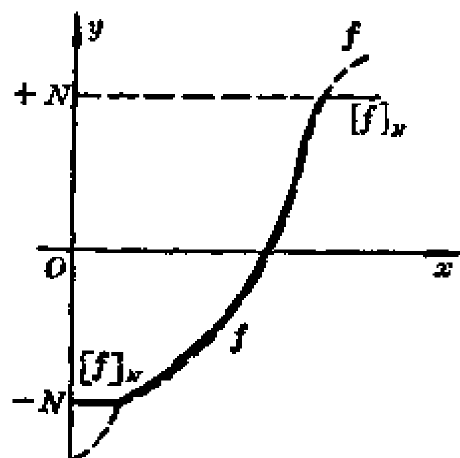


图　3.2

2. 在测度σ-有限集上（有限的）可测函数的积分　先说明两个常用的记号. 设 f 是 E 上一个实函数. 作函数 $f^+=\max(f,0)$（图 3.1(1)），$f^-=\max(-f,0)$（图3.1(2)），f^+、f^-是由 f 产生的

两个非负函数，分别称为 f 的**正部与负部**，而 f 也可用 f^+、f^- 表示：$f=f^+-f^-$. 又设 N 为任何一个非负实数. 我们用 $[f]_N(x)$ 来表示函数 $\max(\min(f(x), N), -N)$(图 3.2)，即 $[f]_N(x)$ 是由 $f(x)$ 和 N 决定的一个函数，在使 $|f(x)|\leqslant N$ 的点 x 上，它的函数值就是 $f(x)$；而在 $f(x)>N$，或 $f(x)<-N$ 的点 x 上，它的函数值分别是 N 或 $-N$. $[f]_N$ 是用 N 把 f 截断出来的新函数. 特别，当 $f\geqslant 0$ 时，$[f]_N=\min(f, N)$.

设 E 是一个 μ 测度的 σ-有限集，如果 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$ 是 E 的一列可测子集，而且 $\mu(E_n)<\infty$, $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$. 那末称 $\{E_n\}$ 是 E 的一列**测度有限单调覆盖**.

定义 设 $(X, \mathbf{R}, \mu)$ 是测度空间，$E\in\mathbf{R}$，并且 E 是 σ-有限的. 又设 f 是 E 上非负的可测函数，$\{E_n\}$ 是 E 的一列测度有限单调覆盖. 如果极限

$$\lim_{N\to\infty}\int_{E_N}[f]_N d\mu<\infty \tag{3.21}$$

我们就称 f 是关于 μ **可积**的，这个极限值就规定为 f 的**积分**，记为

$$\int_E f d\mu$$

我们要说明这样定义的积分是确定的. 换句话说，函数 f 在 E 上的可积性以及积分的值与测度有限单调覆盖列 $\{E_n\}$ 的选取无关.

首先我们注意，当 f 是 E 上的非负可测函数，$\{E_n\}$ 是 E 的一列测度有限单调覆盖时，由有界函数积分的单调性和有限可加性，容易看出 $\left\{\int_{E_n}[f]_n d\mu\right\}$ 是单调增加数列，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n}[f]_n d\mu$ 存在，但有可能是 ∞.

下面我们证明更一般的结果.

引理 2 设$(X, \mathbf{R}, \mu)$是测度空间，$E\in\mathbf{R}$，并且E是σ-有限的. 又设f是E上可测函数，并且$f\geqslant 0$. $\{E_n^{(j)}\}$，$j=1,2$，是E的两列测度有限单调覆盖，$\{M_n^{(i)}\}$ $(i=1, 2)$是两列趋向$+\infty$的单调增加正数列，如果

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n^{(1)}}[f]_{M_n^{(1)}}d\mu<\infty$$

那末必然有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n^{(2)}}[f]_{M_n^{(2)}}d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n^{(1)}}[f]_{M_n^{(1)}}d\mu \tag{3.22}$$

证 记 $s=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n^{(1)}}[f]_{M_n^{(1)}}d\mu$，由于$\left\{\int_{E_n^{(1)}}[f]_{M_n^{(1)}}d\mu\right\}$是单调增加数列，所以对一切自然数$n$，

$$\int_{E_n^{(1)}}[f]_{M_n^{(1)}}d\mu\leqslant s$$

今证(3.22). 设A是E的任一测度有限的可测子集，M是任取的正数. 当$M_n^{(1)}>M$时，有下式

$$\begin{aligned}\int_A[f]_M d\mu &= \int_{A\cap E_n^{(1)}}[f]_M d\mu+\int_{A-E_n^{(1)}}[f]_M d\mu\\ &\leqslant\int_{E_n^{(1)}}[f]_{M_n^{(1)}}d\mu+M\mu(A-E_n^{(1)}) \qquad (3.23)\\ &\leqslant s+M\mu(A-E_n^{(1)})\end{aligned}$$

由于$\{A-E_n^{(1)}\}$是单调下降序列，并且$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(A-E_n^{(1)})=A-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n^{(1)}$ $=A-E=\varnothing$，又有$\mu(A)<\infty$，所以根据第二章§2 定理 1 的(vi)得到$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A-E_n^{(1)})=0$. 特别再取 $A=E_k^{(2)}$，$M=M_k^{(2)}$，就得到

$$\int_{E_k^{(2)}}[f]_{M_k^{(2)}}d\mu\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_{E_n^{(1)}}[f]_{M_n^{(1)}}d\mu$$

对一切k成立. 再令$k\to\infty$，就有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k^{(2)}}[f]_{M_k^{(2)}}d\mu\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_{E_n^{(1)}}[f]_{M_n^{(1)}}d\mu.$$

对调$\{E_k^{(2)}, M_k^{(2)}\}$和$\{E_n^{(1)}, M_n^{(1)}\}$的地位，立即得到(3.22)．证毕．

特别取$M_n^{(1)}=n, M_k^{(2)}=k$时，(3.22)就表示(3.21)引入积分的定义是确当的．如果$M_n^{(1)}=n$，$M_k^{(2)}$仍为一般单调趋向∞数列时，引理说明积分也可以定义为

$$\int_E f d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}[f]_{M_n}d\mu \tag{3.24}$$

这里$\{E_n\}$是E的测度有限单调覆盖，$\{M_n\}$是趋向∞的单调正数列．

当f是有界的函数，$\mu(E)<\infty$时，显然，现在的定义和前面定义是一致的．

现在举一些非负可积函数的例子．

例 6 考察$(0,\infty)$上的函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}, & x\in(0,1]\\[2mm] \dfrac{1}{x^2}, & x\in(1,\infty)\end{cases}$$

关于勒贝格测度的积分．

显然，对任何自然数N(图3.3)，

$$[f]_N(x)=\begin{cases}N, & x\in\left(0,\dfrac{1}{N^2}\right]\\[2mm] \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}, & x\in\left(\dfrac{1}{N^2},1\right]\\[2mm] \dfrac{1}{x^2}, & x\in[1,\infty)\end{cases}$$

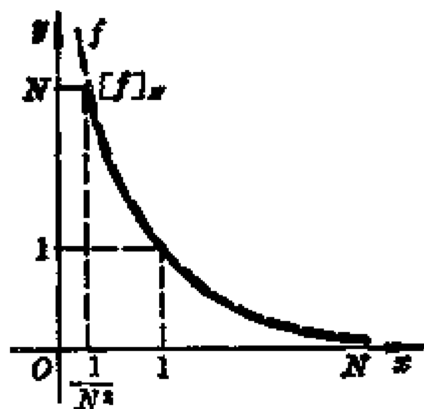


图 3.3

对$E=(0,\infty)$，取$E_n=(0,n)$, $n=1,2,3,\cdots$作为E的测度有限的单调覆盖似乎最为自然．但考虑到积分$\int_{E_N}[f]_N dx$的计算，我们改取$E_n=\left[\dfrac{1}{n^2},n\right]$作为$E$的测度有限的单调覆盖将更为方便．由于

$[f]_N$在$\left[\frac{1}{N^2}, N\right]$上是黎曼可积的，所以

$$\int_{E_N}[f]_N dx = (R)\int_{\frac{1}{N^2}}^{1}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx + (R)\int_1^N \frac{1}{x^2}dx$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_{\frac{1}{N^2}}^{1} - \frac{1}{x}\Big|_1^N = 3 - \frac{3}{N}$$

所以$(L)\int_0^\infty f dx = 3$.

例7　设$E = X = \left\{n \middle| n = 1, 2, \cdots\right\} \cup \left\{\frac{1}{m} \middle| m = 2, 3, \cdots\right\}$，$\mathbf{R}$是$X$的一切子集全体，在$\mathbf{R}$上定义测度$\mu$如下：对任何自然数$n$，单元素的集$\{n\}$和$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的测度分别为$\mu(\{n\}) = \frac{1}{n+1}$，$\mu\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \frac{1}{n^2(n+1)}$。对于$E$的别的子集，利用$\mu$的可列可加性来定义它的测度的值．易知$(X, \mathbf{R}, \mu)$是全$\sigma$-有限的测度空间．我们考察$E$上如下的函数$f$(图3.4)：对任何自然数$n, m$，

$$\begin{cases} f(n) = \frac{1}{n}, & n = 1, 2, \cdots \\ f\left(\frac{1}{m}\right) = m, & m = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

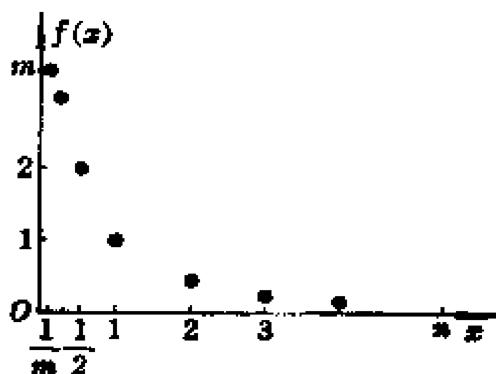


图　3.4

当取$E_n = \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{1}{2}, 1, 2, \cdots, n\right]$，$n = 1, 2, \cdots$作为$E$的测度有

限单调覆盖时，计算积分$\int_{E_N}[f]_N d\mu$最方便，这时

$$\int_{E_N}[f]_N d\mu=\sum_{n=1}^{N}f(n)\mu(\{n\})+\sum_{m=2}^{N}f\left(\frac{1}{m}\right)\mu\left(\left\{\frac{1}{m}\right\}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\ \frac{1}{n+1}+\sum_{m=2}^{N}\ m\frac{1}{m^2(m+1)}=\frac{3}{2}-\frac{2}{N+1}$$

所以$\int_E f d\mu=\frac{3}{2}$.

在数学分析中，有奇点的函数的广义积分和无穷区间上的广义积分是分别定义的. 对一般测度的积分虽然也可以分成两种情况分别定义和讨论(例如参见[8])，但为了减少过多重复，我们才采取了把两种情况统一起来的形式加以讨论. 不过上面只是对非负函数给了积分定义. 我们还要介绍一般函数(函数值有正、有负)的积分概念.

定义 设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是测度空间，$E\in\boldsymbol{R}$，E是σ-有限的. 又设f是E上可测函数. 如果f的正部f^+、负部f^-都是关于μ可积的，我们就称f关于μ是**可积的**，并规定$\int_E f^+ d\mu-\int_E f^- d\mu$是$f$在$E$上的**积分**，记它为$\int_E f d\mu$.

下面我们介绍积分的一些重要性质，先证明一个引理.

引理 3 设E是测度空间$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$上的σ-有限集，如果f是E上的可积函数，h是E上可测函数，而且$|h|\leqslant f$，那末h也是可积的.

证 由于$|h|\leqslant f$，所以有$h^+\leqslant f$，$h^-\leqslant f$. 现在证h^+是可积的；设$\{E_n\}$是测度有限单调覆盖，对任何自然数n，显然有

$$\int_{E_n}[h^+]_n d\mu\leqslant\int_{E_n}[f]_n d\mu\leqslant\int_E f d\mu$$

所以单调增加数列$\left\{\int_{E_N}[h^+]_N d\mu\right\}$的极限是有限的，因此$h^+$是可积的。同理$h^-$也是可积的。证毕。

引理3常常被用来证明可测函数的可积性。

定理7(有限可加性) 设E是测度空间$(X, \mathbf{R}, \mu)$上的σ-有限的，f是E上可测函数，如果$E=E_1\cup E_2$, $E_1\cap E_2=\varnothing$，并且E_1、E_2是可测的。那末，f在E上可积的充要条件是f在E_1、E_2上可积。当f可积时，

$$\int_E f d\mu=\int_{E_1} f d\mu+\int_{E_2} f d\mu \tag{3.25}$$

证 设$\{F_n\}$是E的测度有限单调覆盖，那末$\{E_1\cap F_n\}$、$\{E_2\cap F_n\}$分别是E_1、E_2的测度有限单调覆盖。并且$F_n=(E_1\cap F_n)\cup(E_2\cap F_n)$。

当$f\geqslant 0$时，利用有界函数的积分的有限可加性，对任何N有

$$\int_{F_N}[f]_N d\mu=\int_{E_1\cap F_N}[f]_N d\mu+\int_{E_2\cap F_N}[f]_N d\mu \tag{3.26}$$

因为f是可积的，以及$[f]_N\geqslant 0$，从(3.26)立即推出

$$\lim_{N\to\infty}\int_{E_1\cap F_N}[f]_N d\mu\leqslant\int_E f d\mu$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_{E_2\cap F_N}[f]_N d\mu\leqslant\int_E f d\mu$$

因此f在E_1、E_2上是可积的。在(3.26)中令$N\to\infty$，便得到(3.25)。反过来，如果f在E_1、E_2上可积，又从(3.26)推出

$$\int_{F_N}[f]_N d\mu\leqslant\int_{E_1} f d\mu+\int_{E_2} f d\mu$$

即f在E上可积。

当f是一般可测函数时，如果f在E上可积，那末f^+、f^-在E上可积，从而f^+, f^-在E_1, E_2上可积。(当我们把E上函数f的正部f^+、负部f^-限制在$E_i(i=1,2)$上时，它们也分别是f作为集

E_i 上函数时的正部、负部.)所以 $f=f^+-f^-$ 在 E_1, E_2 上也可积,而且

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu = \left(\int_{E_1} f^+ d\mu + \int_{E_2} f^+ d\mu\right)$$
$$-\left(\int_{E_1} f^- d\mu + \int_{E_2} f^- d\mu\right) = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu$$

反过来,假如 f 在 E_1 与 E_2 上可积,那末 f^+、f^- 在 E_1 与 E_2 上就可积,从而 f^+、f^- 在 E 上可积,并且 f 在 E 上也可积. 证毕.

定理 7 显然可以推广到当集 E 分解成有限个互不相交的可测集时的情况. 所以定理 7 又称为积分的有限可加性. 稍后,我们要证明积分具有可列可加性.

为了证明积分具有线性,先证一个引理.

引理 4 设 f, g 是集 E 上两个非负实函数,那末,对任何自然数 N,

$$[f+g]_N \leqslant [f]_N + [g]_N \leqslant [f+g]_{2N} \tag{3.27}$$

证 先证左端不等式: 设 $x_0 \in E$. 如果 $f(x_0)<N$, $g(x_0)<N$, 显然, $[f(x_0)+g(x_0)]_N \leqslant f(x_0)+g(x_0)=[f(x_0)]_N+[g(x_0)]_N$; 如果 $f(x_0)$, $g(x_0)$ 中至少有一个不小于 N, 例如 $f(x_0)\geqslant N$, 那末 $[f(x_0)+g(x_0)]_N = N \leqslant N+[g(x_0)]_N \leqslant [f(x_0)]_N+[g(x_0)]_N$.

再证右端不等式: 由于 $[f]_N+[g]_N \leqslant f+g$, $[f]_N+[g]_N \leqslant 2N$, 所以 $[f]_N+[g]_N \leqslant \min(f+g, 2N) = [f+g]_{2N}$. 证毕.

定理 8(线性) 设 E 是测度空间 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 上 σ-有限的, f 与 g 是 E 上两个可积函数,那末, 对任何两个常数 α、β, $\alpha f+\beta g$ 也是可积函数,而且

$$\int_E (\alpha f+\beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$$

证 设 $\alpha \geqslant 0$, 由于 $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$, 从 f^+ 可积性, 先证明 $(\alpha f)^+$ 也是可积的,而且

$$\int_E (\alpha f)^+ d\mu = \alpha \int_E f^+ d\mu$$

当 $\alpha=0$ 时，上述结论显然成立．对于 $\alpha>0$，由于 $[\alpha f]_n = \alpha[f]_{\frac{n}{\alpha}}$，根据(3.24) $\left(取 M_n=\frac{n}{\alpha}\right)$，便有

$$\int_E (\alpha f)^+ d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} [(\alpha f)^+]_n d\mu = \alpha \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} [f^+]_{\frac{n}{\alpha}} d\mu$$

$$= \alpha\int_E f^+ d\mu$$

对 $(\alpha f)^-$ 也类似地讨论．因此，αf 可积，且

$$\int_E (\alpha f) d\mu = \alpha\int_E f d\mu$$

当 $\alpha<0$ 时，也可类似讨论．

所以只要就 $\alpha=\beta=1$ 的情况来证明定理成立便可以了．

如果 $f\geqslant 0, g\geqslant 0$．设 $\{E_n\}$ 是 E 的测度有限单调覆盖，根据(3.27)以及有界函数积分的单调性、有限可加性得到

$$\int_{E_N} [f+g]_N d\mu \leqslant \int_{E_N} ([f]_N+[g]_N) d\mu \leqslant \int_{E_N} [f+g]_{2N} d\mu \tag{3.28}$$

根据有界可积函数的线性，

$$\int_{E_N} ([f]_N+[g]_N) d\mu = \int_{E_N} [f]_N d\mu + \int_{E_N} [g]_N d\mu$$

由于假设 f, g 可积，令 $N\to\infty$，得到

$$\lim_{N\to\infty}\int_{E_N} ([f]_N+[g]_N) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu < \infty \tag{3.29}$$

又从(3.28)的左边一个不等式(令 $N\to\infty$)知道 $f+g$ 是可积的，并且

$$\int_E (f+g) d\mu \leqslant \int_E f d\mu + \int_E g d\mu \tag{3.30}$$

再在(3.28)的不等式 $\int_{E_N} ([f]_N+[g]_N) d\mu \leqslant \int_{E_N} [f+g]_{2N} d\mu$ 中，

令 $N\to\infty$，并用(3.29)便得到

$$\int_E f d\mu+\int_E g d\mu\leqslant\int_E (f-g)d\mu \tag{3.31}$$

(3.30)，(3.31)结合起来便得到当 $f\geqslant 0, g\geqslant 0$ 时，

$$\int_E (f+g)d\mu=\int_E f d\mu+\int_E g d\mu \tag{3.32}$$

当 f、g 是一般可积函数时，由于

$$(f+g)^+\leqslant f^++g^+,\ (f+g)^-\leqslant f^-+g^-$$

所以由引理 3，$f+g$ 是可积的. 又由于

$$(f+g)^+-(f+g)^-=f+g=(f^++g^+)-(f^-+g^-)$$

从而得到

$$(f+g)^++f^-+g^-=f^++g^++(f+g)^-$$

对这个函数应用(3.32)，就得到

$$\int_E (f+g)^+d\mu+\int_E f^-d\mu+\int_E g^-d\mu$$

$$=\int_E f^+d\mu+\int_E g^+d\mu+\int_E (f+g)^-d\mu$$

移项后就知道(3.32)对一般可积函数 f、g 也成立. 证毕.

定理 9 设 E 是测度空间 $(X, \mathbf{R}, \mu)$ 上 σ-有限的，f、g 是 E 上两个可测函数，那末 E 上的积分有如下的性质：

1° 如果 $f\doteq 0$，那末 f 是可积的，并且

$$\int_E f d\mu=0 \tag{3.33}$$

反之，如果 f 在 E 上满足 $f\geqslant 0$，并且(3.33)成立，那末 $f\doteq 0$.

2° **单调性**：设 f、g 是 E 上可积函数，又如果 $f\geqslant g$，那末

$$\int_E f d\mu\geqslant\int_E g d\mu \tag{3.34}$$

3° **绝对可积性**：f 在 E 上可积时，$|f|$ 在 E 上可积，并且

$$\left|\int_E f d\mu\right|\leqslant\int_E |f| d\mu \tag{3.35}$$

证 1° 第一部分是显然的. 第二部分的证法和定理 5 的证法相同.

2° 当 $f \geqslant g$ 时, $f-g \geqslant 0$. 设 $\{E_n\}$ 是 E 的一个测度有限单调覆盖, 那末

$\int_{E_n}[f-g]_n d\mu \geqslant 0$. 因此 $\int_E (f-g)d\mu \geqslant 0$. 再由定理 8,

$$\int_E (f-g)d\mu = \int_E f d\mu - \int_E g d\mu$$

立即得到(3.34).

3° 当 f 可积时, f^+、f^- 可积, 所以 $|f| = f^+ + f^-$ 也可积. 由于 $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, 根据(3.34)得到

$$-\int_E |f| d\mu \leqslant \int_E f d\mu \leqslant \int_E |f| d\mu$$

即(3.35)成立. 证毕.

定理 9 中 3° 的绝对可积性 (即可积函数 f 的绝对值函数 $|f|$ 一定也可积), 在广义黎曼积分中是没有的, 举例如下.

例 8 考察[0, 1]上的函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

读者熟知, 它是广义黎曼可积函数, 但是 $|f|$ 不是广义黎曼可积的。

我们注意, 这个函数 f 在[0, 1]上的勒贝格积分是不存在的: 因为如果它勒贝格可积, 由定理 9 的性质 3°, $|f|$ 应该是勒贝格可积的, 而 $\dfrac{1}{x}\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|$ 在 $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$ 上黎曼可积, 所以

$$(L)\int_0^1 |f| dx \geqslant (L)\int_{\frac{1}{n}}^1 |f| dx$$

$$= (R)\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right| dx \to \infty (当\ n \to \infty 时)$$

这说明$|f|$不是勒贝格可积，因而f也不是勒贝格可积的.

下面定理 10 所说的积分性质称为积分的**全连续性**(或称做绝对连续性)：

定理 10(全连续性) 设E是测度空间$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$上σ-有限的，f是E上可积函数. 那末对任何$\varepsilon>0$，必存在$\delta>0$，当e是E的任何一个可测子集，而且$\mu(e)<\delta$时，就成立着

$$\left|\int_e f d\mu\right|<\varepsilon \tag{3.36}$$

证 设$\{E_n\}$是E的测度有限单调覆盖，由定理 9 的 3°，$|f|$是可积的. 这时必有自然数N_0，使得

$$\int_E |f| d\mu-\int_{E_{N_0}}[|f|]_{N_0} d\mu<\frac{\varepsilon}{2}$$

由于$\int_{E_{N_0}}[|f|]_{N_0} d\mu \leqslant \int_E [|f|]_{N_0} d\mu$，因此

$$\int_E(|f|-[|f|]_{N_0}) d\mu<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2(N_0+1)}$，由(3.35)得到

$$\begin{aligned}\left|\int_e f d\mu\right| &\leqslant \int_e |f| d\mu=\int_e(|f|-[|f|]_{N_0}) d\mu+\int_e [|f|]_{N_0} d\mu \\ &\leqslant \int_E(|f|-[|f|]_{N_0}) d\mu+\frac{\varepsilon N_0}{2(N_0+1)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

证毕.

下面证明积分的可列可加性.

定理 11(可列可加性) 设E是测度空间$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$上σ-有限的，f是E上可测函数，如果$E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$，而且$E_i \in \boldsymbol{R}$，$E_i \cap E_j=\varnothing$，$i \neq j$. 那末，$f$在$E$上可积的充要条件是

(i) f在E_i上可积；

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}|f|d\mu<\infty$.

当 f 可积时，

$$\int_E fd\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}fd\mu \tag{3.37}$$

证 必要性：设 f 是可积的，由于

$$E=\left(\bigcup_{i=1}^{m}E_i\right)\bigcup\left(E-\bigcup_{i=1}^{m}E_i\right)$$

根据积分的有限可加性，f 在 E_i 上可积（所以(i)是必要的)，且

$$\int_E fd\mu=\sum_{i=1}^{m}\int_{E_i}fd\mu+\int_{E-\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_i}fd\mu \tag{3.38}$$

将(3.38)中 f 换成 $|f|$（它是可积的），立即得到

$$\int_E|f|d\mu\geqslant\sum_{i=1}^{m}\int_{E_i}|f|d\mu \tag{3.39}$$

令 $m\to\infty$，便得到定理的条件(ii)也是必要的.

充分性：设 $\{F_n\}$ 是 E 的测度有限单调覆盖，那末易知

$$\left\{F_n\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\right\}$$

也是 E 的测度有限单调覆盖，由有界可测函数在测度有限集

$$F_n\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)$$

上的积分有限可加性（定理 2）得到

$$\int_{F_n\cap(\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i)}[|f|]_n d\mu=\sum_{i=1}^{n}\int_{F_n\cap E_i}[|f|]_n d\mu\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}|f|d\mu \tag{3.40}$$

右边不依赖于 n，所以令 $n\to\infty$，便知 $|f|$ 在 E 上可积，从而 f 在 E

上可积.

最后,再证(3.37)成立. 当 f 可积时, 将(3.39)中 $m\to\infty$,再将(3.40)中 $n\to\infty$,便得到

$$\int_E |f|d\mu = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} |f|d\mu \tag{3.41}$$

即对 $|f|$,(3.37)成立.

由(3.38)、(3.41)和积分的有限可加性得到

$$\left|\int_E f d\mu - \sum_{i=1}^{m}\int_{E_i} f d\mu\right| = \left|\int_{E-\bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i} f d\mu\right|$$

$$\leqslant \int_{E-\bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i} |f|d\mu = \sum_{m+1}^{\infty}\int_{E_i} |f|d\mu$$

从 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} |f|d\mu<\infty$, 在上式中令 $m\to\infty$, 便得到

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} f d\mu$$

证毕.

3. 勒贝格-斯蒂阶(Lebesgue-Stieltjes)积分 前面建立的是一般测度空间 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 上积分概念. 由于一般分析数学、数学物理和概率论等常用的积分除勒贝格积分外, 便是 n 维欧几里得空间上关于勒贝格-斯蒂阶测度的积分, 特别是直线上关于勒贝格-斯蒂阶测度的积分, 由于对勒贝格-斯蒂阶测度本书中很少系统叙述, 在此对其产生过程和一般测度论中没有的性质作一概述, 以便查考.

设 g 是直线上单调增加右连续函数(又称为 E^1 上分布), 根据第二章§2, 由 g 可产生 $(E^1, \boldsymbol{R}_0)$ 上一个测度 g, 满足 $g((a,b])=g(b)-g(a)$. 继而在 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}_0)$(就是直线上一切子集全体)上引出外测度 g^*, 再把 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}_0)$ 中满足 Caratheodory 条件

$$g^*(F)=g^*(F\cap E)+g^*(F-E), F\in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}_0)$$

的集E称为g^*-可测集(即(关于g的)勒贝格-斯蒂阶可测集)，g^*-可测集全体记为$\boldsymbol{L}^g$，g^*是$\boldsymbol{L}^g$上完全测度，仍记g^*为g，称$(E^1,\boldsymbol{L}^g,g)$是勒贝格-斯蒂阶测度空间. 除有作为一般测度的性质外，主要有下面性质(可对比第二章的§4中勒贝格测度的性质)：

(i) $\boldsymbol{L}^g$是E^1上的σ-代数，$\boldsymbol{L}^g\supset\boldsymbol{B}(=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0))$.

(ii) $(E^1,\boldsymbol{L}^g,g)$是全σ-有限的完全测度空间.

(iii) 对每个$E\in\boldsymbol{L}^g$，必有$A\in\boldsymbol{B}$、$B\in\boldsymbol{B}$，使得

$$A\supset E\supset B,\ 并且\ g(A-E)=0=g(E-B)$$

(iv) $E\in\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}_0)$，那末$E\in\boldsymbol{L}^g$的充要条件是下面三个中的一个成立：

1° 对任何$\varepsilon>0$，存在开集$O\supset E$，使得$g^*(O-E)<\varepsilon$.

2° 对任何$\varepsilon>0$，存在闭集$F\subset E$，使得$g^*(E-F)<\varepsilon$.

3° 对任何$\varepsilon>0$，存在开集O、闭集F，使得$O\supset E\supset F$，并且$g(O-F)<\varepsilon$.

如果$E\in\boldsymbol{L}^g$，f是E上(关于g)的可测函数，按本节第一、二小节方式建立关于g测度的积分，记为$\int_E fdg$，称为f在E上(关于g的)勒贝格-斯蒂阶积分. 如果E是区间的情况，通常又记为

$$\int_{[a,b]} fdg=\int_a^b fdg,\ \int_{(a,b]} fdg=\int_{a^+}^b fdg \qquad (a^+\text{又常写成 } a+\text{ 或 } a+0)$$

$$\int_{(a,b)} fdg=\int_{a^+}^{b^-} fdg \qquad (b^-\text{又常写成 } b-\text{ 或 } b-0)$$

由于勒贝格-斯蒂阶测度是一般测度的特殊情况，所以一般测度空间上积分性质它都具有，这里不拟复述.

如果g_1、g_2是E^1上两个不同的单调增加右连续函数，那末$\boldsymbol{L}^{g_1}$和$\boldsymbol{L}^{g_2}$是不一定相同的，而且$(E^1,\boldsymbol{L}^{g_1},g_1)$和$(E^1,\boldsymbol{L}^{g_2},g_2)$上的可测函数类和可积函数类不一定相同. 下面我们再举一些例子来

说明这个问题．这些例子本身也具有典型意义．

例 9 作赫维赛德(Heaviside)函数：

$$\theta(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$$

显然，这时直线上一切子集E都是完全测度空间$(E^1, \mathbf{L}^\theta, \theta)$的可测集．因而定义在$E^1$上任何一个有限实函数$f$都是$(E^1, \mathbf{L}^\theta, \theta)$上可测函数，并且是可积函数．其积分为

$$\int_E f d\theta=\begin{cases}0 & ,\text{当 } 0\overline{\in} E\\ f(0), & \text{当 } 0\in E\end{cases}$$

例 10 记$E(x)$是不超过x的最大整数．$E(x)$是E^1上单调增加的右连续函数(图 3.5)．显然，这时直线上一切子集M都是完全测度空间$(E^1, \mathbf{L}^E, E)$的可测子集，$E(M)$等于M中所含整数的个数，因而定义在E^1上的任何一个有限实函数f都是$(E^1, \mathbf{L}^E, E)$上的可测函数，f在E^1上可积的充要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)|<\infty$$

当这个条件满足时，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dE=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$$

事实上，取$E_n=(-n, n]$，$n=1, 2, \cdots$，

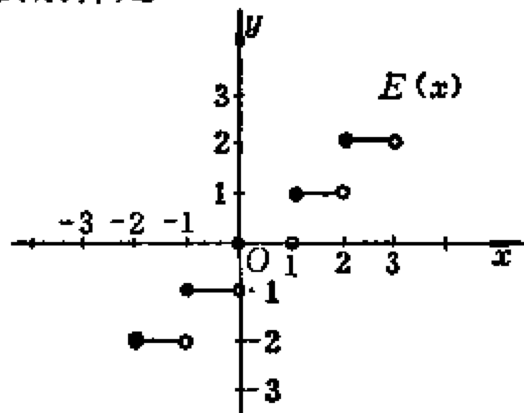


图 3.5

$$\int_{E_n} f^{\pm} dE=\sum_{i=-n}^{n-1}\int_{(i, i+1]} f^{\pm} dE=\sum_{i=-n}^{n-1} f^{\pm}(i+1)$$

根据f在E^1上可积的充要条件是$f^{\pm}$同时在E^1上可积，立即得到f在E^1上可积的充要条件是两个正项级数$\sum\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\pm}(i)$收敛，也即

$\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|f(i)|<\infty$. 当这个级数收敛时,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dE = \int_{-\infty}^{\infty} f^{+} dE - \int_{-\infty}^{\infty} f^{-} dE$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{E_n}[f^{+}]_n dE - \lim_{n\to\infty}\int_{E_n}[f^{-}]_n dE = \sum_{-\infty}^{\infty} f(i)$$

上面最后等式的成立是因为$\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|f(i)|<\infty$, 所以对每个 i, 当 $n>|f(i)|$时$[f^{\pm}]_n(i)=f^{\pm}(i)$的缘故.

由此可知, 当 $f\equiv c$(常数), $c\neq 0$ 时, f 在 E^1 上(关于 E)是不可积的.

例 11 设 g 是 E^1 上一个单调增加右连续函数, 取$[a, b]$的特征函数 $\chi_{[a,b]}(x)$, 由于$[a, b]\in \mathbf{L}^g$, 所以 $\chi_{[a,b]}$是(关于 g 的)可测函数, 显然它关于勒贝格-斯蒂阶测度 g 是可积的, 且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[a,b]}dg = g([a, b]) = g(b) - g(a-0)$$

例 12 设 g 是 E^1 上连续可导函数, 而且存在常数 α, 使得 $g'(x)\geqslant\alpha>0$. 这时 g 是单调增加连续函数, 在$(E^1, \mathbf{L}^g, g)$上存在不可测的函数.

事实上, 如果 E_0 是$[0, 1]$上一个勒贝格不可测集, 我们证明它也是$(E^1, \mathbf{L}^g, g)$上不可测集. 为此, 先证明如果 $g(E)=0$, 必有 $m(E)=0$. 这是因为对任何 $\varepsilon>0$, 一定存在开集 O_ε, $O_\varepsilon\supset E$, 而 $g(O_\varepsilon-E)<\varepsilon\alpha$. 由于 $g(E)=0$, 所以 $g(O_\varepsilon)<\varepsilon\alpha$. 设$\{(a_\nu, b_\nu)\}$是 O_ε 的构成区间, 由此得到

$$g(O_\varepsilon) = \sum_{\nu}(g(b_\nu) - g(a_\nu)) < \varepsilon\alpha$$

根据假设 $g'(x)\geqslant\alpha>0$, 用中值定理就得到

$$\alpha\varepsilon > \sum_\nu (g(b_\nu) - g(a_\nu)) \geqslant \alpha \sum_\nu (b_\nu - a_\nu)$$

即 $m(O_\varepsilon) < \varepsilon$. 因此 $m(E) \leqslant m(O_\varepsilon) < \varepsilon$, 令 $\varepsilon \to 0$ 得到 $m(E) = 0$. 现在利用这个事实来证明 E_0 不是$((E^1, \boldsymbol{L}^g, g)$上可测集. 假若不对, E_0 是关于 g 可测, 必存在 Borel 集 B_0, $B_0 \supset E_0$, $g(B_0 - E_0) = 0$. 因此 $m(B_0 - E_0) = 0$. 但 B_0 是勒贝格可测集, 所以 $E_0 = B_0 - (B_0 - E_0)$ 也是勒贝格可测集. 这和假设 E_0 不是勒贝格可测集矛盾. 所以 E_0 不可能是$(E^1, \boldsymbol{L}^g, g)$上可测集. 证毕.

这些例子说明, 由于 g 的不同, 一个函数在$(E^1, \boldsymbol{L}^g, g)$上的可测性和可积性与 g 有极为密切的关系. 但我们有如下结果.

定理 12 Borel 集上的 Baire 函数对任何勒贝格-斯蒂阶测度空间是可测的函数. 而有界 Borel 集上有界 Baire 函数的一切勒贝格-斯蒂阶积分都存在.

证 设$(E^1, \boldsymbol{L}^g, g)$是由单调增加右连续函数 g 产生的完全测度空间, 设 E 是 Borel 集, f 是 E 上的 Baire 函数, 那末 $E(f \leqslant c) \in \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{L}^g$, 所以 f 是 E 上 $(E^1, \boldsymbol{L}^g)$可测的函数. 又设 E 是有界的, $E \subset [a, b]$, 那末 $g(E) \leqslant g([a, b])$, 按例 11, 所以 $g([a, b]) = g(b) - g(a-0) < \infty$. 这样, f 便是(关于 g)测度有限的可测集 E 上的有界可测函数. 根据定理 1, f 关于 g 的勒贝格-斯蒂阶积分存在. 证毕.

因为 $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{L}^g$, 所以在直线上(或 n 维欧几里德空间上)如果有多个勒贝格-斯蒂阶测度场合, 一般都采用 Borel 可测函数(即 Baire 函数).

下面是勒贝格-斯蒂阶积分的逼近定理.

定理 13 设 f 是$[a, b]$(可以 $a = -\infty$, $b = +\infty$)上关于 g 勒贝格-斯蒂阶可积的. 那末, 对任何 $\varepsilon > 0$, 必定存在$[a, b]$上连续函数 φ, 使得

$$\int_a^b |f-\varphi|\,dg<\varepsilon$$

我们下面只证明当 g 是勒贝格测度的情况，一般的 g 的情况，给读者作为练习.

证 对任何 $\varepsilon>0$，由 f^+ 和 f^- 的积分定义可知，存在 N，使得

$$\int_a^b |f-[f]_N|\,dx=\int_a^b (f^+-[f^+]_N)\,dx+\int_a^b (f^--[f^-]_N)\,dx<\frac{\varepsilon}{3}$$

取 $\delta=\frac{\varepsilon}{3N+1}$，对函数 $[f]_N$ 用鲁津定理，就存在 $[a,\ b]$ 上连续函数 φ: $|\varphi|\leqslant N$，和 $[a,b]$ 的可测子集 E_δ，且 $m(E_\delta)<\delta$，当 $x\in[a,b]-E_\delta$ 时 $[f]_N(x)=\varphi(x)$. 因此

$$\int_a^b |[f]_N-\varphi|\,dx=\int_{E_\delta} |[f]_N-\varphi|\,dx\leqslant\frac{2\varepsilon N}{3(N+1)}<\frac{2\varepsilon}{3}$$

由此得到

$$\int_a^b |f-\varphi|\,dx\leqslant\int_a^b |f-[f]_N|\,dx+\int_a^b |[f]_N-\varphi|\,dx$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

证毕.

4. 积分的变数变换 在黎曼积分中，一个很有用的工具就是积分的变数变换. 现在我们也来研究一般测度空间上的"变数变换"问题. 为此先引进可测映照概念.

定义 设 $(X_i,\boldsymbol{R}_i)$，$i=1,2$ 是两个可测空间，φ 是 $X_1\to X_2$ 的一个映照，如果对每个 $E\in\boldsymbol{R}_2$，$\varphi^{-1}(E)=\{x\,|\,x\in X_1,\ \varphi(x)\in E\}$ 属于 $\boldsymbol{R}_1$，那末称 φ 是 $(X_1,\boldsymbol{R}_1)$ 到 $(X_2,\boldsymbol{R}_2)$ 的**可测映照**，或简称做**可测映照**，并记 $\varphi^{-1}(\boldsymbol{R}_2)=\{\varphi^{-1}(E)\,|\,E\in\boldsymbol{R}_2\}$.

例如，当 X_2 是实直线 E^1，$\boldsymbol{R}_2$ 是直线上 Borel 集(即 $\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{B}$)时，$(X_1,\boldsymbol{R}_1)$ 到 $(E^1,\boldsymbol{B})$ 的可测映照 φ 就是 $(X_1,\boldsymbol{R}_1)$ 上的可测函数. 这是因为 $\varphi^{-1}((-\infty,c])=X_1(\varphi\leqslant c)$ 是可测集. 反过来，也可以

证明：当 φ 是 X_1 上的 $(X_1, \boldsymbol{R}_1)$ 上可测函数时，φ 就是 $(X_1, \boldsymbol{R}_1)$ 到 $(E^1, \boldsymbol{B})$ 的可测映照（参见 §1 习题 6），因此可测映照是可测函数概念的推广.

下面我们考察一个较简单的情况.

定义 设 $(X_i, \boldsymbol{R}_i)$, $i=1,2$ 是两个可测空间，φ 是 X_1 上到 X_2 上的双射（即一一对应），而且是 $(X_1, \boldsymbol{R}_1)$ 到 $(X_2, \boldsymbol{R}_2)$ 的可测映照，同时 $\boldsymbol{R}_1=\varphi^{-1}(\boldsymbol{R}_2)$，那末我们就称 φ 是 $(X_1, \boldsymbol{R}_1)$ 到 $(X_2, \boldsymbol{R}_2)$ 的**可测同构映照**.

例 13 设 $X_i=E^1$, $\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{B}(i=1,2)$, φ 是 E^1 上严格单调增加的函数，并且是 E^1 上的双射（必连续），例如 $\varphi(x)=x, x^3, e^x-e^{-x}$ 等等. 显然，φ^{-1} 也是 E^1 上的双射，并且是严格单调增加函数. 因此，φ、φ^{-1} 都是 Borel 可测函数（§1 习题 13），从而对任何 $E\in\boldsymbol{B}$，$\varphi^{-1}(E)\in\boldsymbol{B}$，同样，$(\varphi^{-1})^{-1}(E)\in\boldsymbol{B}$，即 φ 是 $(E^1, \boldsymbol{B})$ 到 $(E^1, \boldsymbol{B})$ 的可测同构.

例 14 设 $X_1=E^1, \boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{B}; X_2=(a,b)$, $\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{B}\cap(a,b)$. 又设 φ 是 $(a,b)\to(-\infty, \infty)$ 的双射，并且是单调增加的函数，例如 $\varphi(x)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\frac{2x-(a+b)}{b-a}, \lg\frac{x-a}{b-x}$ 等等. 类似例 13 中的理由，φ 是 $((a,b), \boldsymbol{B}\cap(a,b))$ 到 $(E^1, \boldsymbol{B})$ 的可测同构.

显然，当 φ 是可测同构映照时，φ^{-1} 也是可测同构映照.

φ 是 $(X_1, \boldsymbol{R}_1)$ 到 $(X_2, \boldsymbol{R}_2)$ 的可测同构，这时，如果在 $(X_2, \boldsymbol{R}_2)$ 上有测度 μ，我们可作 $\boldsymbol{R}_1$ 上集函数 ν 如下：当 $E\in\boldsymbol{R}_1$ 时，$\nu(E)=\mu(\varphi(E))$. 容易证明 ν 是 $(X_1, \boldsymbol{R}_1)$ 上的测度，就记 $\nu(\cdot)$ 为 $\mu(\varphi(\cdot))$.

下面就是积分的一种变数变换定理（更一般的变数变换定理见定理 15）.

定理 14 设 $(X_i, \boldsymbol{R}_i)$, $i=1,2$，是两个可测空间，φ 是 $(X_1, \boldsymbol{R}_1)$

到$(X_2, \boldsymbol{R}_2)$的可测同构映照，μ是$(X_2, \boldsymbol{R}_2)$上一个测度，$E\in\boldsymbol{R}_2$. 那末E上的函数f关于μ可积的充要条件是$\varphi^{-1}(E)$上的函数$f(\varphi(x_1))$关于测度$\nu(\cdot)\equiv\mu(\varphi(\cdot))$可积，而且当$f$关于$\mu$可积时，

$$\int_E f(x_2)d\mu(x_2)=\int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(x_1))d\mu(\varphi(x_1)) \qquad (3.42)$$

证　设f是E上(关于$(X_2, \boldsymbol{R}_2)$)有界可测函数，$\mu(E)<\infty$. 由于φ是可测映照，那末

$$\{x_1 \mid x_1\in\varphi^{-1}(E), f(\varphi(x_1))\leqslant c\}$$
$$=\varphi^{-1}(\{y \mid y\in E, f(y)\leqslant c\}) \qquad (3.43)$$

是可测集，所以$\varphi^{-1}(E)$上的函数$f(\varphi(x_1))$是关于$(X_1, \boldsymbol{R}_1)$可测的. 显然$\nu(\varphi^{-1}(E))=\mu(\varphi(\varphi^{-1}(E)))=\mu(E)<\infty$. 因而$f(\varphi(x_1))$是关于$\nu$可积的. 在$f$的值域中任取一分点组$D$: $l_0<l_1<\cdots<l_n$, 那末由(3.43)得到

$$\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mu(\{y \mid y\in E, l_{k-1}\leqslant f(y)<l_k\})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mu(\varphi(\{x \mid x\in\varphi^{-1}(E), l_{k-1}\leqslant f(\varphi(x)<l_k\})$$

因此函数f关于μ以及函数$f(\varphi(x))$关于$\mu(\varphi(\cdot))$在同一分点组下和数是一样的. 再令$\delta(D)=\max\limits_i(l_i-l_{i-1})\to 0$, 这样在函数$f$有界、$\mu(E)<\infty$的情况下就证明了(3.42).

设函数f是无界的，而且$f\geqslant 0$, E关于μ为σ-有限的. 取E的(μ)测度有限单调覆盖$\{E_n\}$，容易知道$\{\varphi^{-1}(E_n)\}$便是$\varphi^{-1}(E)$的关于测度ν的测度有限单调覆盖. 在等式

$$\int_{E_N}[f]_N(x_2)d\mu(x_2)=\int_{\varphi^{-1}(E_N)}[f]_N(\varphi(x_1))d\mu(\varphi(x_1))$$

中. 令$N\to\infty$, 根据左边极限存在而且有限，就推出右边极限也存在而且有限，同时两个极限相等，即(3.42)式成立.

对于一般的函数f, 可以分别考察f^+, f^-就行了.

由于当 φ 是可测同构时，φ^{-1} 也是可测同构．因而由 $f(\varphi(\cdot))$ 关于 $\mu(\varphi(\cdot))$ 的可积性也可推出 f 关于 μ 的可积性．证毕．

应用这个定理于勒贝格-斯蒂阶测度就得到下面的系．

系 1 设 $(E^1, \boldsymbol{L}^g, g)$ 是直线上的勒贝格-斯蒂阶测度空间，φ 是 E^1 上到 E^1 上的严格单调增加连续函数，f 是 Baire 函数．f 在 Borel 集 E 上关于 g 可积的充要条件是 $f(\varphi(x))$ 在集 $\varphi^{-1}(E)$ 上关于 $g(\varphi(x))$ 可积．当 f 可积时，下式成立

$$\int_E f(x)dg(x) = \int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(x))dg(\varphi(x)) \tag{3.44}$$

证 显然 φ 是 E^1 上到 E^1 上一一对应，而且 $\varphi^{-1}((a, b]) = (\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)]$．所以 $\varphi^{-1}(\boldsymbol{R}_0) = \boldsymbol{R}_0$．令 $M = \{E \mid E \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0), \varphi^{-1}(E) \in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0)\}$ 容易证明 M 是一个 σ-环，并且 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0) \supset \boldsymbol{M} \supset \boldsymbol{R}_0$，但 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0)$ 是包含 $\boldsymbol{R}_0$ 最小 σ-环，所以 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0) = \boldsymbol{B}$，即 $\varphi^{-1}\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{B}$．用 φ 换 φ^{-1}，便得到 $\boldsymbol{B} \subset \varphi^{-1}\boldsymbol{B}$．所以 φ 是可测同构映照．运用变数变换定理 14 就得到系 1 的结论．

系 2 设 f 是 $(-\infty, \infty)$ 上勒贝格可测函数，那末对任何 t，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)dx \tag{3.45}$$

证 对任何给定的 t，作 $E^1 \to E^1$ 的映照 $\tau_t: x \longmapsto t + x$，将系 1 应用于勒贝格测度，并且 $E = E^1$．就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)d(x+t) \tag{3.46}$$

但是勒贝格测度是平移不变的．对任何勒贝格可测集 E，$m(\tau_t(E)) = m(E)$．所以对任何可积函数 h，

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dm(\tau_t(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx \tag{3.47}$$

在 (3.47) 中取 $h(x) = f(x+t)$．再将 (3.47) 代入 (3.46) 右边就得到 (3.45)．证毕．

显然，定理 14 可以推广．从定理 14 证明过程可见，积分要能进行"变数变换"，主要依靠变换 φ 有某种可测性，其次变换前后的两个(分别各自可测空间上的)可测集的测度相等．在"变数变换"中下面概念是常用的．

定义　设$(X_i, \boldsymbol{R}_i, \mu_i)(i=1, 2)$是两个测度空间，$\varphi$ 是 $X_1\to X_2$ 的映照．如果对任何 $E_i\in\boldsymbol{R}_i(i=1,2)$，$\varphi(E_1)\in\boldsymbol{R}_2$，$\varphi^{-1}(E_2)\in\boldsymbol{R}_1$，并且 $\mu_2(\varphi(E_1))=\mu_1(E_1)$，$\mu_1(\varphi^{-1}(E_2))=\mu_2(E_2)$．那末，称 φ 是$(X_1, \boldsymbol{R}_1, \mu_1)$到$(X_2, \boldsymbol{R}_2, \mu_2)$的保持测度不变的变换，简称为**保测变换**．

仿定理 14 证明过程，易知有下面的定理．

定理 15　设$(X_i, \boldsymbol{R}_i, \mu_i)$是测度空间，$\varphi$ 是$(X_1, \boldsymbol{R}_1, \mu_1)$到$(X_2, \boldsymbol{R}_2, \mu_2)$的保测变换．$E\subset X_2$．那末 E 上函数 f 关于 μ_2 可积的充要条件是 $f\circ\varphi$ 是 $\varphi^{-1}(E)$上关于 μ_1 可积的．当可积时，

$$\int_E f(x_2)d\mu_2(x_2)=\int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(x_1))d\mu_1(x_1)$$

习　题

1. 证明，对$[a, b]$上非负连续函数 f，如果 $\int_a^b f(x)dx=0$，那末 $f(x)\equiv 0$．如果勒贝格积分换成勒贝格-斯蒂阶积分，结果如何？

2. 设 f, g 是$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$上可积函数，那末 $\sqrt{f^2+g^2}$ 也是$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$上可积函数．

3. 证明定理 13 中 $-\infty<a, b<\infty$，而 φ 换为$[a, b]$上多项式 $p(x)$ 或三角多项式也是可以的．但如果$[a, b]$为$(-\infty, \infty)$时，问阶梯函数类、多项式函数类、三角多项式函数类中哪一个类能使定理 13 成立？哪些类不能成立？为什么？

4. 设 f 是$[a, b]$上勒贝格可积，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\,dx=\int_a^b f(x)dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\int_a^b f(x)\,|\cos nx|\,dx=\int_a^b f(x)dx$$

5. 如果

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{x^a}, & 0<x\leqslant 1\\ 0, & x=0\end{cases}\qquad (a>0)$$

讨论 a 为何值时, f 是$[0, 1]$上勒贝格可积函数或不可积函数.

如果

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{|x|^a}, & |x|>0\\ 0, & x=0\end{cases}\qquad (a>0)$$

讨论 a 为何值时, f 是$(-\infty, \infty)$上勒贝格可积或不可积.

6. 当 $f(x)$ 是$(-\infty, \infty)$上勒贝格可积函数时, 证明对任何 t, $f(x+t)$ 也是勒贝格可积的. 但如果 f 是$(E^1, \boldsymbol{L}^g, g)$上可积函数时, 问 $f(x+t)$ 是否在$(E^1, \boldsymbol{L}^g, g)$上可积? 为什么?

7. 当 f 是$(-\infty, \infty)$上勒贝格可积函数时, 证明

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx=0$$

如果 f 是$(E^1, \boldsymbol{L}^g, g)$上可积函数时, 上式是否成立? 为什么?

8. 设$(X_1, \boldsymbol{R}_1)$、$(X_2, \boldsymbol{R}_2)$是两个可测空间, φ 是 $X_1\to X_2$ 的可测映照, 记 $\widetilde{\boldsymbol{R}}=\varphi^{-1}(\boldsymbol{R}_2)$. (i) 证明 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 也是一个 $\boldsymbol{R}_1$ 的 σ-子环; (ii) 如果 f 是 E 上关于$(X_2, \boldsymbol{R}_2, \mu)$可积函数, 那末 $f(\varphi(\cdot))$ 是 $\varphi^{-1}(E)$ 上$(X_1, \widetilde{\boldsymbol{R}}, \nu(\cdot))$的可积函数, 其中 $\nu(\cdot)=\mu(\varphi(\cdot))$, 并且

$$\int_E f(x_2)\,d\mu(x_2)=\int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(x_1))\,d\mu(\varphi(x_1))$$

9. 证明引理 2 中的数列$\{M_n^{(i)}\}$换成一般的趋向无限大的数列时仍成立.

10. 设 E 是测度空间$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$上测度有限的集. 证明 f 在 E 上可积的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n)<\infty$, 其中 $E_n=E(n\leqslant|f|<n+1)$.

11. 设 f 是勒贝格可测函数, q 是大于 1 的某个数. 证明, 如果对任何满足 $|h|^q$ 勒贝格可积的可测函数 h, fh 是勒贝格可积的, 那末 $|f|^p$ 必是勒贝格

可积的，这里 p 是满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的正数。

12. 设 μ_1、μ_2 是可测空间 $(X, \boldsymbol{R})$ 上两个测度，并且对一切 $E\in\boldsymbol{R}$，$\mu_1(E)\leqslant\mu_2(E)$。证明：如果 f 在 E 上关于 μ_2 可积，那末 f 在 E 上关于 μ_1、$\mu_1+\mu_2$ 也可积，并且

$$\int_E fd(\mu_1+\mu_2)=\int_E fd\mu_1+\int_E fd\mu_2$$

§4 积分的极限定理

在这一节里读者将会看到新的积分在处理积分和极限交换顺序时，所要求的条件比黎曼积分要弱得多。所以本节中一些基本定理在一般分析数学中被经常引用。

1. 控制收敛定理 在本节中所讨论的可测集，如果没有特别申明，都是指某个测度空间 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 上的测度 σ-有限的集。设 $\{f_n\}$ 是 E 上一列函数，如果 E 上有一个非负函数 F，使得

$$|f_n(x)|\leqslant F(x)$$

对一切 n 在 E 上成立，就称 F 是 $\{f_n\}$ 的**控制函数**。下面的定理称为勒贝格的控制收敛定理。它首先是由勒贝格在勒贝格积分的情况下证明的。

定理 1 设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的一列可测函数，F 是它的一个可积的控制函数(即在 E 上 $|f_n|\leqslant F$，$n=1, 2, \cdots$，而 F 在 E 上可积)。如果 $\{f_n\}$ 依测度收敛于可测函数 f，那末 f 在 E 上是可积的，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu=\int_E fd\mu \tag{4.1}$$

证 由于 $f_n\Longrightarrow f$，f 是可测的。由 §2 知，存在子序列 $\{f_{n_\nu}\}$ 几乎处处收敛于 f，因此从 $|f_{n_\nu}|\leqslant F$ 得到 $|f|\leqslant F$。由 F 的可积性和 §3 引理 3 便知道 $|f|$ 是可积的，所以 f 也可积。剩下的是证明等式(4.1)成立。

先证 $\mu(E)<\infty$ 情况下成立. 对任何 $\varepsilon>0$, 记 $H_n=E\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\varepsilon}{2(\mu(E)+1)}\right)$. 考察

$$\int_E (f_n-f)d\mu=\int_{E-H_n}(f_n-f)d\mu+\int_{H_n}(f_n-f)d\mu$$

右边第一个积分利用被积函数很小 $\left(E-H_n=E\left(|f_n-f|<\frac{\varepsilon}{2(\mu(E)+1)}\right)\right)$ 得到

$$\left|\int_{E-H_n}(f_n-f)d\mu\right|\leqslant\int_{E-H_n}|f_n-f|d\mu$$

$$<\frac{\varepsilon}{2(\mu(E)+1)}\cdot\mu(E-H_n)<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.2)$$

利用 F 的积分的全连续性, 即存在 $\delta>0$, 对任何 $e\subset E$, $\mu(e)<\delta$,

$$\int_e Fd\mu<\frac{\varepsilon}{4} \qquad (4.3)$$

对于这个 δ, 再利用 $f_n\Longrightarrow f$, 便知必存在 N, 当 $n\geqslant N$ 时, $\mu(H_n)<\delta$. 从而得到右边第二个积分(用 H_n 代替(4.3)中 e)的估计

$$\left|\int_{H_n}(f_n-f)d\mu\right|\leqslant 2\int_{H_n}Fd\mu<\frac{\varepsilon}{2},\quad n\geqslant N \qquad (4.4)$$

由(4.2)、(4.3)立即得到(4.1)在 $\mu(E)<\infty$ 时成立.

现在利用在 $\mu(E)<\infty$ 情况下(4.1)成立这个事实来证明 E 是 σ-有限时, (4.1)也成立: 对任何 $\varepsilon>0$, 由积分定义, 存在 $E_k\subset E$, $\mu(E_k)<\infty$, 并且

$$\int_E Fd\mu<\int_{E_k}[F]_k d\mu+\frac{\varepsilon}{4},$$

从上式得到

$$\int_{E-E_k}Fd\mu=\int_E Fd\mu-\int_{E_k}Fd\mu\leqslant\int_E Fd\mu-\int_{E_k}[F]_k d\mu<\frac{\varepsilon}{4}$$

由此得到

$$\left|\int_E (f_n-f)d\mu\right| \leqslant \left|\int_{E_k}(f_n-f)d\mu\right| + \left|\int_{E-E_k}(f_n-f)d\mu\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{E_k}(f_n-f)d\mu\right| + \int_{E-E_k} 2F d\mu < \left|\int_{E_k}(f_n-f)d\mu\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

但 E_k 是满足 $\mu(E_k)<\infty$. 对 E_k, (4.1)成立, 所以必存在 N, 当 $n\geqslant N$ 时, $\left|\int_{E_k}(f_n-f)d\mu\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. 从而当 $n\geqslant N$ 时,

$$\left|\int_E (f_n-f)d\mu\right| < \varepsilon.$$

证毕.

仿照这个定理, 可以得到几乎处处收敛函数列的控制收敛定理.

定理 1' 设$\{f_n\}$是E上一列可测函数, F 是它的控制函数, 并且是可积的. 又如果$\{f_n\}$几乎处处收敛于可测函数 f, 那末 f 在 E 上必是可积的, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

证 与定理 1 一样, f 的可积性是显然的. 主要是证明积分与极限交换顺序. 证明过程和定理 1 相仿. 对于 σ- 有限集 E, 用定理 1 方法, 同样化为只要证明在测度有限的情况下(4.1)成立. 而在 $\mu(E)<\infty$情况下, 利用几乎处处收敛必度量收敛, 因而也可以得到(4.1). 由此可知定理 1' 是成立的. 证毕.

控制收敛定理的特殊情况便是下面的有界控制收敛定理:

系 1 设E是可测集, $\mu(E)<\infty$, $\{f_n\}$是E上一列可测函数, 且存在常数 K, 使得$|f_n|\leqslant K$, $n=1, 2, \cdots$. 如果$\{f_n\}$在E上几乎处处收敛(或依测度收敛)于可测函数 f, 那末

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

证 这时取 $F\equiv K$ 作为定理 1 中控制函数, 由于 $\mu(E)<\infty$,

F 便是可积的. 根据定理 1, 系显然成立. 证毕.

系 2 设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是完全测度空间, $\{f_n\}$是E上一列可测函数, F 是$\{f_n\}$的控制可积函数. 如果 $f_n \Longrightarrow f$ 或 $f_n \dot{\rightarrow} f$, 那末 f 必是E上可积函数, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

证 因为$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是完全的, 所以 f 是可测的(无论 $f_n \Rightarrow f$ 或 $f_n \dot{\rightarrow} f$). 利用定理 1 和定理1′ 立即得证.

下面我们举一些控制收敛定理的具体应用的例子.

定理 2 有界函数 f 在区间$[a, b]$上黎曼可积的充要条件是 f 在$[a, b]$上有界且(关于 m)几乎处处连续(或者说, f 的不连续点全体是一个 m-零集).

证 这里所用的一切记号采用 §3 定理 6. 在那里, 对任一列单调分点组$\{D_n\}$: $D_n \subset D_{n+1}$, $\delta(D_n) \to 0$, 引入两列简单函数$\{\varphi_n\}$和$\{\psi_n\}$: $\{\varphi_n\}$是单调增加的函数列, 极限函数为$\underline{f}$; $\{\psi_n\}$是单调下降是函数列, 极限函数 $\bar{f}$, 并且

$$\underline{f} \leqslant f \leqslant \bar{f} \tag{3.19}$$

这些事实, 对任何$[a, b]$上有界函数都是对的.

设 f 是黎曼可积的, 由 §3 定理 6 知道 f 是有界的. 并且从证明过程得到

$$\underline{f} \underset{m}{\doteq} f \underset{m}{\doteq} \bar{f} \tag{4.5}$$

记 $E_1 = \{x \mid \underline{f} \neq f$ 或 $\bar{f} \neq f, x \in [a, b]\}$, 根据(4.5), $m(E_1) = 0$. E_2是分点组$\{D_n\}$中所有分点全体, 它是可列集, 所以是 m-零集. 因此 $E_0 = E_1 \cup E_2$ 是 m-零集. 今证明当 $x_0 \overline{\in} E_0$ 时, 必是 f 的连续点: 事实上, 对任何 $\varepsilon > 0$, 根据(4.5), 必有自然数 N

$$f(x_0) - \varphi_N(x_0) < \varepsilon,\ \psi_N(x_0) - f(x_0) < \varepsilon \tag{4.6}$$

(参见图(3.6)), 又因为 $x_0 \overline{\in} E_1 \cup D_N$, 设 x_0 落在 D_N 的分点 $x_k^{(N)}$,

$x_{k+1}^{(N)}$ 之间，这时取 $\delta=\min(x_{k+1}^{(N)}-x_0, x_0-x_k^{(N)})$. 对任何 $x'\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$，由于

$$\left.\begin{array}{l} f(x')\leqslant\psi_N(x')=\psi_N(x_0) \\ f(x')\geqslant\varphi_N(x')=\varphi_N(x_0) \end{array}\right\} \qquad (4.7)$$

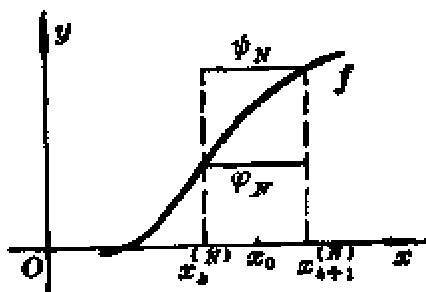


图 3.6

从(4.6)、(4.7)立即得到，

$$\begin{array}{l} f(x')\leqslant f(x_0)+\varepsilon, \\ f(x')\geqslant f(x_0)-\varepsilon \end{array} \qquad (4.8)$$

即 $|f(x')-f(x_0)|<\varepsilon$，也就是说 x_0 是 f 的连续点.

反过来，假设 f 在$[a, b]$上有界且几乎处处连续. 记 f 的连续点全体为 E_3, $m(E_3)=b-a$. 当 $x_0\in E_3$ 时，对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，使得 $x'\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$时，(4.8)成立. 因此，如果取一列分点组$\{D_n\}$: $D_n\subset D_{n+1}$, $\delta(D_n)\to 0$. 只要 $\delta(D_n)<\delta$ 时，相应于这个分点组，所作的相应的函数 φ_n、ψ_n，根据(4.8)便有

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0)\geqslant\varphi_n(x_0)\geqslant f(x_0)-\varepsilon, \\ f(x_0)\leqslant\psi_n(x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon \end{array}\right\} \qquad (4.9)$$

即 $\psi_n(x_0)-\varphi_n(x_0)<2\varepsilon$. 这样便得到

$$\bar{f}(x_0)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x_0)=f(x_0), \underline{f}(x_0)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=\underline{f}(x_0)$$

即对任何 $x_0\in E_3$, $\bar{f}(x_0)=f(x_0)=\underline{f}(x_0)$，也就是 $\bar{f}\underset{m}{\doteq}\underline{f}$.

由于 f 是有界的，所以存在常数 K，使得 $|f|\leqslant K$. 因而 $|\varphi_n|\leqslant K$, $|\psi_n|\leqslant K$. 并且注意到 $\varphi_n\to\underline{f}$, $\psi_n\to\bar{f}$. 利用系 1，便得到黎曼大、小和

$$\left.\begin{array}{l} \underline{S}(D_n)=(R)\int_a^b\varphi_n dx=(L)\int_a^b\varphi_n dx\longrightarrow(L)\int_a^b\underline{f}dx \\ \bar{S}(D_n)=(R)\int_a^b\psi_n dx=(L)\int_a^b\psi_n dx\longrightarrow(L)\int_a^b\bar{f}dx \end{array}\right\} \qquad (4.10)$$

但因为 $\bar{f}\underset{m}{\doteq}f$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(\bar{S}_n-\underline{S}_n)=0 \qquad (4.11)$$

从(4.11)立即知道 f 的 Darboux(达布)的大、小和相等，因而 f 是黎曼可积的. 证毕.

现在再举一些控制收敛定理的应用.

定理 3 设 $f(x, t)$ 是定义在矩形 $\{(x, t) | a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ 上的函数(此地 $[a, b]$, $[\alpha, \beta]$ 可以是无限的)，如果对于 $[\alpha, \beta]$ 中任何一个固定的 t, $f(x, t)$ 关于 x 在 $[a, b]$ 上是勒贝格可测的，而当 $t' \to t$ 时，$f(x, t')$ 在 $[a, b]$ 上关于 m 几乎处处收敛于 $f(x, t)$，并且存在 $[a, b]$ 上勒贝格可积函数 F，使得 $|f(x, t)| \underset{m}{\leqslant} F(x)$. 那末，当 $t \in [\alpha, \beta]$ 时，积分

$$I(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

不仅存在，而且是 t 的连续函数.

证 对任何固定的 t, 由 F 的可积性，立即推知 $f(x, t)$ 也是 x 的可积函数，因而 $I(t)$ 存在. 今再证 $I(t)$ 是 t 的连续函数：设 $t_0 \in [\alpha, \beta]$，任取 $[\alpha, \beta]$ 中一列 $\{t_n\}$，如果 $t_n \to t_0$，这时作为 x 的函数序列 $\{f(x, t_n)\}$ 有控制可积函数 $F(x)$，由定理 1，得到

$$\lim_{n\to\infty} I(t_n) = I(t_0)$$

这就是说 t_0 是 $I(t)$ 的连续点. t_0 是任意的，所以 $I(t)$ 是连续函数. 证毕.

再研究 $I(t)$ 的可微性：

定理 4 设 $f(x, t)$ 是矩形 $\{(x, t) | a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ 上的二元函数，固定 $t \in [\alpha, \beta]$, $f(x, t)$ 是 x 的勒贝格可积函数. 如果关于 m 对几乎所有 x，函数 $f(x, t)$ 对 t 有偏导数，并且存在 $[a, b]$ 上勒贝格可积函数 $F(x)$，使得

$$\left|\frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h}\right| \dot{\leqslant} F(x) \qquad (4.12)$$

那末 $I(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有导函数，并且

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x, t)dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}f(x, t)dx \tag{4.13}$$

证 先任取一列 $h_n \to 0 (h_n \neq 0)$，使 $t+h_n \in [\alpha, \beta]$，那末，当 $n\to\infty$时，对于$[a, b]$中几乎所有 x，成立着

$$\frac{f(x, t+h_n)-f(x, t)}{h_n} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}f(x, t)$$

且由于(4.12)，利用定理1，便知

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \frac{1}{h_n}[f(x, t+h_n)-f(x, t)]dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}f(x, t)dt$$

即(4,13)成立. 证毕.

关于 $I(t)$的可积性的研究，已涉及二次积分交换顺序问题，这将放在重积分中讨论.

2. Levi 引理和 Fatou 引理 下面介绍两个与控制收敛定理同等重要而且也是常用的收敛定理.

定理 5(勒维(Levi)引理) 设$\{f_n\}$是E上可积函数的单调增加序列，如果它的积分序列有上界，那末 f_n 必几乎处处收敛于一可积函数 f，而且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu \tag{4.14}$$

证 不妨设 $f_n \geqslant 0$，不然考察$\{f_n - f_1\}$好了. 记$A = \sup\limits_n \int_E f_n d\mu$. 由于$\{f_n\}$单调增加，所以极限函数(这里暂时允许极限函数取无限大值)处处存在，记为h.

今先证 $E(h=\infty)$是可测集，并且是 μ-零集：对任何自然数 N，显然

$$0 \leqslant [f_1]_N \leqslant [f_2]_N \leqslant \cdots \leqslant [f_n]_N \leqslant \cdots \to [h]_N$$

令$\{E_n\}$是E 的测度有限单调覆盖. 由于 $0 \leqslant [h]_N \leqslant N$，且 $\mu(E_N) < \infty$，根据控制收敛定理，

$$\int_{E_N}[h]_N d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{E_N}[f_n]_N d\mu \leqslant A \tag{4.15}$$

因为 $E_\infty = E(h=\infty) = \bigcap_{N=1}^{\infty} E([h]_N = N)$，而 $E([h]_N = N)$是可测集，所以 $E(h=\infty)$是可测集．并且

$$N\mu(E_\infty \cap E_N) = \int_{E_\infty \cap E_N} N d\mu = \int_{E_N \cap E_\infty}[h]_N d\mu \leqslant A$$

因此 $\mu(E_\infty \cap E_N) \leqslant \frac{A}{N}$. 对任何$N>n$, $E_n \subset E_N$, 从而

$$\mu(E_\infty \cap E_n) \leqslant \mu(E_\infty \cap E_N) \leqslant \frac{A}{N}$$

令 $N\to\infty$，立即得到 $E_\infty \cap E_n$ 是 μ-零集．再令 $n\to\infty$，就知道 E_∞ 也是 μ-零集．作 f 如下：

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & h(x) < \infty \\ 0 & , h(x) = \infty \end{cases}$$

显然 f 是 E 上有限函数，$f \doteq h$(因此 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \doteq f$)，$[f]_N \doteq [h]_N$．由(4.15)立即可知

$$\int_{E_N}[f]_N d\mu \leqslant A$$

从而 f 是 E 上可积函数．再用 f 作为序列$\{f_n\}$的控制可积函数，由控制收敛定理知(4.14)成立．证毕．

Levi 引理的另一个形式如下：

定理 5′(Levi 引理) 设$\{f_n\}$ 是 E 上可积函数的单调下降序列，又设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\int_E f_n d\mu\right\} > -\infty$，那末$\{f_n\}$在 E 上必几乎处处收敛于一可积函数，而且(4.14)成立．

证 只要考察$\{-f_n\}$序列，对$\{-f_n\}$用定理 5 就得到定理 5′．

本引理还有一种常用的级数形式：

定理 5''(Levi 引理)　设$\{u_n\}$是E上非负的可积函数序列，并且$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E u_n d\mu<\infty$．那末函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必几乎处处收敛于$E$上一个可积函数$f$，并且

$$\int_E f d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E u_n d\mu$$

这个定理由读者自己证明．

定理 6 (法都(Fatou)引理)　设$\{f_n\}$是E上一列可积函数，如果有E上一可积函数h，使$f_n\dot{\geqslant}h$，$n=1, 2, \cdots$，而且

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu<\infty$$

那末函数$\varliminf_{n\to\infty}f_n$是$E$上可积函数①，而且

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty}f_n d\mu\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu \tag{4.16}$$

证　对任何两个自然数m, n，作函数

$$F_{mn}=\min(f_m, f_{m+1}, \cdots, f_{m+n})$$

显然$F_{mn}\dot{\geqslant}h$．又当m固定时，$\{F_{mn}\}$是随n增加而单调下降的可积函数，而依据积分的单调性，

$$\int_E h d\mu\leqslant\int_E F_{mn}d\mu\leqslant\min\left(\int_E f_m d\mu, \int_E f_{m+1}d\mu, \cdots, \int_E f_{m+n}d\mu\right) \tag{4.17}$$

固定m，根据(4.17)，对$\{F_{mn}\}$应用定理 5'，得到极限函数$\lim_{n\to\infty}F_{mn}$(可能在一个μ-零集上取值为$-\infty$)，记它为F_m(在$\lim_{n\to\infty}F_{mn}=-\infty$的集上规定为零)，$F_m$是可积的，而且

① 当函数在一个零集的子集上函数值为$\pm\infty$时，可任意改变这个零集上的函数值为有限常数．

$$\lim_{n\to\infty}\int_E F_{mn}d\mu=\int_E F_m d\mu \tag{4.18}$$

再在(4.17)中令 $n\to\infty$，我们得到

$$\int_E F_m d\mu\leqslant\inf_{k\geqslant m}\int_E f_k d\mu \tag{4.19}$$

显然，$\{F_m\}$ 是单调增加序列，又根据 (4.19)，便知道积分序列 $\left\{\int_E F_m d\mu\right\}$ 的上确界不超过 $\lim\limits_{m\to\infty}\inf\limits_{k\geqslant m}\int_E f_k d\mu$ 然而

$$\lim_{m\to\infty}\inf_{k\geqslant m}\int_E f_k d\mu=\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu<\infty.$$

这样，对序列 $\{F_m\}$，又可引用定理 5 的结论，得到 $\{F_m\}$ 有可积的极限函数 F，而且

$$\int_E F d\mu=\int_E\lim_{m\to\infty}F_m d\mu=\lim_{m\to\infty}\int_E F_m d\mu\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu. \tag{4.20}$$

但是 $F\doteq\lim\limits_{m\to\infty}F_m\doteq\lim\limits_{m\to\infty}\inf\limits_{k\geqslant m}f_k=\underline{\lim}\limits_{n\to\infty}f_n$. 由(4.20)便得到(4.16). 证毕.

同 Levi 引理一样，Fatou 引理也有另一种形式.

定理 6′(Fatou 引理) 设 $\{f_n\}$ 是 E 上一列可积函数，如果有 E 上的另一个可积函数 h，使得 $f_n\dot{\leqslant}h$，而且

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n d\mu>-\infty$$

那末，函数 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n$ 在 E 上是可积函数，而且

$$\int_E\overline{\lim_{n\to\infty}}f_n d\mu\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n d\mu \tag{4.21}$$

证 读者可以考察 $\{-f_n\}$，利用定理 6 来推出本定理.

3. 极限定理的注 上面是介绍三种极限定理的内容本身及某些应用. 此外，我们还要说明两个问题：

第一，控制收敛定理、Levi 定理以及 Fatou 定理三者是等价

的. 所谓"等价", 就是指如果其中有一个定理用某种途径先被证明, 那末其它两个便可由它推出. 本教材是采用先证控制收敛定理, 然后推出 Levi 定理, 最后再推出 Fatou 定理. 读者如果有兴趣, 可自行假设另一个定理成立, 而推出其它两个定理.

第二, 这些收敛定理的基本条件是不可缺少的. 下面举一些例来说明这个问题.

例 1 控制收敛定理中控制函数的可积性是不可缺少的, 例如, 在$(E', \mathbf{L}, m)$上, 取 $E=(0, \infty)$函数

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in[0, n],\\ 0, & x\in(n, \infty),\end{cases} \quad n=1, 2, \cdots$$

显然, 控制$\{f_n\}$的函数 F, 必须 $F\underset{n}{\geqslant}1$, 它在$[0, \infty)$上不是勒贝格可积的. $\{f_n\}$的极限函数 $f\equiv 1$, 在$[0, \infty)$上不是勒贝格可积的.

再举一个控制收敛函数的可积性不可缺少的例子.

例 2 $(0, \infty)$上函数列

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+x^2} \quad n=1, 2, \cdots$$

显然, 在$(0, \infty)$上 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$, 但是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2}\neq\int_0^\infty 0\,dx$$

虽处处收敛, 但不能逐项积分, 其原因是在于不存在可积分的控制函数.

例 3 Levi 引理中$\{f_n\}$的积分序列$\left\{\int_E f_n d\mu\right\}$有上界这个条件是不可缺少的. 例如作函数

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|}{x}, & x\in\left[\dfrac{1}{n},1\right]\\ 0, & x\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right)\end{cases}$$

显然$\{f_n\}$是可积的单调增加序列，而$\int_0^1 f_n dx\to\infty$. f_n 的极限函数是

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|}{x}, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$$

这是熟知的勒贝格不可积函数.

此外，例 1 中函数列$\{f_n\}$也可作为 Levi 定理中有上界这个条件不可少的反例.

Fatou 引理中存在可积的 h，使 $h\leqslant f_n$，以及 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\int f_n d\mu<\infty$. 希读者自己作出这两个条件不可少的例.

第三，当积分概念推广到可以取无限大值时，那末在应用Levi和 Fatou 引理的时候，将有一定的方便之处.

设 f 是 E 上非负的$(X,\boldsymbol{R},\mu)$可测函数，$\{E_n\}$为E上测度有限单调覆盖，$\{M_n\}$是趋向∞的正数列，记极限（允许是无限大）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n}[f]_{M_n}d\mu$为$\int_E fd\mu$. 显然$\int_E fd\mu$（可取无限大）不依赖于$\{E_n\}$、$\{M_n\}$的选取（可参见§3 引理 2 的讨论和(3.24)式）. 对于一般函数f，总有分解 $f=f^+-f^-$，如果$\int_E f^+d\mu$、$\int_E f^-d\mu$ 中至少有一个是有限的（即至少有一个是可积的），那末记

$$\int_E fd\mu=\int_E f^+d\mu-\int_E f^-d\mu.$$

$\int_E f d\mu$ 有下列一些性质：例如

1° $\int_E f d\mu$、$\int_E h d\mu$ 中有一个是有限时，那末

$$\int_E f \pm h d\mu = \int_E f d\mu \pm \int_E h d\mu.$$

2° 对任何有限数 α，

$$\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$$

3° 单调性，当 $f \leqslant h$ 时，那末

$$\int_E f d\mu \leqslant \int_E h d\mu$$

代数性质不再一一例举。

Levi 和 Fatou 引理最一般的形式可以叙述如下：

定理 7(Levi)　设 $\{f_n\}$ 是 E 上一列可积函数，并且 $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots \leqslant f_n \leqslant \cdots$（或 $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant \cdots$），而 f_1 是 E 上积分有限的函数（即 $\int_E f_1 d\mu$ 是有限值），那末

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \tag{4.22}$$

证　分两种情况：(i) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu < \infty$。这时，因 f_1 是 E 上积分有限的函数，由单调性 3°，一切 f_n 在 E 上都是积分有限的。这样，满足定理 5 条件，因而(4.22)成立。

(ii) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \infty$，这时只要证 $\int_E \lim\limits_{n\to\infty} f_n d\mu = \infty$。假如相反，即 $\int_E f d\mu < \infty$，$f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$。因为 $f \geqslant f_n (n = 1, 2, \cdots)$ 再由积分的单调性，就应有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leqslant \int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu < \infty$$

这与假设矛盾. 所以(4.22)成立.

单调下降情况类似可证. 证毕.

Levi 引理说明: 对于单调的可积函数序列$\{f_n\}$, 只要唯一的条件, 即$\int_E f_1 d\mu$是有限值, 那末积分就与极限可以交换顺序.

注意: $\int_E f_1 d\mu$是有限的条件不能少.

例4 设

$$f_n(x)=\begin{cases}-1, & x\in(-\infty,-n)\cup(n,\infty)\\ 0, & x\in[-n,n]\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots$$

显然$f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_n\leqslant\cdots$, $\int_{-\infty}^{\infty}f_n dx=-\infty$. 然而$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$, f在$(-\infty,\infty)$上恒为零, 因而$\int_{-\infty}^{\infty}f dx=0$, 所以(4.22)不成立.

定理 8(Fatou) 设$\{f_n\}$是E上一列可积函数, 如果存在E上积分有限的函数h, 使得$h\leqslant f_n$, $n=1,2,\cdots$, 那末

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty}f_n d\mu\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu \tag{4.23}$$

证 沿用定理6的证明路子: 作$F_{mn}=\min(f_m, f_{m+1}, \cdots, f_{m+n})$, 易知(4.17)在此也成立:

$$\int_E h d\mu\leqslant\int_E F_{mn}d\mu$$
$$\leqslant\min\left(\int_E f_m d\mu, \int_E f_{m+1}d\mu,\cdots,\int_E f_{m+n}d\mu\right) \tag{4.24}$$

记$F_m=\lim\limits_{n\to\infty}F_{mn}$. 当$\inf\limits_{k\geqslant m}\int_E f_k d\mu$是无限大(显然只能是正无限大)下式自动成立

$$\int_E F_m d\mu\leqslant\inf_{k\geqslant m}\int_E f_k d\mu \tag{4.25}$$

如果$\inf\limits_{k\geqslant m}\int_E f_k d\mu<\infty$, 那末至少有$n_0$, 使得$\int_E f_{m+n_0}d\mu<\infty$. 固定

m，对单调下降函数列$\{F_{mn}\}$可以(从 n_0 标号以后)用定理 5′ 得到(4.25)仍成立.

取 $F_0=h$，对 $F_0\leqslant F_1\leqslant\cdots\leqslant F_m\leqslant\cdots$利用 Levi 引理便得到

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu=\int_E \lim_{n\to\infty} F_n d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E F_n d\mu$$

$$\leqslant \sup_n \inf_{k\geqslant n}\int_E f_k d\mu=\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu$$

证毕.

Fatou 引理说明：(4.23)成立的唯一条件是可积函数列$\{f_n\}$有积分有限的函数 h 从下面控制$\{f_n\}$. 这个条件是不可少的. 例 4 就可以作为一个例子. 同样，当$\{f_n\}$有从上面控制的积分有限的函数时，就有上限的 Fatou 引理.

当然“积分”还可以推广到可取$\pm\infty$值的可测函数上，并建立类似的一系列结果. 读者可以仿照进行.

4. 复函数的积分与极限定理的应用　最后，我们再把积分推广到复函数的情况.

设 F 是 E 上的复函数，对每个 $x\in E$，分别记 $F(x)$的实部、虚部为 $F_1(x)$，$F_2(x)$，如果 F_1，F_2 关于 μ 都是在 E 上可积，那末就称 F 在 E 上关于 μ 是可积的，这时定义 F 的积分是

$$\int_E F_1 d\mu+i\int_E F_2 d\mu$$

记做$\int_E F d\mu$，就是说

$$\int_E F d\mu=\int_E F_1 d\mu+i\int_E F_2 d\mu$$

对于复函数的积分，§3 以及本节中关于实函数的积分性质照样成立. 这里不再一一详细讨论. 只举一个定理作为例.

定理 9　设 F 是 E 上的可积函数，那末$|F|$是可积的，并且

$$\left|\int_E F d\mu\right| \leqslant \int_E |F| d\mu \tag{4.26}$$

证 设 F_1、F_2 为 F 的实部、虚部. 由 F 的可积性, 按定义, F_1、F_2 都是可积的. 因为

$$|F| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \leqslant |F_1| + |F_2|$$

立即得知 $|F|$ 是可积的. 记

$$\int_E F_1 d\mu + i\int_E F_2 d\mu$$

为 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, 由此得到

$$\begin{aligned}\left|\int_E F d\mu\right| = r &= \int_E F_1 d\mu \cos\theta + \int_E F_2 d\mu \sin\theta \\ &= \int_E (F_1\cos\theta + F_2\sin\theta) d\mu \\ &= \int_E \mathrm{Re}(Fe^{-i\theta}) d\mu \leqslant \int_E |F| d\mu\end{aligned}$$

证毕.

下面举一些收敛定理的应用.

例 5 $L(-\infty, \infty)$ 上 Fourier 变换 设 f 是 $(-\infty, \infty)$ 上勒贝格可积函数(可以是复的), 那末

$$\tilde{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx$$

是 α 在 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数, 而且

$$\tilde{f}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x} - 1}{ix} f(x) dx \tag{4.27}$$

函数 $\tilde{f}(\alpha)$ 称为 $f(x)$ 的 **Fourier 变换**, 有时简记为 $\tilde{f}$.

证 由于 $|f(x)e^{i\alpha x}| = |f(x)|$, 而且 $e^{i\alpha x}$ 是 α 的连续函数, 取 $|f(x)|$ 作为 $\{e^{i\alpha x}f(x) | \alpha \in (-\infty, \infty)\}$ 的控制函数时, 立即由控制收敛定理知道 $\tilde{f}(\alpha)$ 是 α 的连续函数. 另一方面,

$$f_{\alpha,h}(x) = \left|\frac{e^{i(\alpha+h)x} - 1}{ix} - \frac{e^{i\alpha x} - 1}{ix}\right| = \frac{|e^{ihx} - 1|}{|x|} = \frac{\left|2\sin\dfrac{h}{2}x\right|}{|x|} \leqslant |h|$$

(4.28)

当$|h|\leqslant 1$时，函数族$\{f_{\alpha,h}f\}$的控制函数可以取为$|f(x)|$，由控制收敛定理知道，关于α的微分号可以和积分号交换顺序，由此得到

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}-1}{ix}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\alpha}\frac{e^{i\alpha x}-1}{ix}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}f(x)dx$$

证毕。

设$(E^1, \mathbf{L}^g, g)$是勒贝格-斯蒂阶测度空间，当$(-\infty,\infty)$上的函数f关于g可积时，称

$$\tilde{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}f(x)dg$$

是f的**Fourier-Stieltjes 变换**。这时$\tilde{f}(\alpha)$也是α的连续函数，而且也有

$$\tilde{f}(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}-1}{ix}f(x)dg$$

它的证明过程完全与勒贝格积分情况一样。

例 6 设$f(x)$是直线E^1上，但在某个区间$[-M, M]$外为零的有界 Baire 函数，$P(x)$是任何一个实或复系数多项式，那末

$$P\left(\frac{d}{d\alpha}\right)\tilde{f}(\alpha)=\widetilde{P(ix)f(x)} \tag{4.29}$$

其中$P\left(\frac{d}{d\alpha}\right)$是将$P(x)$中的$x$以及$x$的$k$次幂相应地换成$\frac{d}{d\alpha}$以及$\frac{d^k}{d\alpha^k}$。

事实上，类似于(4.28)得到

$$f_{\alpha,h}(x)=\left|\frac{e^{i(\alpha+h)x}-e^{i\alpha x}}{h}\right|=\left|\frac{e^{ihx}-1}{h}\right|\leqslant|x|$$

由于$f(x)$是在$[-M, M]$外为零的有界 Baire 函数，所以$|x||f|$是$(-\infty, \infty)$上可积函数。$|x||f|$可以作为$\{f_{\alpha,h}(x)\}$的可积控制函数。由此得到

$$\left(\frac{d}{d\alpha}\right)\tilde{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\alpha}e^{i\alpha x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}(ix)f(x)dx$$

$$=\widetilde{(ix)f(x)}$$

如果用$(ixf(x))$代替原来的$f(x)$重复使用上述结论,就得到

$$\left(\frac{d}{d\alpha}\right)^k\tilde{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}(ix)^kf(x)dx=\widetilde{(ix)^kf(x)}$$

再利用 Fourier 变换 $f\longmapsto\tilde{f}$ 的线性,立即得到(4.29).

例 7 设$f(x)$定义在E^1上,但在某个区间$[-M, M]$外$f(x)$为零,而且在整个E^1上有直到n阶连续的导函数,$P(x)$是任何一个n阶多项式,那末

$$P(\alpha)\tilde{f}(\alpha)=\widetilde{P\left(i\frac{d}{dx}\right)f(x)} \tag{4.30}$$

证 显然$f(x)$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\cdots$, $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ 都是有界连续函数. 我们只要考虑黎曼积分,由于

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\left(i\frac{d}{dx}\right)f(x)dx=(R)\int_{-M}^{M}ie^{i\alpha x}df(x)$$

$$=ie^{i\alpha x}f(x)\Big|_{-M}^{M}+(R)\int_{-M}^{M}\alpha e^{i\alpha x}f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha e^{i\alpha x}f(x)dx=\alpha\tilde{f}(\alpha)$$

所以重复应用上述分部积分步骤就得到

$$\alpha^k\tilde{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\left(i\frac{d}{dx}\right)^kf(x)dx,\quad k=1,2,\cdots,n$$

即(4.30)成立.

注 如果例7中$f(x)$在E^1上无限次可微,那末(4.30)对所有多项式$P(x)$成立.

显然,例6的结论对一般的 Fourier-Stieltjes 变换也成立. 但例7的结论一般说不能成立. 要把例7的结论推广到 Fourier Stieltjes 变换情况,必需要先推广关于一般测度的导数概念.

例 8 设N是自然数集,$\mathbf{R}$是N的一切子集全体,$M\in\mathbf{R}$时,规

定测度 $\mu(M)=M$ 中含有自然数的个数．显然，定义在 N 上任何函数 f 都是 $(N,\mathbf{R})$ 上的可测函数．和本章§3 例 10 一样，可以证明 f 在 $(N,\mathbf{R},\mu)$ 上可积的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)|<\infty$$

如果记 $f_i=f(i)$, $i=1,2,\cdots$，这样 N 上一个函数 f 就和数列 $(f_1,f_2,\cdots,f_i,\cdots)$ 相对应，这时 f 在 N 上可积性就化为级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}f_i$ 的绝对收敛性．易知 f 关于 $(N,\mathbf{R},\mu)$ 的积分(值)就是级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}f_i$ 的和．反过来，如果有一列数 $(f_1,f_2,\cdots,f_i,\cdots)$，用上述对应，也可把它看作 N 上的一个函数．这样级数的绝对收敛性以及级数的和等就化为相应函数关于 μ 的可积性以及积分值．由此可见，有了一般测度概念，就用关于一般测度的积分的观念可以将过去数学分析中的"积分"和"级数"问题统一起来处理。例如利用控制收敛定理就得到数学分析中级数求和与极限交换顺序的如下命题：

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_{m,n}$, $m=1,2,\cdots$ 是一列级数，并且 $\lim\limits_{m\to\infty}x_{m,n}$ 存在，记 $x_n=\lim\limits_{m\to\infty}x_{m,n}$．如果又存在另外一个正项收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$，使得对每个 n, $|x_{m,n}|\leqslant y_n$, $m=1,2,\cdots$ 成立，那末，对每个 m, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_{m,n}$ 绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 也绝对收敛且

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}x_{m,n}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{m\to\infty}x_{m,n}$$

现在来证明它：作 N 上的函数 F,f_m,f 如下：当 $n\in N$ 时

$$F(n)=y_n,\ f_m(n)=x_{mn},\ f(n)=x_n$$

通过上述对应，在测度空间$(N, \boldsymbol{R}, \mu)$上，F是可积函数，函数列$\{f_m\}$在N上处处收敛于f，并且$|f_m|\leqslant F$在N上处处成立.

由F的可积性，以及$|f_m|\leqslant F$，$|f|\leqslant F$，立即推出f_m，f在$(N, \boldsymbol{R}, \mu)$上可积，再由控制收敛定理就得到

$$\lim_{m\to\infty}\int_N f_m d\mu=\int_N f d\mu$$

把上述关于函数积分的结论再化成级数的形式就是所要证明的。

在今后(例如§5和第四章§3等处)还要利用积分来处理级数问题。

习　题

1. 证明级数形式的 Levi 引理(即课文中的定理5″).

2. 设$f(x)$是$(-\infty,\infty)$上勒贝格可积函数，证明$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n^2x)$必在$(-\infty,\infty)$上几乎处处(按勒贝格测度)等于一个勒贝格可积函数.

3. 设$f(x)$是$(-\infty,\infty)$上满足$f(0)=0$而关于$(E^1, \boldsymbol{L}^g, g)$的可积函数. 试举出一个$g$，说明习题2对于$g$测度是不成立的.

4. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\lg^p(x+n)}{n}e^{-x}\cos x dx=0$$

p为任意固定正数.

5. 设$f(x)$在$(0,\infty)$上勒贝格可积，并且均匀连续，那末$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. 举例说明均匀连续条件不可去掉.

6. 设$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上勒贝格可测，并且在任何有限区间(a,b)上可积，而且$h(x)$在$(-\infty,\infty)$上有n阶连续导函数，在$[-M,M]$外为零. 证明下面的函数

$$(f*h)(t)=\int f(x+t)h(x)dx$$

是 t 的具有 n 阶导数的函数.

7. 证明黎曼-勒贝格引理：当 f 在 $(-\infty, \infty)$ 上是勒贝格可积函数时，

$$\lim_{\alpha\to\pm\infty}\tilde{f}(\alpha)=0$$

8. 设 f 是 $(-\infty, \infty)$ 上复值函数，并且勒贝格可积，证明

$$h(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{i\alpha x}\tilde{f}(x)dx$$

在 α 的上半平面(即 $\mathrm{Im}\alpha>0$)是 α 的连续函数，并且是 α 的解析函数.

9. 在假设 Fatou 引理已被证明的情况下，证明由它可以推出控制收敛定理 1 和 1′.

10. 设 $\{f_n\}$ 是测度空间 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 的集 E 上可测函数列，如果(i)存在 E 上可积函数 F，使得 $|f_n|\leqslant F(n=1, 2, \cdots)$；(ii) $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于可测函数 f. 那末必有 $f_n\xrightarrow[\mu]{\mu}f$.

11. 在全有限的测度空间中，举例说明 Levi 引理中第一个函数 f_1 的可积性这个条件是不能少的.

12. 设 $(X, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是全 σ-有限测度空间，$f(x)$ 是 $(X, \boldsymbol{R})$ 上非负实可测函数. 如果允许"积分"取无限大值，那末

$$\nu(E)=\int_E fd\mu,\ E\in\boldsymbol{R}$$

是 $(X, \boldsymbol{R})$ 上全 σ-有限测度，并且对每个 E，如果 $\mu(E)=0$，必有 $\nu(E)=0$.

§5　重积分和累次积分

在这一节里，我们将建立重积分概念，并研究重积分和累次积分的关系，以及累次积分中交换积分顺序的问题. 不失一般性，只要讨论二重积分和二次积分就够了. 为此，我们先建立乘积测度.

1. 乘积空间　设 X, Y 是任何两个集，一切有序的点对 (x, y)，$x\in X$，$y\in Y$ 全体组成的集，记为 $X\times Y$，称它为空间 X，Y 的**乘积空间**(又称为 Cartesian 乘积). 例如实平面 E^2 就可以看成实数直线 E^1 和 E^1 的乘积空间，$E^2=E^1\times E^1$. 为了今后叙述方便起见，我们引入一些术语：设 $A\subset X$，$B\subset Y$，称 $A\times B$ 是 $X\times Y$ 中的"矩

形", A, B 称为矩形 $A\times B$ 的"边".

定理1 如果 $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}$ 分别是 X, Y 的某些子集构成的环，那末，由各式各样有限个互不相交的矩形 $A\times B(A\in\boldsymbol{S},\ B\in\boldsymbol{T})$ 的和集所组成的 $X\times Y$ 的子集类 $\boldsymbol{R}$ 是环.

证 首先由 $\boldsymbol{R}$ 的定义，知道 $\boldsymbol{R}$ 中任何有限个互不相交的集的和集属于 $\boldsymbol{R}$. 根据第二章§1习题，只要证明 $\boldsymbol{R}$ 中任何两个集的差也属于 $\boldsymbol{R}$ 就可以了. 记 $\boldsymbol{P}=\{A\times B|A\in\boldsymbol{S},\ B\in\boldsymbol{T}\}$，对任何 $E_i=A_i\times B_i\in\boldsymbol{P}$, $i=1,2$, 由于 $\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{T}$ 是环，而且

$$E_1\cap E_2=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$$

立即知道 $E_1\cap E_2\in\boldsymbol{R}$. 由此可知 $\boldsymbol{R}$ 中任何两个集 $\bigcup_{i=1}^{m}E_i$, $\bigcup_{j=1}^{n}F_j$ 的通集 $\bigcup_{i,j}^{m\,n}(E_i\cap F_j)\in\boldsymbol{R}$. 因而 $\boldsymbol{R}$ 中有限个集的通集也属于 $\boldsymbol{R}$. 又因为(图3.7)

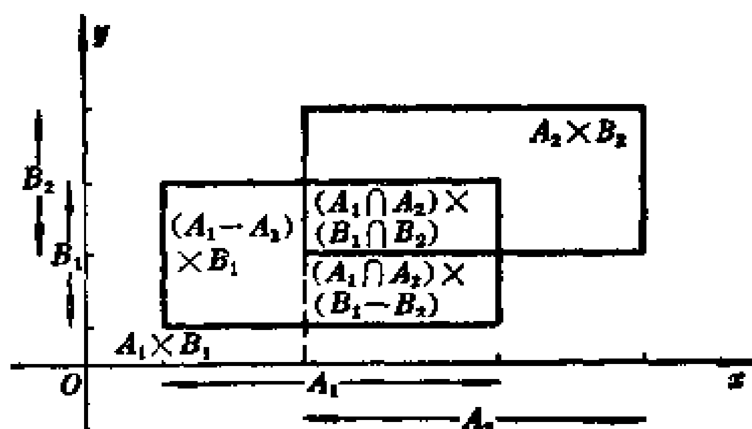


图3.7

$$A_1\times B_1-A_2\times B_2=[(A_1\cap A_2)\times(B_1-B_2)]\cup[(A_1-A_2)\times B_1]$$

所以 $\boldsymbol{P}$ 中任何两个集的差属于 $\boldsymbol{R}$. 对 $\boldsymbol{R}$ 中任何两个集 $\bigcup_{i=1}^{m}E_i(E_i\cap E_j=\varnothing, i\neq j, E_i\in\boldsymbol{P})$、$\bigcup_{j=1}^{n}F_j(F_j\cap F_k=\varnothing, j\neq k, F_j\in\boldsymbol{P})$ 有

$$\bigcup_{i=1}^{m} E_i - \bigcup_{j=1}^{m} F_j = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{m} (E_i - F_j)$$

由上所述，$E_i - F_j \in \boldsymbol{R}$，因而有限个通 $\bigcap_{j=1}^{m}(E_i - F_j) \in \boldsymbol{R}$，并且

$$\left\{\bigcap_{j=1}^{m}(E_i - F_j)\right\}$$

是互不相交的，所以 $\bigcup_{i=1}^{m} E_i - \bigcup_{j=1}^{m} F_j \in \boldsymbol{R}$。证毕。

把定理 1 中的环记为 $\widehat{\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}}$。

定义 设$(X, \boldsymbol{S})$、$(Y, \boldsymbol{T})$是两个可测空间，记 $\boldsymbol{P} = \{A \times B \mid A \in \boldsymbol{S}, B \in \boldsymbol{T}\}$，而用 $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}$ 表示包含 $\boldsymbol{P}$ 的最小 σ-环，称$(X \times Y, \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T})$为$(X, \boldsymbol{S})$、$(Y, \boldsymbol{T})$的**乘积(可测)空间**，称 $\boldsymbol{P}$ 中的集为**可测矩形**。

系 设$(X, \boldsymbol{S})$、$(Y, \boldsymbol{T})$是两个可测空间，那末

$$\boldsymbol{S}(\widehat{\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T} \tag{5.1}$$

证 由定理 1，环 $\widehat{\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}}$ 是包含 $\boldsymbol{P}$ 的最小环，所以 $\widehat{\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}} \subset \boldsymbol{S}(\boldsymbol{P})$，因而 $\boldsymbol{S}(\widehat{\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}}) \subset \boldsymbol{S}(\boldsymbol{P})$。另一方面，由于 $\widehat{\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}} \supset \boldsymbol{P}$，所以又有 $\boldsymbol{S}(\widehat{\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}}) \supset \boldsymbol{S}(\boldsymbol{P})$。从而 $\boldsymbol{S}(\widehat{\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T}}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{P})$。证毕。

2. 截口 设$(X, \boldsymbol{S})$、$(Y, \boldsymbol{T})$是可测空间，$(X \times Y, \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{T})$是它们的乘积空间。如果 E 是 $X \times Y$ 的一个子集，称集 $E_x = \{y \mid (x, y) \in E\}$ 为被 x 决定的 E 的截口，它有时也写成 $S_x E$(注意，对每个 x 来说，E_x(或 $S_x E$)是 Y 的子集，并不是 $X \times Y$ 的子集)。E_x 有时也说成 x-截口。同样集 $S^y E = E^y = \{x \mid (x, y) \in E\}$ 是 y-截口。

如果 f 是定义在 $X \times Y$ 的子集 E 上的函数，当固定 $x \in X$ 时，如果 E_x 不是空集，称定义在 E_x 上的函数

$$f_x(y) = f(x, y)$$

为f(被x决定)的截口．类似地，当固定$y\in Y$，如果E^y不空，称定义在E^y上的函数

$$f^y(x)=f(x,y)$$

为f(被y决定)的截口．

定理 2 在乘积可测空间$(X\times Y, \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})$上，可测集的截口是可测的，可测函数的截口是可测的．

证 令$\boldsymbol{E}$是由$X\times Y$中每个x-截口和y-截口都是可测的集E所组成的一个类．注意"求截口"运算满足下列规则：

(i) 对任何一族集$\{E_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ $(E_\lambda\subset X\times Y)$，以及任何$x_0\in X$，

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda\right)_{x_0}=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_{\lambda x_0}$$

(ii) 对任何E、$F\subset X\times Y$，以及任何$x_0\in X$，

$$(E-F)_{x_0}=E_{x_0}-F_{x_0}$$

由此，容易证明$\boldsymbol{E}$是σ-环，显然$\boldsymbol{P}\subset\boldsymbol{E}$，由系知$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}\subset\boldsymbol{E}$．因此，$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$中每个元素的截口都是可测的．

设$E\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$，$f$是$E$上可测函数，对任何数$c$和任何给定的$x_0\in X$，

$$\begin{aligned}E_{x_0}(f_{x_0}>c)&=\{y\,|\,f_{x_0}(y)>c,\ y\in E_{x_0}\}\\&=\{y\,|\,f(x_0,y)>c,\ (x_0,y)\in E\}\\&=\{y\,|\,(x_0,y)\in E(f>c)\}=S_{x_0}E(f>c)\end{aligned}$$

由于$E(f>c)$是可测集，所以它的截口$S_{x_0}E(f>c)$是$(Y, \boldsymbol{T})$上可测集，即f_{x_0}是集E_{x_0}上y的可测函数．类似可以证明f^y是E^y上x的可测函数．证毕．

3. 乘积测度 设空间$(X, \boldsymbol{S}, \mu)$，$(Y, \boldsymbol{T}, \nu)$是测度空间，在这段里的目标是由它们建立$(X\times Y, \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})$上的乘积测度"$\mu\times\nu$"．为此我们先证明一个引理．

引理 1 设$(X, \boldsymbol{S}, \mu)$，$(Y, \boldsymbol{T}, \nu)$是两个全有限的测度空间，如

果 E 是 $(X\times Y,\ \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})$ 的可测子集，那末 $\nu(E_x)$ 和 $\mu(E^y)$ 分别是 $(X,\boldsymbol{S},\mu)$, $(Y,\boldsymbol{T},\nu)$ 上的可测函数，而且

$$\int_X \nu(E_x)d\mu=\int_Y \mu(E^y)d\nu \tag{5.2}$$

证　令 $\boldsymbol{M}$ 是使 $\nu(E_x)$, $\mu(E^y)$ 为可测函数，并且(5.2)成立的 $\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$ 中可测集 E 的全体所成的类。今证 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$.

当　$E=A\times B\in\boldsymbol{P}$ 时，由于

$$E_x=\begin{cases}B, & x\in A\\ \varnothing, & x\overline{\in}A\end{cases}$$

显然 $\nu(E_x)=\nu(B)\chi_A(x)$，此地 χ_A 为集 A 的特征函数．类似地 $\mu(E^y)=\mu(A)\chi_B(y)$．因为 μ、ν 是全有限的，所以 $\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{T}$ 必是 σ-代数，所以 $\nu(E_x)$, $\mu(E^y)$ 分别是 $(X,\boldsymbol{S})$, $(Y,\boldsymbol{T})$ 的可测函数．而且

$$\int_X \nu(E_x)d\mu=\mu(A)\nu(B)=\int_Y \mu(E^y)d\nu$$

因此 $E\in\boldsymbol{M}$．从而 $\boldsymbol{P}\subset\boldsymbol{M}$.

再证 $\boldsymbol{M}$ 是包含环 $\boldsymbol{R}$ 的单调类：如果 $E_1,\cdots,E_n\in\boldsymbol{M}$, $E_i\cap E_j=\varnothing$, $i\neq j$．记 $E=\bigcup\limits_{j=1}^{n}E_j$, 显然 $E_x=\bigcup\limits_{j=1}^{n}E_{jx}$, $E_{jx}\cap E_{ix}=\varnothing$, $i\neq j$．因此

$$\nu(E_x)=\sum_{j=1}^{n}\nu(E_{jx})$$

类似地，$\mu(E^y)=\sum\limits_{j=1}^{n}\mu(E_j^y)$．由积分的线性容易知道 $E\in\boldsymbol{M}$．再根据 $\boldsymbol{P}\subset\boldsymbol{M}$，便得到 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{M}$（因为 $\boldsymbol{R}$ 中的每个集必可表示成 $\boldsymbol{P}$ 中有限个互不相交的集的和）．下面再证 $\boldsymbol{M}$ 是单调类．设 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$ 是 $\boldsymbol{M}$ 中一列单调增加集，记 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$, 由于 $E_{1x}\subset E_{2x}\subset\cdots\subset E_{nx}\subset\cdots$, $E_x=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_{nx}$, 所以 $\nu(E_x)=\lim\limits_{n\to\infty}\nu(E_{nx})$．又因为

$\{\nu(E_{nx}), n=1, 2, \cdots\}$是$(X, \boldsymbol{S}, \mu)$上的可积函数的单调序列，并且

$$\int_X \nu(E_{nx})d\mu \leqslant \int_X \nu(Y)d\mu = \nu(Y)\mu(X) < \infty$$

由 Levi 引理，$\nu(E_x)$是可积函数，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \nu(E_{nx})d\mu = \int_X \nu(E_x)d\mu \tag{5.3}$$

对 $\mu(E^y)$也进行类似讨论，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_Y \mu(E_n^y)d\nu = \int_Y \mu(E^y)d\nu \tag{5.4}$$

从假设$\int_X \nu(E_{nx})d\mu = \int_Y \mu(E_n^y)d\nu$，并根据(5.3)，(5.4)便知

$$\int_X \nu(E_x)d\mu = \int_Y \mu(E^y)d\nu$$

因此 $E\in\boldsymbol{M}$. 类似地，当 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$时，集$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\in \boldsymbol{M}$.

根据第二章§1定理4的系可知$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}\subset\boldsymbol{M}$. 从而$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}=\boldsymbol{M}$. 证毕.

系 设$(X, \boldsymbol{S}, \mu)$、$(Y, \boldsymbol{T}, \nu)$是两个测度空间，$E_0=A_0\times B_0$($A_0\in\boldsymbol{S}$, $B_0\in\boldsymbol{T}$)，而且 $\mu(A_0)<\infty$, $\nu(B_0)<\infty$. 那末，当 $E\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$，而且 $E\subset E_0$ 时，函数 $\nu(E_x)$, $\mu(E^y)$分别是 A_0, B_0 上可测函数①，并且

$$\int_{A_0} \nu(E_x)d\mu = \int_{B_0} \mu(E^y)d\nu \tag{5.2$'$}$$

证 对任何 $A\in\boldsymbol{S}$, $B\in\boldsymbol{T}$，先证等式$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}\cap A\times B=(\boldsymbol{S}\cap A)\times(\boldsymbol{T}\cap B)$.

记$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$ 的可测矩形全体为$\boldsymbol{P}$，$(\boldsymbol{S}\cap A)\times(\boldsymbol{T}\cap B)$的可测矩形全体为$\boldsymbol{Q}$. 因为$\boldsymbol{S}\cap A\subset\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}\cap B\subset\boldsymbol{T}$，显然，当 $E\times F\in\boldsymbol{Q}$ 时，$E\subset A$, $F\subset B$，且 $E\in\boldsymbol{S}$, $F\in\boldsymbol{T}$，所以$E\times F\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}\cap A\times B$，即$\boldsymbol{Q}\subset$

① 如果，$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{T}$是 σ-代数，那末$\mu(E^y)$，$\nu(E_x)$分别是 Y, X 上可测函数.

$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}\cap A\times B$. 但$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}\cap A\times B$是$A\times B$上$\sigma$-代数(第二章§1习题9)所以$(\boldsymbol{S}\cap A)\times(\boldsymbol{T}\cap B)=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Q})\subset\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}\cap A\times B$. 反之，对任何$E\times F\in\boldsymbol{P}$, 因为$(E\times F)\cap(A\times B)=(E\cap A)\times(F\cap B)\in\boldsymbol{Q}$, 所以$\boldsymbol{P}\cap A\times B\subset(\boldsymbol{S}\cap A)\times(\boldsymbol{T}\cap B)$. 记$\boldsymbol{M}$为$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$中一切$M\cap A\times B\in(\boldsymbol{S}\cap A)\times(\boldsymbol{T}\cap B)$的$M$全体，显然$\boldsymbol{M}$是$\sigma$-环，并且$\boldsymbol{M}\supset\boldsymbol{P}$. 所以$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$, 即$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}\cap A\times B\subset(\boldsymbol{S}\cap A)\times(\boldsymbol{T}\cap B)$. 从而$\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}\cap A\times B=(\boldsymbol{S}\cap A)\times(\boldsymbol{T}\cap B)$.

作　$(A_0,\boldsymbol{S}\cap A_0)$、$(B_0,\boldsymbol{T}\cap B_0)$上测度

$$\mu_{A_0}(A)=\mu(A),\ A\in\boldsymbol{S}\cap A_0$$

$$\nu_{B_0}(B)=\nu(B),\ B\in\boldsymbol{T}\cap B_0$$

对$(A_0,\boldsymbol{S}\cap A_0,\mu_{A_0})$、$(B_0,\boldsymbol{T}\cap B_0,\nu_{B_0})$用引理，对任何$E\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}\cap A\times B$, 有

$$\int_{A_0}\nu(E_x)d\mu=\int_{A_0}\nu_{B_0}(E_x)d\mu_{A_0}=\int_{B_0}\mu_{A_0}(E^y)d\nu_{B_0}=\int_{B_0}\mu(E^y)d\nu$$

证毕.

利用引理1及其系，给出乘积测度的定义.

定义　设$(X,\boldsymbol{S},\mu)$, $(Y,\boldsymbol{T},\nu)$是两个σ-有限的测度空间，作乘积可测空间$(X\times Y,\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})$上集函数$\lambda$如下：如果$E\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$而且有矩形$A\times B\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$, $\mu(A)<\infty$, $\nu(B)<\infty$使$E\subset A\times B$时，规定

$$\lambda(E)=\int_A\nu(E_x)d\mu=\int_B\mu(E^y)d\nu \tag{5.5}$$

对一般的$E\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$, 必有一列矩形①$E_n\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$, $E_n=A_n\times B_n$, $\mu(A_n)<\infty$, $\nu(B_n)<\infty$, $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$, 使$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. 这时定义

① 这列矩形的存在性见下面定理3的证明.

$$\lambda(E)=\lim_{n\to\infty}\lambda(E\cap E_n) \tag{5.6}$$

那末 λ 是 $(X\times Y, \boldsymbol{S}\times \boldsymbol{T})$ 上的 σ-有限测度(见定理3)．称它为 μ 和 ν 的**乘积测度**，记为 $\mu\times\nu$.

定理 3　设 $(X, \boldsymbol{S}, \mu)$, $(Y, \boldsymbol{T}, \nu)$ 是 σ-有限测度空间，那末由(5.5)、(5.6)规定的集函数 λ 是 $(X\times Y, \boldsymbol{S}\times \boldsymbol{T})$ 上的 σ-有限测度．而且是在 $(X\times Y, \boldsymbol{S}\times \boldsymbol{T})$ 上满足条件

$$\lambda(A\times B)=\mu(A)\nu(B)①, A\in \boldsymbol{S}, B\in \boldsymbol{T} \tag{5.7}$$

的唯一的 σ-有限测度．

证　分成下面几步：

I．先证唯一性．如果有两个 σ-有限测度 λ、λ' 在 $\boldsymbol{P}$ 上都满足(5.7)，即对一切 $E\in\boldsymbol{P}$, $\lambda(E)=\lambda'(E)$．因为 λ、λ' 都具有可列可加性，所以在 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{P})$ 上 $\lambda=\lambda'$．根据第二章§3 有关 σ 有限测度唯一性定理 8，立即得到 λ 和 λ' 在 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{P}))=\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$ 上一致．

II．在 $\mu(X)<\infty$, $\nu(Y)<\infty$(即 $(X, \boldsymbol{S}, \mu)$、$(Y, \boldsymbol{T}, \nu)$ 都是全有限测度空间)情况下证明 λ 是测度：显然 λ 是 $\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$ 上非负的，今只要证 $\lambda(E)$ 具有可列可加性．设 $F_n\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$, $n=1, 2, \cdots$，而且 $F_n\cap F_{n'}=\varnothing$, $n\neq n'$．记 $E_n=\bigcup_{j=1}^{n}F_j$．由于 $E_{nx}=\bigcup_{j=1}^{n}F_{jx}$ 以及积分的可加性得到

$$\lambda(E_n)=\int_X\nu(E_{nx})d\mu=\int_X\sum_{j=1}^{n}\nu(F_{jx})d\mu=\sum_{j=1}^{n}\lambda(F_j)$$

记 $E=\bigcup_{j=1}^{\infty}F_j$，再根据(5.3)，又得到

$$\lambda(E)=\int_X\nu(E_x)d\mu=\int_X\sum_{j=1}^{\infty}\nu(F_{jx})d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X\sum_{j=1}^{n}\nu(F_{jx})d\mu$$

① 我们讨论的是 σ-有限测度，其实这个等式只要假定对 $\mu(A)<\infty$, $\nu(B)<\infty$ 的矩形满足就可以了．

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda(F_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(F_j)$$

即 λ 是可列可加的.

下面对 μ、ν 为 σ-有限的情况加以证明.

III. 设$E\in \boldsymbol{S}\times \boldsymbol{T}$,并且存在边是测度有限的矩形$A\times B$、$C\times D$,使得 $E\subset A\times B$, $E\subset C\times D$. 那末,对任何$(x,y)\in E$,必有 $x\in A\cap C$, $y\in B\cap D$. 从而 $E\subset A_0\times B_0$,这里 $A_0=A\cap C$, $B_0=B\cap D$. 利用这一点,证明对于这种 E, $\lambda(E)$不依赖 $A\times B$, $C\times D$ 的选取:事实上,因为当 $x\in(A-A_0)\cup(C-A_0)$时,$\nu(E_x)=0$,所以

$$\lambda(E)=\int_A\nu(E_x)d\mu=\int_{A_0}\nu(E_x)d\mu=\int_C\nu(E_x)d\mu$$

同样,

$$\lambda(E)=\int_B\mu(E^y)d\nu=\int_{B_0}\mu(E^y)d\nu=\int_D\mu(E^y)d\nu$$

IV. 证明对任何 $E\in \boldsymbol{S}\times \boldsymbol{T}$,它必包含在边是测度有限的矩形单调序列$\{E_n\}$中.事实上,如果 $E\in \boldsymbol{P}$, $E=A\times B$, $A\in \boldsymbol{S}$, $B\in \boldsymbol{T}$,这时由$(X,\boldsymbol{S},\mu)$, $(Y,\boldsymbol{T},\nu)$的 σ-有限性,必有$\{A_n\}\subset \boldsymbol{S}$, $\mu(A_n)<\infty$, $\{B_n\}\subset \boldsymbol{T}$, $\nu(B_n)<\infty$, 使 $A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, $B\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$. 取$E_n=\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)\times\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i\right)$, 那末$\{E_n\}$便是边是测度有限的矩形单调序列,而且 $E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$. 对于一般的 $E\in \boldsymbol{S}\times \boldsymbol{T}$, 由于 $\boldsymbol{S}\times \boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{P})$, 所以必有 $\boldsymbol{P}$ 中的单调序列$\{F_n\}$,使得 $E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n=\lim\limits_{n\to\infty}F_n$(见第二章§1习题 12). 而每个 F_n,根据前面已经证明,有边是测度有限的矩形

单调序列 $\{E_{nk}\}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{nk} \supset F_n$. 记 $E_{nk}=A_{nk}\times B_{nk}$, 如果取

$$E_n=\left(\bigcup_{i,j=1}^{n} A_{ij}\right)\times\left(\bigcup_{i,j=1}^{n} B_{ij}\right)$$

那末 $\{E_n\}$ 便是边是测度有限的矩形单调序列, 并且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset E$. 这说明定义中的矩形序列确实存在. 容易看出 $\{\lambda(E_n\cap E)\}$ 是单调增加数列, 因此(5.6)中极限存在(可以允许是 ∞).

V. 证极限与矩形序列的选取无关, 事实上, 如果另有一列边是测度有限的矩形单调序列 $\{F_n\}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \supset E$, $F_n=C_n\times D_n$. 记 $\lambda'(E)=\lim_{n\to\infty}\lambda(E\cap F_n)$. 由于 $E\cap F_n=\lim_{m\to\infty}(E\cap E_m)\cap F_n$, 所以

$$\lambda(E\cap F_n)=\lim_{m\to\infty}\lambda(E\cap E_m\cap F_n)\leqslant\lim_{m\to\infty}\lambda(E\cap E_m),$$

即 $\lambda(E\cap F_n)\leqslant\lambda(E)$, 再令 $n\to\infty$ 就得到 $\lambda'(E)\leqslant\lambda(E)$. 如果将 $\{E_n\}$ 和 $\{F_n\}$ 的位置对调就得到 $\lambda(E)\leqslant\lambda'(E)$. 因此(5.6)唯一地确定了 $\lambda(E)$ 的值.

VI. 证 λ 是可列可加的测度. 因为极限具有可加性, 所以通过极限定义的 λ 具有有限可加性. 任取 $\{F_n\}\subset \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$, $F_n\cap F_m=\varnothing\,(n\neq m)$, 记 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 由 λ 的非负、有限可加性(因而有单调性), 显然 $\lambda(E)\geqslant\sum_{1}^{n}\lambda(F_j)$, 令 $n\to\infty$, 得到

$$\lambda(E)\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(F_j)$$

另一方面, 按定义, $\lambda(E)=\lim_{n\to\infty}\lambda(E\cap E_n)$. 然而对每个 n, 由于

$$\lambda(E\cap E_n)=\lambda((E\cap E_n)\cap(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j)\leqslant\lambda(E_n\cap(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j))$$

$$=\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(F_j\cap E_n)\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(F_j\cap E_n)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(F_j)$$

令 $n\to\infty$，又得到 $\lambda(E)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(F_j)$. 因此 $\lambda(E)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(F_j)$，所以 λ 是可列可加的 σ-有限测度．证毕．

以后我们所讨论的乘积测度空间 $(X\times Y,\ \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T},\ \mu\times\nu)$ 都是指由 σ-有限的测度空间 $(X,\boldsymbol{S},\mu)$、$(Y,\boldsymbol{T},\nu)$ 所产生的 σ-有限的乘积测度空间．

下面是非常重要的积分交换顺序定理．

4．富必尼(Fubini)定理　现在讨论重积分和累次积分的关系以及累次积分的交换顺序问题．

设 $(X,\boldsymbol{S},\mu)$，$(Y,\boldsymbol{T},\nu)$ 是两个 σ-有限测度空间，$(X\times Y$ $\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T},\mu\times\nu)$ 是它们的乘积测度空间．假设 $E\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$, $E=A\times B$, $A\in\boldsymbol{S}$, $B\in\boldsymbol{T}$. 又设 f 是定义在 E 上的函数，如果 f 是 E 上关于 $\mu\times\nu$ 是可积的，积分

$$\int_E f(x,y)d\mu\times\nu(x,y)$$

就称做 f 在 E 上的重积分，其实，它不过是测度空间 $(X\times Y,$ $\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T},\mu\times\nu)$ 上的积分．积分号中 $d\mu\times\nu(x,y)$ 常简写为 $d\mu\times\nu$. 积分前特别冠以“重”字是表明它是相对于下面的二次积分（又称累次积分）所讲的．如果存在一个 ν-零集 $B_0\subset B$，当 $y\in B-B_0$ 时，$f^y(x)$ 在 A 上关于 μ 是可积的，记

$$h(y)=\int_A f^y(x)d\mu(x),\ y\in B-B_0 \tag{5.8}$$

如果又存在 B 上的可积（关于 ν）函数 $\tilde{h}(y)$，使得 $\tilde{h}(y)$ 与 $h(y)$ 在 $B-B_0$ 上几乎处处（关于 ν）相等，那末（在多元积分中）就称

$h(y)=\int_A f^y(x)d\mu(x)$ 是 B 上可积函数，并规定 $\int_B h(y)\,d\nu(y)$

$=\int_B \tilde{h}(y)dy$(即不区分 $h(y)$ 和 $\tilde{h}(y)$)，这就是说，

$$\int_B \tilde{h}(y)d\nu(y)=\iint\limits_{BA} fd\mu d\nu=\int_B\left(\int_A f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y) \tag{5.9}$$

积分 $\iint\limits_{BA} fd\mu d\nu$ 称做 f 在 E 上的**二次积分**．类似地定义

$$\iint\limits_{AB} fd\nu d\mu=\int_A\left(\int_B f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) \tag{5.10}$$

它也是 f 在 E 上的二次积分．

显然，这里的重积分和二次积分概念是普通数学分析中的重积分和二次积分概念的一般化．

定理 4 (Fubini) 设 E 是 $(X\times Y, \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}, \mu\times\nu)$ 上的 σ-有限的可测矩形 $E=A\times B$，f 是 E 上的有限函数．

(i) 当 f 是 E 上关于 $\mu\times\nu$ 可积函数时，那末 f 在 E 上的两个二次积分(5.9)、(5.10)存在，并且

$$\int\limits_E fd\mu\times\nu=\iint\limits_{AB} fd\nu d\mu=\iint\limits_{BA} fd\mu d\nu \tag{5.11}$$

(ii) 反之，如果 f 是 E 上关于 $(X\times Y, \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})$ 可测函数，而且 $|f|$ 的两个二次积分 $\iint\limits_{AB}|f|d\nu d\mu$，$\iint\limits_{BA}|f|d\mu d\nu$ 中有一个存在，那末它的另一个二次积分以及二重积分 $\int_E fd\mu\times\nu$ 也存在，并且(5.11)成立．

证 先对 $\mu(A)<\infty$，$\nu(B)<\infty$ 的情况来加以证明，并且不妨假设 $A=X$，$B=Y$．不然考虑 $(A, \boldsymbol{S}\cap A, \mu_A)$、$(B, \boldsymbol{T}\cap B, \nu_B)$ 的乘积空间 $(A\times B, (\boldsymbol{S}\cap A)\times(\boldsymbol{T}\cap B), \mu_A\times\nu_B)$ 就可以了，其中 μ_A、ν_B 是把 μ、ν 分别限制在 A、B 上的测度(见引理 1 的系)．

(i) 第一步，假设 f 是 $(X\times Y,\ \mathbf{S}\times\mathbf{T})$ 上某个可测集 E 的特征函数 χ_E. 根据 $\mu\times\nu$ 的定义，显然

$$\int_{X\times Y}\chi_E d\mu\times\nu=\mu\times\nu(E)=\int_X\nu(E_x)d\mu=\iint\limits_{X\,Y}\chi_{E_x}(y)d\nu(y)d\mu(x)$$

$$=\iint\limits_{X\,Y}\chi_E(x,y)d\nu(y)d\mu(x) \qquad (5.12)$$

同样可证 χ_E 的重积分等于另一个二次积分.

第二步，假设 f 是 $(X\times Y,\mathbf{S}\times\mathbf{T},\mu\times\nu)$ 上非负的可积函数. 这时，对任何自然数 k，记 $Z=X\times Y$，$E_{kn}=Z\left(\frac{n-1}{2^k}\leqslant f<\frac{n}{2^k}\right)$，$n=1,2,\cdots,2^{2k}$. 显然 $\varphi_k=\sum\limits_n\frac{n-1}{2^k}\chi_{E_{kn}}$ 是一列非负的有界函数，而且 $\varphi_k\leqslant\varphi_{k+1}$，$k=1,2,\cdots$，$\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x,y)=f(x,y)$. 由 Levi 引理

$$\int_{X\times Y}fd\mu\times\nu=\lim_{k\to\infty}\int_{X\times Y}\varphi_k d\mu\times\nu \qquad (5.13)$$

利用(5.12)和积分的线性，知道当 x 固定时，$\varphi_{kx}(y)=\varphi_k(x,y)$ 是 $(Y,\mathbf{T},\nu)$ 上可积函数，$\psi_k(x)=\int\varphi_k(x,y)d\nu(y)$ 是 $(X,\mathbf{S},\mu)$ 上可积函数，而且

$$\int_{X\times Y}\varphi_k d\mu\times\nu=\int_X\left(\int_Y\varphi_k d\nu\right)d\mu=\int_X\psi_k d\mu \qquad (5.14)$$

由于 $\{\psi_k\}$ 是非负、有界函数的单调增加序列，而且由(5.13)，(5.14)又有

$$\lim_{k\to\infty}\int_X\psi_k d\mu=\int_{X\times Y}fd\mu\times\nu$$

由Levi引理，$\{\psi_k(x)\}$(关于 μ)几乎处处收敛于可积函数 $\psi(x)$，而且

$$\int_X\psi d\mu=\int_{X\times Y}fd\mu\times\nu \qquad (5.15)$$

设 $E=X(\psi(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\psi_k(x)<\infty)$，固定 $x\in E$ 时，$\varphi_{kx}=\varphi_k(x,y)$，

$k=1,2,\cdots$是$(Y,\mathbf{T},\nu)$上非负、可积函数的单调增加序列，并且$\int_Y\varphi_{kx}(y)d\nu(y)=\psi_k(x)$，$k=1,2,\cdots$，有上确界$\psi(x)<\infty$，因此再由 Levi 引理知道$\{\varphi_{kx}(y)\}$的极限函数$f_x(y)=f(x,y)$是$(Y,\mathbf{T},\nu)$上可积函数，而且

$$\int f(x,y)d\nu(y)=\lim_{k\to\infty}\int\varphi_k(x,y)d\nu(y)=\psi(x)$$

所以$\int f(x,y)d\nu(y)$几乎处处等于$(X,\mathbf{S},\mu)$上可积函数$\psi(x)$，而且由(5.15)得到

$$\int_{X\times Y}fd\mu\times\nu=\int_X\left(\int_Y fd\nu\right)d\mu \tag{5.16}$$

第三步，假设f是一般可积函数．这时只要对f^+,f^-分别讨论，因为$\int_Y f^+(x,y)d\nu(y)$，$\int_Y f^-(x,y)d\nu(y)$都是$(X,\mathbf{S},\mu)$上的可积函数，而且相应地(5.16)成立．再利用积分(重积分和二次积分)的线性，从$f=f^+-f^-$便得到(5.16)对一般的f也成立．

同样，可以证明$\int_X f(x,y)d\mu(x)$是$(Y,\mathbf{T},\nu)$上可积函数，而且

$$\int_{X\times Y}fd\mu\times\nu=\int_Y\left(\int_X fd\mu\right)d\nu$$

(ii) (注意，也假设$\mu(x)<\infty$，$\nu(Y)<\infty$) 如果非负二元可测函数f的一个二次积分——例如$\int_Y\left(\int_X fd\mu\right)d\nu$存在，这时，对任何自然数$N$，作$[f]_N=\min(N,f)$，它便是有界的二元可测函数，由于$\mu\times\nu(X\times Y)<\infty$，所以它的重积分存在．由(i)及$[f]_N\leqslant f$便得到

$$\int_{X\times Y}[f]_Nd\mu\times\nu=\int_Y\left(\int_X[f]_Nd\mu\right)d\nu\leqslant\int_Y\int_X fd\mu d\nu \tag{5.17}$$

由(5.17)，$\{[f]_N\}$的重积分序列有上界．对二元函数列$\{[f]_N\}$

应用 Levi 引理，便得到$[f]_N(x, y)$的极限函数 $f(x, y)$的重积分存在. 再由(i)，另一个二次积分$\int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)$也就存在了，并且二次积分等于重积分.

对于一般的二元可积函数 f，分成 f^+，f^- 来讨论就行了. 这样，在 $\mu(x)<\infty$, $\nu(Y)<\infty$情况下证明了(ii).

对于一般情况，即对于 $E=A\times B$ 是 σ-有限的情况. 容易知道，存在$\{A_n\}\subset \boldsymbol{S}$, $\{B_n\}\subset \boldsymbol{T}$, $\mu(A_n)<\infty$, $\nu(B_n)<\infty$, 且 $A_i\cap A_j=\varnothing$, $B_i\cap B_j=\varnothing(i\neq j)$, $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A$, $\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i=B$. 因此$E=\bigcup_{i,j}A_i\times B_j$ (图 3.8)，并且 $A_i\times B_j\cap A_k\times B_l=\varnothing$，只要 $i\neq k$, $j\neq l$ 中有一个

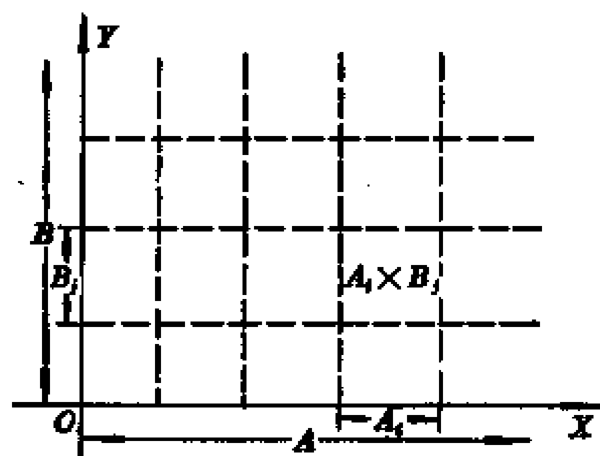


图 3.8

成立. 在每个 $A_i\times B_j$ 上定理的结论已成立. 再利用积分(重积分和二次积分中的每次积分)的可列可加性不难证明定理的结论在 E 上也成立. 希望读者自己完成这部分证明.

系 设 E 是$(X\times Y, \boldsymbol{S}\times \boldsymbol{T}, \mu\times\nu)$的 $\mu\times\nu$-零集，那末对几乎所有的 x，截口 E_x 是$(Y, \boldsymbol{T}, \nu)$上的零集. 对几乎所有的 y，截口 E^y 是$(X, \boldsymbol{S}, \mu)$上的零集.

证 由于 $E\in\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T}$，所以必有可测矩形 $A\times B$，使得 $E\subset A\times B$，并且 A, B 分别是 μ, ν 的 σ- 有限集. 又由于 E 是零集，所以它

的特征函数 $\chi_E(x,y)$ 在 $A\times B$ 上的重积分为零，由 Fubini 定理和 $\nu(E_x)=\int_B \chi_E(x,y)d\nu(y)$，$\mu(E^y)=\int_A \chi_E(x,y)d\mu(y)$ 得到

$$0=\mu\times\nu(E)=\int_A \nu(E_x)d\mu(x)=\int_B \mu(E^y)d\nu(y)$$

因为被积函数 $\nu(E_x)$、$\mu(E^y)$ 是非负的，所以 $\mu\times\nu(E)=0$ 的充要条件是 $\nu(E_x)$ 关于 μ 几乎处处为零或者 $\mu(E^y)$ 关于 ν 几乎处处为零。证毕。

显然，Fubini 定理可以推广到多个测度空间 (X_i, S_i, μ_i) $i=1,2,\cdots,k$ 的乘积测度空间 $(X_1\times\cdots\times X_k, S_1\times\cdots\times S_k, \mu_1\times\cdots\times\mu_k)$ 的情况，这里不再讨论。

此外，读者还必须注意，Fubini 定理中(ii)的假设：f 的绝对值函数 $|f|$ 是二次可积，这个条件是不能换为仅仅 f 的二次积分存在这个条件的(可看下面的例1)。甚至 f 的两个二次积分均存在，并且两个二次积分的值也相等，也不能断言 f 的重积分是存在的。

例 1 设 $E=[-1,1]\times[-1,1]$，μ,ν 都取为勒贝格测度。作

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

容易知道 $f(x,y)$ 是 E 上勒贝格(二重)可测的。如果将两个变量 x,y 中的一个固定，$f(x,y)$ 是另一个变量的连续函数，所以积分

$$\int_{-1}^{1}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dy,\quad \int_{-1}^{1}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dx$$

存在，由于被积函数是奇的，所以上面积分都为零。由此得到

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx=0$$

但 $f(x,y)$ 在 E 上并不是勒贝格可积的。不然的话，由 f 在 E 上可积性，便得到 f 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上也应该可积，于是二次积分

$$\int_0^1\left(\int_0^1\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx$$

就应该存在. 但这是不对的,因为当 $x\neq 0$ 时,

$$\int_0^1\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dy=\frac{1}{2x}-\frac{x}{2(x^2+1)}$$

它在[0, 1]上不是勒贝格可积函数.

例 2 设$(N, \boldsymbol{R}, \mu)$是 § 4 例 8 中的测度空间, 那末$(N\times N, \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}, \mu\times\mu)$上任何函数 f 必是可测, 而 f 可积的充要条件是

$$\sum_{(i,j)\in N\times N}|f(i,j)|<\infty$$

当 f 可积时, 有

$$\int_{N\times N} f d\mu\times\mu=\sum_{i,j=1}^{\infty}f(i,j) \tag{5.18}$$

证 因为 $\boldsymbol{R}$ 是 N 的一切子集所组成的 σ- 代数, 易知 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 是 $N\times N$ 的一切子集所组成的 σ-代数, 所以任何函数 $f(m,n)$必是可测的.

如果取 $E_n=[1,2,\cdots,n]$, 易知 $E_n\times E_n$ $n=1,2,\cdots$是 $N\times N$ 的测度有限的单调覆盖, 仿 § 4 例 7 易知

$$\begin{aligned}\int_{E_n\times E_n} f^+ d\mu\times\mu &=\sum_{i,j=1}^{n}f^+(i,j)\\ \int_{E_n\times E_n} f^- d\mu\times\mu &=\sum_{i,j=1}^{n}f^-(i,j)\end{aligned} \tag{5.19}$$

其中 $f^+(i,j)=\max(f(i,j),0)f^-(i,j)=\max(-f(i,j),0)$. 所以 f 在 $N\times N$ 上可积等价于$\sum\limits_{i,j=1}^{\infty}f^+(i,j)$, $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty}f^-(i,j)$都收敛, 即等价于

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}|f(i,j)|<\infty$$

当 f 可积时，在(5.19)中令 $n\to\infty$ 便得到(5,18)。

显然，如果作下面的对应：

$$f\leftrightarrow\{f(i,j)\mid i,j=1,2,\cdots\}$$

那末 f 在 $(N\times N,\ \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R},\ \mu\times\mu)$ 上的可积性等价于二重级数 $\sum\limits_{i,j}f(i,j)$ 的绝对收敛性，并且 f 在 $N\times N$ 上的积分就是二重级数 $\sum\limits_{i,j}f(i,j)$ 的和。

在上述对应之下，由 Fubini 定理立即可以得到二重级数求和的如下命题。

如果二重级数 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}x_{m,n}$ 绝对收敛，那末级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|x_{m,n}|、\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|x_{m,n}|$$

都收敛，并且

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}x_{m,n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}x_{m,n}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}x_{m,n}\tag{5.20}$$

反之，如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}|x_{m,n}|$、$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_{m,n}|$ 中有一个收敛，那末二重级数 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}x_{m,n}$ 必绝对收敛，自然(5.20)就成立。

这里所谓二重级数绝对收敛，就是指级数 $\sum\limits_{m,n=1}^{k}|x_{m,n}|$ 当 $k\to\infty$ 时有极限。

如果从积分的观点看二重级数的绝对收敛性还可以得到下面的命题。

设 $\{E_k\mid k=1,2,\cdots\}$ 是 $N\times N$ 中任何一个集的单调序列，并且 $N\times N=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，那末，绝对收敛的二重级数 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}x_{m,n}$ 的

$\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{(m,n)\in E_k}|x_{m,n}|$不依赖于$\{E_k\}$的选取。

因此，二重级数的绝对收敛定义，可以从任何一个满足$N\times N=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$的单调序列$\{E_k\}$出发．显然一个绝对收敛的二重级数$\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}x_{m,n}$的和$A$也是不依赖$\{E_k\}$的选取的，即

$$A=\lim_{k\to\infty}\sum_{(m,n)\in E_k}x_{m,n}$$

例如，当取$E_k=[1,2,\cdots,k]\times[1,2,\cdots,k]$时，称为二重级数的正方形求和法；当取$E_k=\{(m,n)\mid m^2+n^2\leqslant k^2\}$时，称为圆形求和法；当取

$$E_k=\{(m,n)\mid m+n\leqslant k\}$$

时，称为三角形求和法等等．

5. 乘积测度的完全性 我们注意，即使$(X,\mathbf{S},\mu)$、$(Y,\mathbf{T},\nu)$都是完全测度空间，但是$(X\times Y,\mathbf{S}\times\mathbf{T},\mu\times\nu)$未必是完全的．

例如，在二重勒贝格测度空间$(E^1\times E^1,\mathbf{L}\times\mathbf{L},m\times m)$上取集$A\times E$，其中$A$是$[0,1]$中勒贝格测度为零的集，$E$是$[0,1]$中勒贝格不可测集．显然$A\times E\subset A\times[0,1]\in\mathbf{L}\times\mathbf{L}$，即$A\times E$是零集$A\times[0,1]$的子集．但是当$x\in A$时，$S_x(A\times E)=E$，即集$A\times E$存在不可测的截口，所以$A\times E\overline{\in}\mathbf{L}\times\mathbf{L}$．在第二章§4中所讲的平面勒贝格测度，却是完全测度．所以二重勒贝格测度$m\times m$和平面勒贝格测度之间是有差别的．又显然这两个测度在$\mathbf{L}\times\mathbf{L}$的每个集上是一致的．

这两个测度的差别就是在于一个是完全的，另一个是不完全的．将乘积测度完全化以后，就是平面勒贝格测度了．

一般说来，$(X\times Y,\mathbf{S}\times\mathbf{T},\mu\times\nu)$并不完全．我们可以仿照第

二章§3的方法把它扩张成完全测度. 记扩张后的可测集全体为$(S\times T)^*$, 而把扩张后的测度仍记为$\mu\times\nu$, 这时$(X\times Y, (S\times T)^*, \mu\times\nu)$就是完全的测度空间.

定理 5 设(X,S,μ)、(Y,T,ν)都是σ-有限的完全测度空间, 如果$E\in(S\times T)^*$, 那末, (关于μ)几乎所有的$x\in X$, 截口$E_x\in T$. 同样, (关于ν)几乎所有的y, 截口$E^y\in S$.

证 (1) 先设$\mu\times\nu(E)=0$. 由于$S(S\times T)=S\times T$, 根据第二章§3定理4, 必有$A\in S\times T$, 使得$\mu\times\nu(A)=0$, 而且$E\subset A$. 由于$E\subset A$, $E_x\subset A_x$. 从$\mu\times\nu(A)=0$, 根据定理4的系就得到(关于μ)几乎所有的$x\in X$, 截口A_x的ν测度为零. 但是ν是完全的, 所以$E_x\in T$. 同样地(关于ν)几乎所有$y\in Y$, $E^y\in S$.

(2) 对一般的$E\in(S\times T)^*$, 根据第二章§3定理4, 必有$B\in S\times T$, 使得$E\subset B$, $\mu\times\nu(B-E)=0$. 这时$A=B-E\in(S\times T)^*$, 而且$\mu\times\nu(A)=0$. 由(1), 对几乎所有$x\in X$, $A_x\in T$, 但是$B\in S\times T$, 所以对一切x, $B_x\in T$. 由于$E=B-A$, 所以$E_x=B_x-A_x$, 因此对几乎所有x, $E_x\in T$.

y-截口的情况完全类似. 证毕.

系 设(X,S,μ)、(Y,T,ν)是两个σ-有限的测度空间, $f(x,y)$是$(X\times Y, (S\times T)^*, \mu\times\nu)$上的$E$上可测函数, 那末(关于$\mu$)几乎所有的$x$, 截口$f_x$是$E_x$上可测函数, 同样(关于$\nu$)几乎所有的$y$, 截口$f^y$是$(E^y)$上可测函数.

证 (i) 先设f是E的某个可测子集E_1的特征函数: 由定理5, 存在μ-零集A_0, 当$x\overline{\in}A_0$时, E_x是(Y,T)上的可测集, 又存在μ-零集A_1, 当$x\overline{\in}A_1$时, E_{1x}是(Y, T)上的可测集. 对于$x\overline{\in}A_0\cup A_1$($\mu$-零集), 因为$f_x(y)=f(x,y)$是可测集$E_{1x}$的特征函数, 因而是可测集$E_x$上的可测函数.

同样可证除去一个ν-零集, $f^y(x)=f(x, y)$是E^y上的可测

函数.

(ii) 由(i)易知,当 f 是 E 的某些可测子集 $E_1, \cdots, E_n$ 的特征函数线性组合函数时,系成立.

(iii) 对 E 上一般可测函数 f, 必存在 E 的可测子集的特征函数线性组合的序列$\{f_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$(处处收敛). 对每个 n, 由(ii), 存在 μ-零集 A_n, 当 $x \overline{\in} A_n$ 时, $f_{nx}(y) = f_n(x, y)$是 E_x 上可测函数. 因而当 $x \overline{\in} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$($\mu$-零集), E_x 上可测函数列$\{f_{nx}\}$处处收敛于 f_x,因此 f_x 是 E_x 上可测函数. 同样可证对几乎所有 y, f^y 是 E^y 上可测函数. 证毕.

由此立即得到

定理 4′ (Fubini) 将定理 4 中$(X\times Y, \boldsymbol{S}\times \boldsymbol{T}, \mu\times\nu)$换为完全测度空间$(X\times Y, (\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{T})^*, \mu\times\nu)$, 其余假设不变时, 定理 4 的结论都成立.

6. 平面上勒贝格-斯蒂阶测度和积分 设 g_1、g_2 都是直线上单调增加右连续函数, X、Y 分别表示平面上的 x-轴和 y-轴. 按第二章 §4 和本章 §3, 易知$(X, \boldsymbol{L}^{g_1}, g_1)$、$(Y, \boldsymbol{L}^{g_2}, g_2)$不仅是两个完全测度空间, 而且可在它们上面建立积分. 如再按本节中第 1-4 小节的办法, 那末就可引入$(X\times Y, \boldsymbol{L}^{g_1}\times\boldsymbol{L}^{g_2}, g_1\times g_2)$(通常称做**乘积勒贝格-斯蒂阶测度空间**)及其上积分, 并有相应的结论. 再按本节第 5 小节就得到$(X\times Y, (\boldsymbol{L}^{g_1}\times\boldsymbol{L}^{g_2})^*, g_1\times g_2)$(通常称做**完全的乘积勒贝格-斯蒂阶测度空间**). 一般说来, 自然有$\boldsymbol{L}^{g_1}\times\boldsymbol{L}^{g_2} \neq (\boldsymbol{L}^{g_1}\times\boldsymbol{L}^{g_2})^*$.

特别, 当 g_1、g_2 都是直线上勒贝格测度(即 $g_1(x) = x$, $g_2(y) = y$)时, 相应地称$(X\times Y, \boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L}, m\times m)$、$(X\times Y, (\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L})^*, m\times m)$为**乘积勒贝格测度空间**和**完全的乘积勒贝格测度空间**. 容

易证明$(X\times Y,\ (\mathbf{L}\times\mathbf{L})^*,\ m\times m)$就是第二章§4的第6小节中($n=2$的情况)所介绍的平面$R_0$类上勒贝格测度，再经Carathe-odory条件扩张后所得到的完全测度空间.

另外，就平面上勒贝格-斯蒂阶积分而言，除了上述建立在乘积勒贝格-斯蒂阶测度空间基础上的积分外，还有一种更一般的勒贝格-斯蒂阶积分：

设$\psi(x,y)$是二元函数，固定一个变元，是另一个变元的右连续函数，并且对平面上任意有限矩形$E=(a,b]\times(c,d]$满足

$$\Delta=\psi(b,d)-\psi(b,c)-\psi(a,d)+\psi(a,b)\geqslant 0$$

如规定$\psi(E)=\Delta$，可仿直线情况证明(当然要用平面开覆盖定理)，$\psi(E)$是平面上环R_0上的测度ψ，因而由第二章测度延拓定理又可得平面的完全测度空间(E^2,R^*,ψ)其中$E^2=X\times Y$.

特别，当$\psi(x,\ y)=g_1(x)g_2(y)$时，$(E^2,\ R^*,\ \psi)=(X\times Y,\ (\mathbf{L}^{g_1}\times\mathbf{L}^{g_2})^*,\ g_1\times g_2)$. 但必须注意，对一般的$\psi(x,y)$，在$(E^2,\ R^*,\psi)$上没有累次积分概念，因而不存在Fubini定理.

习　题

1. 证明矩形满足下面性质：

(i) 矩形E是空集的充要条件是它的边至少有一个是空集.

(ii) 如果$E_i=A_i\times B_i\,(i=1,2)$都是非空矩形，那末$E_1\subset E_2$的充要条件是$A_1\subset A_2$, $B_1\subset B_2$. 特别，$E_1=E_2$的充要条件是$A_1=A_2$, $B_1=B_2$.

(iii) 如果$E=A\times B$, $E_i=A_i\times B_i\,(i=1,2)$都是非空矩形，那末$E=E_1\cup E_2$而且$E_1\cap E_2=\varnothing$的充要条件是下面两个情况之一必然发生：1°. $A=A_1\cup A_2$, $A_1\cap A_2=\varnothing$, 且$B=B_1=B_2$; 2°. $B=B_1\cup B_2$, $B_1\cap B_2=\varnothing$, 且$A=A_1=A_2$.

2. 证明定理2的证明中所列"截口"运算的性质(i), (ii).

3. 设A是直线上勒贝格可测集，证明平面$E^1\times E^1$上的集$E=\{(x,y)\mid x-y\in A\}$是$(E^1\times E^1,(\mathbf{L}\times\mathbf{L})^*,\ m\times m)$的可测集. 特别当$m(A)=0$时，那末$m\times m(E)=0$.

4. 证明：将习题3中集E换为$E_1=\{(x,\ y)\mid x-\alpha y\in A\}$($\alpha$是常数)时，

习题 3 的结论仍成立. 如果将勒贝格测度换为直线上一般测度时如何? 为什么?

5. 当 f, h 是直线上勒贝格可积函数时, 证明函数

$$(f*h)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)h(x)dx$$

是 $(-\infty, \infty)$ 上勒贝格可积函数, 并且 $\widetilde{f*h}=\tilde{f}\cdot\tilde{h}$. 又如果当 f, h 中有一个是有界(不一定可积), 另一个可积, 那末 $(f*h)(t)$ 是 t 的连续函数.

又问, 如果将勒贝格测度换为一般测度, 上述结论是否成立? 为什么?

6. 如果 $f(s, t)$ 是有限矩形 $[a, b]\times[c, d]$ 上的勒贝格可积函数. 证明必可用(i)平面上阶梯函数[①], (ii)平面上多项式, (iii)平面上三角多项式按积分逼近, 即对任何 $\varepsilon>0$ 必有上述三类函数中的每一个类中的一个函数 φ, 使得

$$\int_c^d\int_a^b |f-\varphi|\,dxdy<\varepsilon$$

7. 设 P 是平面上左下开右上闭矩形全体, $R_0=S(P)$, $S(P)$ 称为平面 Borel 集. 证明, 平面上开圆、闭圆、三角形、开平行四边形、可列集、扇形等均为 Borel 集.

8. 用本章 §2 习题 15 来证明定理 5 的系.

9. 设 $k(x, y)$ 是按平面勒贝格测度在 $[0, 1]\times[0, 1]$ 上的可积函数, 固定 y, $k(x, y)$ 是 x 的连续函数, 问函数

$$\varphi(y)=\int_0^1 k(x, y)dx$$

是否是 $[0, 1]$ 上连续函数?

10. 习题 6 对于无限矩形是否正确?

11. 习题 6 如何推广到两个勒贝格-斯蒂阶测度的乘积测度的情况?

12. 证明 $(E^1\times E^1, (L\times L)^*, m\times m)$ 就是第二章 §1 第 6 小节中 ($n=2$ 的情况) 所引入的平面 R_0 上勒贝格测度按 Carathérdory 条件扩张所得的平面上完全测度空间.

13. 设 ψ 是 $E^1\times E^1$ 上二元函数, 固定一个变元时, 它是另一个变元的右连续函数, 并且对平面上任何有限矩形 $E=(a, b]\times(c, d]$, 满足

---

① 在有限个有限矩形上分别为常数.

$$\Delta=\psi(b,d)-\psi(b,c)-\psi(a,d)+\psi(a,b)\geqslant 0$$

证明，当规定 $\psi(E)=\Delta$ 时，$\psi(E)$ 是 $\boldsymbol{R}_0$ 上测度。

§6 单调函数与有界变差函数

在这一节中我们将讨论两个密切相关的函数类——单调函数类及有界变差函数类．一方面是由于经常用到它们，同时也是为§7讨论积分与微分的牛顿-莱布尼兹公式做准备．下面将从连续性、可微性以及可积性方面来讨论这两个函数类．

1. 单调函数 单调函数是一类重要函数，在第二章测度论中我们就用过它了．

定义 设 f 是定义在实直线 E^1 中点集 A 上的有限函数，如果对 A 中的任何两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，不等式

$$f(x_1)\leqslant f(x_2) \tag{6.1}$$

成立．就称 f 是 A 上的**单调增加函数**．如果 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立，就称 f 是 A 上**严格单调增加函数**．如果当 $x_1<x_2$ 时，不等式

$$f(x_1)\geqslant f(x_2) \tag{6.2}$$

成立，就称 f 是 A 上的**单调下降函数**．类似有**严格单调下降函数**的概念．单调增加或单调下降的函数，统称为**单调函数**．

和数学分析中一样，对任一函数(不必单调)f，如果 f 在 x_0 点的右方极限 $f(x_0+0)$ 存在，就称 $f(x_0+0)-f(x_0)$ 为 f 在 x_0 点的**右方跳跃度**，类似地定义**左方跳跃度**．如果右(左)方跳跃度为0，称 f 在 x_0 点右(左)方连续．又称 x_0 为 f 的右(左)连续点．如果 $f(x_0+0)$，$f(x_0-0)$ 都存在，但 $f(x_0+0)$，$f(x_0-0)$，$f(x_0)$ 不全相等，就称 x_0 是 f 的**第一类不连续点**．如果 f 的一个不连续点不是第一类的，就称为**第二类不连续点**．

下面是有关单调函数连续性的定理．

定理1 设 f 是 $[a,b]$ 上单调增加函数，那末

1° f 的不连续点全是第一类不连续点；

2° f 的不连续点全体最多是可列集；

3° f 在不连续点的左、右方跳跃度都是非负的，并且所有跳跃度的总和不超过 $f(b)-f(a)$.

证 1° 对$[a,b)$中任何点 x_0，证明 $f(x_0+0)$存在：因为 $x_0\in[a,b)$，所以总存在自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，$x_0+\frac{1}{n}\in[a,b)$，由函数单调性，便知道$\{f(x_0+\frac{1}{n})\}$是单调下降数列，并且有下界$\left(例如 f(x_0+\frac{1}{n})\geqslant f(x_0)\right)$，因而有极限，记它为 τ，显然 $\tau\geqslant f(x_0)$. 现在来证明 τ 就是 $f(x_0+0)$. 事实上，对任何 $\varepsilon>0$，必存在 N_0，使得

$$0\leqslant f(x_0+\frac{1}{N_0})-\tau<\varepsilon$$

因此对任何 $x\in(x_0,x_0+\frac{1}{N_0})$，

$$0\leqslant f(x)-\tau\leqslant f(x_0+\frac{1}{N_0})-\tau<\varepsilon$$

这就是说 $f(x_0+0)=\tau$.

类似可以证明，对任何 $x_0\in(a,b]$，$f(x_0-0)$存在.

2° 从 1° 的证明中可以看出 $f(x-0)\leqslant f(x)\leqslant f(x+0)$对$(a,b)$中一切 x 成立，而 $f(a)\leqslant f(a+0)$，$f(b-0)\leqslant f(b)$成立. 所以对$[a,b]$上任何一点，它的左、右方跳跃度总是非负的. 记 f 的不连续点全体为 E. 设 $c>0$，$E_c=E(f(x+0)-f(x-0)\geqslant c)$. 现在来证明 E_c 是有限集：任取 E_c 中 p 个点 $x_1,\cdots,x_p$，不妨设

$$a\leqslant x_1<\cdots<x_p\leqslant b \tag{6.3}$$

再取分点$\{\xi_i\}$，使得 $x_i<\xi_i<x_{i+1}$，$i=1,2,\cdots,p-1$，$\xi_0=a$，$\xi_p=b$. 由函数 f 的单调性和 $\xi_{i-1}<x_i<\xi_i$，显然有 $f(\xi_{i-1})\leqslant f(x_i-0)\leqslant$

$f(x_i+0)\leqslant f(\xi_i)$，所以

$$f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})\geqslant f(x_i+0)-f(x_i-0) \qquad (6.4)$$

于是

$$cp\leqslant\sum_1^p(f(x_i+0)-f(x_i-0))\leqslant\sum_1^p(f(\xi_i)-f(\xi_{i-1}))$$

$$=f(\xi_p)-f(\xi_0)=f(b)-f(a)$$

因此 $p\leqslant\frac{1}{c}(f(b)-f(a))$，所以 E_c 中点的个数必是有限的. 又因为对任何 $x\in E$，必存在自然数 n，使得 $f(x+0)-f(x-0)\geqslant\frac{1}{n}$. 所以 $x\in E_{\frac{1}{n}}$，这就是说 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{\frac{1}{n}}$ 是可列个有限集的和集，因此，E 最多是可列集.

3° 将 E 中点全部编号成 $\{u_n\}$，对任何自然数 p，将 $u_1,\cdots,u_p$ 按大小顺序排列，并改记为 $x_1,\cdots,x_p$，和(6.3)，(6.4)一样，得到

$$\sum_{i=1}^{p}[f(u_i+0)-f(u_i-0)]=\sum_{i=1}^{p}[f(x_i+0)-f(x_i-0)]$$

$$\leqslant f(b)-f(a)$$

再令 $p\to\infty$，就得到跳跃度的总和

$$\sum_{x_i\in E}[f(x_i+0)-f(x_i-0)]\leqslant f(b)-f(a)$$

证毕.

关于单调函数的可积性，有如下定理.

定理 2 设 f 是 $[a,b]$ 上单调增加函数，那末，f 在 $[a,b]$ 上必是黎曼可积函数.

证 因为 f 的不连续点全体是可列集，因而是勒贝格测度的零集，根据黎曼可积的充要条件(参见§4定理 2)便知道 f 是黎曼可积的. 证毕.

系　设 f 是$[a, b]$上的单调增加函数，那末 f 是勒贝格可积函数.

对于单调下降函数也有类似结果，这里不再复述了.

2. 单调增加的跳跃函数　为了更好地描述单调函数的不连续点的情况，我们引入一种典型的不连续的单调函数——跳跃函数.

Heaviside 函数 $\theta(x)$

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

这个函数在 $x=0$ 点是左方连续的，但并不是右方连续的，在 $x=0$ 点的右方跳跃度为 1（图 3.9(1)）.

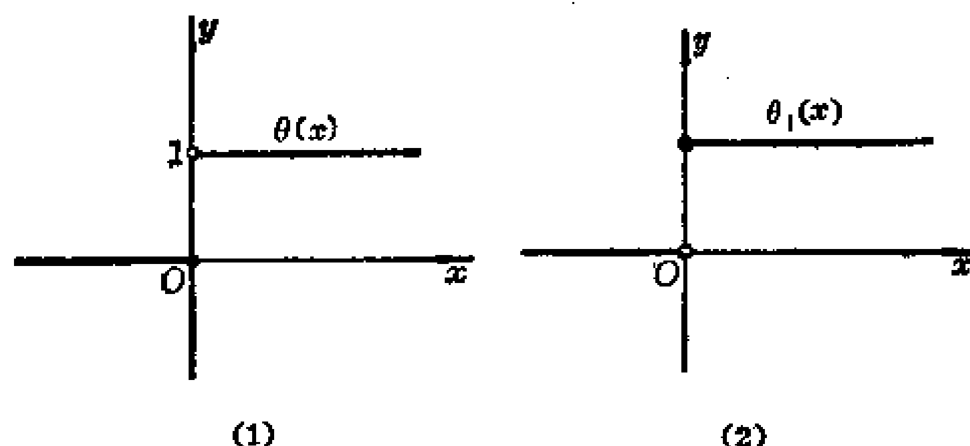


图 3.9

另作函数

$$\theta_1(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$\theta_1(x)$在 $x=0$ 点是右方连续的，而不是左方连续的，左方跳跃度也是 1(图 3.9(2)). 这两个函数适合关系：

$$\theta_1(x)=1-\theta(-x)$$

定义　设$\{\lambda_n | n=1, 2, \cdots, p\}$，$\{\mu_n | n=1, 2, \cdots, p\}$是两个给定的数组，其中 p 是有限的或是无限的(当 $p=\infty$ 时，$\{\lambda_n\}$、$\{\mu_n\}$ 表

示数列)，而且$\sum_{n=1}^{p}(|\lambda_n|+|\mu_n|)<\infty$. 又设$\{x_n|n=1,2,\cdots,p\}$是在$[a,b]$中给定的$p$个点，称由函数项级数所表示的函数

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{p}\lambda_n\theta(x-x_n)+\sum_{n=1}^{p}\mu_n\theta_1(x-x_n) \tag{6.5}$$

为**跳跃函数**.

容易看出，级数(6.5)是一致收敛的. 特别，如果$\lambda_n\geqslant 0$, $\mu_n\geqslant 0$, $n=1,2,\cdots,p$, 由于级数中每项都是单调增加函数，所以$\varphi(x)$也是单调增加函数.

一般地，若对任何数a，记$a^+=\max(a,0)$, $a^-=\max(-a,0)$，那末$a=a^+-a^-$. 对给定的级数(6.5)，作

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{p}\lambda_n^+\theta(x-x_n)+\sum_{n=1}^{p}\mu_n^+\theta_1(x-x_n)$$

$$\varphi_2(x)=\sum_{n=1}^{p}\lambda_n^-\theta(x-x_n)+\sum_{n=1}^{p}\mu_n^-\theta_1(x-x_n)$$

那末，φ_1、φ_2都是单调增加函数，而且$\varphi=\varphi_1-\varphi_2$. 也就是说，任何一个跳跃函数$\varphi$总可以表示成两个增加的跳跃函数的差.

定理3 设$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{p}\lambda_n\theta(x-x_n)+\sum_{n=1}^{p}\mu_n\theta_1(x-x_n)$是$[a,b]$的上跳跃函数. 如果$|\lambda_n|+|\mu_n|\neq 0$ $(n=1,2,\cdots,p)$，那末

1° φ的不连续点全体$E=\{x_n|n=1,2,\cdots,p\}$;

2° 每个x_n都是φ的第一类不连续点，并且φ在x_n的右方跳跃度是λ_n，左方跳跃度是μ_n.

证 整个证明的关键是证：当$x\neq x_n$, $n=1,2,\cdots,p$时，x必是φ的连续点. 这一点证明如下：当$p<\infty$时是显然的. 不妨设$p=\infty$.

记 $\varphi_N=\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\theta(x-x_n)+\sum_{n=1}^{N}\mu_n\theta_1(x-x_n)$, $N=1, 2, \cdots$. 由于 $\{\varphi_N\}$ 一致收敛于 φ, 所以对任何 $\varepsilon>0$, 存在 N_0, 当 $N\geqslant N_0$ 时,

$$|\varphi_N(x)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad x\in[a, b] \tag{6.6}$$

又由于 $x\neq x_n$, $n=1, 2, \cdots$, 所以存在 $\delta>0$, 当 $|x'-x|<\delta$ 时,

$$|\varphi_{N_0}(x)-\varphi_{N_0}(x')|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{6.7}$$

由(6.6), (6.7)立即得到

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\varphi(x')|&\leqslant|\varphi(x)-\varphi_{N_0}(x)|+|\varphi_{N_0}(x)-\varphi_{N_0}(x')|\\&\quad+|\varphi_{N_0}(x')-\varphi(x')|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

即 x 是 $\varphi(x)$ 的连续点.

利用这个事实, 立即得到 1°, 2°. 事实上, 对任何 n,

$$\begin{aligned}&\varphi(x)-\lambda_n\theta(x-x_n)-\mu_n\theta_1(x-x_n)\\&=\sum_k{}'(\lambda_k\theta(x-x_k)+\mu_k\theta_1(x-x_k))\end{aligned}$$

其中 $\sum\limits_k{}'$ 表示除去第 n 项外的一切项求和. 根据前面所证, 点 x_n 是跳跃函数 $\varphi_n'(x)=\sum\limits_k{}'(\lambda_k\theta(x-x_k)+\mu_k\theta_1(x-x_k))$ 的连续点. 可是 x_n 不是 $\lambda_n\theta(x-x_n)+\mu_n\theta_1(x-x_n)$ 的连续点, 所以 x_n 不是 φ 的连续点. 又由于 $\varphi_n'(x_n+0)=\varphi_n'(x_n)=\varphi_n'(x_n-0)$, 所以 $\varphi(x_n+0)$, $\varphi(x_n-0)$ 必存在. 并且由于 $\lambda_n\theta(x-x_n)+\mu_n\theta_1(x-x_n)$ 在点 x_n 的右(左)方跳跃度为 $\lambda_n(\mu_n)$. 所以 $\varphi(x)=\lambda_n\theta(x-x_n)+\mu_n\theta_1(x-x_n)+\varphi_n'(x)$ 在 x_n 点的右(左)方跳跃度也为 $\lambda_n(\mu_n)$. 证毕.

下面是单调函数与跳跃函数的关系.

定理 4 设 f 是 $[a,b]$ 上的单调增加函数, $\{x_n\}$ 为 f 的所有不连续点, 作

$$\varphi(x)=\sum_n (f(x_n+0)-f(x_n))\theta(x-x_n)$$

$$+\sum_n (f(x_n)-f(x_n-0))\theta_1(x-x_n)$$

那末 φ 是单调增加函数; 而且

$g(x)=f(x)-\varphi(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调增加的连续函数.

证 根据定理 1 的性质 3°,

$$\sum_n (f(x_n+0)-f(x_n))+\sum_n (f(x_n)-f(x_n-0))$$

$$\leqslant f(b)-f(a)$$

所以 φ 是一个单调增加的跳跃函数. 又根据定理 3, φ 的不连续点全体就是 $\{x_n\}$, 而且 $\varphi(x_n+0)-\varphi(x_n)=f(x_n+0)-f(x_n)$, $\varphi(x_n)-\varphi(x_n-0)=f(x_n)-f(x_n-0)$. 因此

$$g(x_n+0)-g(x_n)=f(x_n+0)-f(x_n)-(\varphi(x_n+0)-\varphi(x_n))=0$$

$$g(x_n)-g(x_n-0)=f(x_n)-f(x_n-0)-(\varphi(x_n)-\varphi(x_n-0))=0$$

即 x_n 是 g 的连续点. 然而除 $\{x_n\}$ 外的点都是 f 和 φ 的连续点, 自然也是 g 的连续点. 所以 g 是 $[a,b]$ 上连续函数.

再证 g 是单调增加函数. 设 $\xi\in[a,b]$, 显然, 当 $\xi<x_n$ 时, $\theta(\xi-x_n)=\theta_1(\xi-x_n)=0$. 而当 $\xi=x_n$ 时, $\theta(\xi-x_n)=0$, $\theta_1(\xi-x_n)=1$, 因此

$$\varphi(\xi)=\sum_{x_n<\xi} (f(x_n+0)-f(x_n))\theta(\xi-x_n)$$

$$+\sum_{x_n\leqslant\xi} (f(x_n)-f(x_n-0))\theta_1(\xi-x_n)$$

这就是说 $\varphi(\xi)$ 的值就是 f 在 $[a,\xi]$ 上所有不连续点跳跃度的总和

(当 ξ 是 f 的不连续点时，这时只计算在 ξ 点的左方跳跃度)，因此，当 $\zeta<\xi$ 时，$\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)$ 正是 f 在 $[\zeta, \xi]$ 上所有不连续点跳跃度的总和(当 ζ 是 f 的不连续点时，只计算 ζ 点的右方跳跃度)，又根据定理 1 的 3°，便得到

$$\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)\leqslant f(\xi)-f(\zeta)$$

这个不等式等价于 $g(\zeta)\leqslant g(\xi)$，即 $g(x)$ 是 $[a, b]$ 上单调增加函数. 证毕.

3. 导数、单调函数的导数 现在转到单调函数的微分性质的讨论. 为此先将数学分析中在一点的导数概念作更细致地考察.

定义 设 f 是 $[a, b]$ 上的有限函数，$x_0\in[a, b]$，对任何收敛于零的数列 $\{h_n\}$，如果极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$$

存在(这里极限值可取 $\pm\infty$)，记为 $D_{\{h_n\}}f(x_0)$，称它是 f 在 x_0 点的一个**导出数**，特别，当 $h_n>0$, $n=1, 2, \cdots$ 时，称 $D_{\{h_n\}}f(x_0)$ 是 f 在 x_0 点的一个**右方导出数**；当 $h_n<0$, $n=1, 2, \cdots$ 时，称 $D_{\{h_n\}}f(x_0)$ 是 f 在 x_0 点的一个**左方导出数**. 记 f 在 x_0 点的右方导出数的上确界为 $D^+f(x_0)$，下确界为 $D_+f(x_0)$，分别称 $D^+f(x_0)$、$D_+f(x_0)$ 为 f 在 x_0 点的**右方上导数**、**右方下导数**. 类似地定义在 x_0 点的左方上、下导数，记左方上、下导数为 $D^-f(x_0)$、$D_-f(x_0)$.

例 1 作函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

这个函数在 $x=0$ 点有不止一个导出数，如果取 $h_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，易

知 $D_{\{h_n\}}f(0)=\infty$；如果取 $h'_n=\dfrac{1}{2n\pi-\dfrac{\pi}{2}}$，易知 $D_{\{h'_n\}}f(0)=-\infty$，事实上，可以证明，对任何 λ，$-\infty\leqslant\lambda\leqslant\infty$，我们总可以取适当 $\{h_n\}$，使得 $D_{\{h_n\}}f(0)=\lambda$. 也就是说，f 在 $x=0$ 点导出数全体是 $[-\infty,\ \infty]$. f 在 $x=0$ 点的左方或右方导出数全体也是 $[-\infty,\ \infty]$.

对于一般的函数，有如下导出数的定理.

定理 5（导出数存在定理） 设 f 是 $(a,\ b)$ 上任意一个有限函数，对任何 $x\in(a,b)$，函数 f 在 x 点的左（或右）方导出数存在.

证 设 $\{h_n\}$ 是一列收敛于零的正数，考察数集

$$\left\{\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right\},$$

如果它有界，根据 Weierstrass 定理，必可从 $\{h_n\}$ 中抽出子序列 $\{h_{n_\nu}\}$，使得极限

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{f(x+h_{n_\nu})-f(x)}{h_{n_\nu}} \tag{6.8}$$

存在而且为有限值. 它就是 $D_{\{h_{n_\nu}\}}f(x)$. 如果上述数集无界，也可从 $\{h_n\}$ 中抽出子序列 $\{h_{n_\nu}\}$，使得(6.8)的极限为 ∞ 或 $-\infty$，这时，f 在 x 点存在一个无限的右方导出数.

同样可以证明左方导出数也存在. 证毕.

读者还可以证明函数 f 在一点的左（右）方导出数全体成为一个闭集，因此 $D^+f(x)$，$D_+f(x)$，$D^-f(x)$，$D_-f(x)$ 都是 x 点的右、左方的导出数.

定义 设 f 是 $[a,b]$ 上的有限函数，如果在 x 点的一切导出数相等，就称 f 在 x 点**具有导数**，记导出数的公共值为 $f'(x)$. 并称 $f'(x)$ 为 f 在 x 点的导数. 如果在 x 点导数存在并且导数是有限值，称 x 为 f 的**可微分的点**

显然，函数 f 在 x 点导数存在的充要条件是 $D^+f(x)=D_+f(x)=D^-f(x)=D_-f(x)$。

例 2 符号函数 $f(x)=\text{sign}x$，在 $x=0$ 点具有导数，$f'(0)=\infty$. 读者注意，此时 f 在 $x=0$ 点并不连续.

由此可见，我们这里的导数概念和数学分析中导数概念略有差别. 数学分析中所说的导数存在的含义是不仅要求导数存在，而且要求导数是有限的，即可微.

定理 6 设 f 是 $[a,b]$ 上的有限函数，点 $x\in[a,b]$，那末 f 在点 x 具有有限导数的充要条件是存在有限数 $f'(x)$，使得对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x'\in[a,b]$，$0\neq|x'-x|<\delta$ 时，有不等式

$$\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}-f'(x)\right|<\varepsilon \tag{6.9}$$

读者可以自行证明这个定理.

现在考察单调函数的可微性. 我们要引入一个概念，为简单起见，先考察连续函数情况

定义 设 g 是 $[a,b]$ 上的连续函数，$x\in(a,b)$，如果有 $\xi\in(x,b)$，使得

$$g(x)<g(\xi) \tag{6.10}$$

称 x 是 g 的右受控点，简称为右控点. 同样可定义 x 是 g 的左受控点，简称为左控点.

例如，当 g 是 $[a,b]$ 上严格单调增加连续函数时，(a,b) 中所有点都是 g 的右控点；当 g 是 $[a,b]$ 上严格单调下降函数时，(a,b) 中所有点都是 g 的左控点. 又如 $[-1,1]$ 上的函数 $g(x)=x^2$，$x=0$ 是它的左控点，又是它的右控点.

引理 1（黎斯，F. Riesz） 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，那末 g 的右控点（相应地左控点）全体是一开集. 又如果 $\{(a_k,b_k)\}$ 是构成区间集，那末（图 3.10）

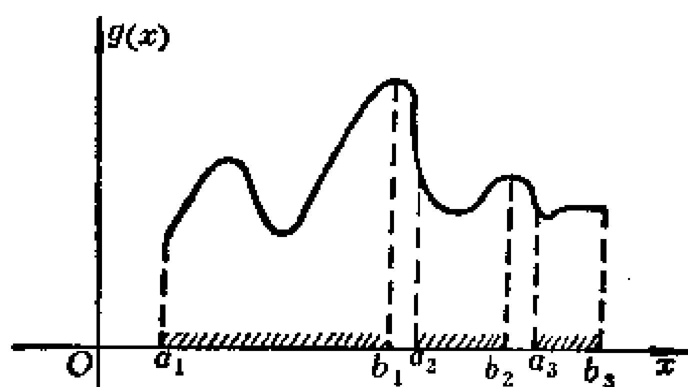


图 3.10—F. Riesz 引理示意图

$$g(a_k)\leqslant g(b_k) \tag{6.11}$$

(相应地

$$g(b_k)\leqslant g(a_k)) \tag{6.12}$$

证 记 g 的右控点全体为 E. 任取 $x_0\in E$, 必有 $\xi>x_0$, 使(6.10)成立. 由 g 的连续性知道, 必存在 $\delta>0$, 使得 $a<x_0-\delta<x_0+\delta<\xi$, 而且当 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$时,

$$g(x)<g(\xi) \tag{6.13}$$

所以$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$中一切点都是右控点, 即 x_0 是 E 的内点. 因此 E 是开集.

设$\{(a_k,\ b_k)\}$是 E 的构成区间集, 我们证明: 当 $x\in(a_k, b_k)$时,

$$g(x)\leqslant g(b_k) \tag{6.14}$$

假如不对, 必有 $x_0\in(a_k, b_k)$, 使得 $g(x_0)>g(b_k)$. 由于 x_0 是右控点, 所以有 $\xi>x_0$, $g(x_0)<g(\xi)$. 在(x_0, b)中这种 ξ 的上确界记为 x_1. 显然 $g(x_1)\geqslant g(x_0)$, 所以 $x_1\neq b_k$. 我们说不会有 $b_k<x_1$, 不然便有 $g(b_k)<g(x_0)\leqslant g(x_1)$, 就有 $b_k<\xi<b$, 使得 $g(b_k)<g(\xi)$. 从而 b_k 是右控点, 这就与假设 b_k 是 E 的构成区间端点(从而 $b_k\overline{\in}E$)相矛盾. 但又不能有 $x_1<b_k$. 不然由 $x_0<x_1<b_k$, 得到 $x_1\in E$, 因而又要存在 $\xi>x_1$, 使得 $g(x_0)\leqslant g(x_1)<g(\xi)$, 这又与假设 x_1 是适

合 $g(x_0)<g(\xi)$, $x_0<\xi$ 的 ξ 的上确界矛盾. 所以(6.14)成立.

在(6.14)中令 $x\to a_k$, 便得到(6.11). 同样可证左控点全体是开集, 并且(6.12)成立. 证毕.

我们后面要用到的实际上并不限于 g 为连续函数, 因此要有下面的概念.

定义 设 g 是$[a, b]$上函数, 不连续点都是第一类的. 对于 $x\in(a,b)$, 如果有 $\xi\in(x,b)$, 使得

$$\max(g(x), g(x-0), g(x+0))<g(\xi) \qquad (6.10')$$

称 x 是 g 的右控点; 类似地, 如果有 $\xi\in(a,x)$使(6.10′)成立, 就称 x 是 g 的左控点.

为了方便起见, 对$[a, b]$上最多只有第一类不连续点的函数 g, 作 $\hat{g}$ 如下: 当 $x\in(a,b)$时 $\hat{g}(x)=\max(g(x), g(x-0), g(x+0))$. 规定 $\hat{g}(a)=g(a+0)$, $\hat{g}(b)=g(b-0)$.

引理 1′(黎斯, F. Riesz)　设 g 是$[a,b]$上最多只有第一类不连续点的函数, 那末 g 的右控点(相应地左控点)全体 E 是开集. 又如果$\{(a_k, b_k)\}$是 E 的构成区间, 那末

$$g(a_k+0)\leqslant\hat{g}(b_k) \qquad (6.11')$$

(相应地

$$g(b_k-0)\leqslant\hat{g}(a_k)) \qquad (6.12')$$

证　任取$x_0\in E$, 必有$\xi>x_0$, 使得(6.10′)成立. 取$0<\varepsilon<g(\xi)-\hat{g}(x_0)$, 由 $g(x_0+0)$, $g(x_0-0)$存在性知道, 必存在 $\delta>0$, 使得 $a<x_0-\delta<x_0+\delta<\xi$, 而且当 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$时,

$$g(x)<\hat{g}(x_0)+\varepsilon$$

因此, 对任何 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, 有

$$\hat{g}(x)=\max(g(x), g(x+0), g(x-0))\leqslant\hat{g}(x_0)+\varepsilon<g(\xi)$$

这就是说$(x_0-\delta, x_0+\delta)$中每点都是右控点, 由此可知 E 是开集.

设(a_k, b_k)是 E 的构成区间, 我们来证明: 当 $x\in(a_k, b_k)$时,

$$g(x)\leqslant \bar{g}(b_k) \tag{6.14'}$$

假如不对，必有点 $x_0\in(a_k, b_k)$，使得 $g(x_0)>\bar{g}(b_k)$. 由于 x_0 是右控点，所以必有 $\xi>x_0, \bar{g}(x_0)<g(\xi)$. 记 (x_0, b) 中这种 ξ 的上确界为 x_1. 取一列这种 $\xi_n\to x_1$，显然 $\bar{g}(x_0)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}g(\xi_n)\leqslant\bar{g}(x_1)$. 由于 $\bar{g}(x_0)\geqslant g(x_0)>\bar{g}(b_k)$，得到 $\bar{g}(x_1)>\bar{g}(b_k)$，所以 $x_1\neq b_k$. 我们说不会有 $b_k<x_1$，不然便有某个 ξ_n，使得 $\bar{g}(b_k)<g(x_0)<g(\xi_n)$，而且 $b_k<\xi_n<b$，即 $b_k\in E$. 这就与 b_k 是 E 的构成区间端点的假设矛盾. 但是也不会有 $x_1<b_k$，不然由 $x_0<x_1<b_k$ 推出 $x_1\in E$，因而存在 $\xi>x_1$，使得 $\bar{g}(x_1)<g(\xi)$，即有 $x_0<x_1<\xi$，$\bar{g}(x_0)\leqslant\bar{g}(x_1)<g(\xi)$. 这又与假设 x_1 是 (x_0, b) 中适合 $x_0<\xi, \bar{g}(x_0)<g(\xi)$ 的 ξ 的上确界相矛盾，所以(6.14')成立. 注意，仅管 $\bar{g}(x)$ 的值在 $x=b$ 和 $x\in(a, b)$ 点的定义方式有点差别，但对 b 也是某个构成区间 (a_k, b_k) 的右端点时，这种情况的(6.14')的证明已被包含在上面的证明中了.

在(6.14')中令 $x\to a_k$，便得到(6.11'). 同样可讨论左控点情况. 证毕.

定理 7 单调函数(关于勒贝格测度[①])几乎处处有有限导数.

证 我们不妨假设 f 是 $[a, b]$ 上单调增加函数. 如果 f 是单调下降函数，我们考虑 $-f$ 就可以了.

记 E 是 (a, b) 上单调增加函数 $f(x)$ 的连续点全体. 由于 f 是单调增加的，一切导出数都是非负的. 因此我们只要证明：使得

$$D_+f=D^+f=D_-f=D^-f<\infty \tag{6.15}$$

不成立的点全体是零集. 证明分如下几步.

---

① 本节中所讲的测度都是指勒贝格测度.

第一步，记 $E_{\infty}^{+}=E(D^{+}f=\infty)$①，证 E_{∞}^{+}是零集：取 $c>0$，作

$$E_{c}=E(D^{+}f>c)①$$

如果 $x\in E_{c}$，那末必有 $\xi>x$，使得

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}>c \tag{6.16}$$

记 $g(x)=f(x)-cx$，显然 $g(x)$最多只有第一类不连续点，而且当 $x<b$，$\hat{g}(x)=g(x+0)$，$\hat{g}(b)=g(b-0)$，(6.16)等价于 $g(x)<g(\xi)$。由于 $x\in E_{c}$，x 是 g 的连续点，所以 $g(x)=\hat{g}(x)$，由此 x 是 g 的右控点。所以 E_{c} 包含在 g 的右控点集 O 中，由 Riesz 引理 1′，$O=\bigcup\limits_{k}(a_{k},b_{k})$，其中$(a_{k},b_{k})$是 O 的构成区间。根据(6.11′)及 f 的单调增加性，

$$f(a_{k}+0)-ca_{k}\leqslant f(b_{k}+0)-cb_{k} \tag{6.17}$$

当 $b_{k}=b$ 时，$f(b+0)$应换成 $f(b-0)$。由此得到

$$\begin{aligned}m^{*}(E_{c})\leqslant m(O)&=\sum_{k}(b_{k}-a_{k})\\&\leqslant\frac{1}{c}\sum_{k}(f(b_{k}+0)-f(a_{k}+0))\end{aligned}$$

因为$E_{\infty}^{+}\subset E_{c}$，所以$m^{*}(E_{\infty}^{+})\leqslant m^{*}(E_{c})\leqslant\frac{1}{c}(f(b)-f(a))$。令 $c\to\infty$，便得到 $m^{*}(E_{\infty}^{+})=0$，即 E_{∞}^{+} 是 m-零集。

第二步，证 $M=E(D^{+}f>D_{-}f)$也是零集：将 M进行分类，设 c,r 为两个有理数，$c>r$。记 $M_{c,r}=E(D^{+}f>c>r>D_{-}f)$。显然 $M=\bigcup M_{c,r}$，其中$\bigcup$是对一切 $c>r$ 的有理数组(c,r)求和。因此只要证明每个 $M_{c,r}$ 的勒贝格测度是零就可以了。当 $x\in M_{c,r}$ 时，必有如下的 ξ，使得

---

① $E(D^{+}f=\infty)$表示所有 E 中使得 $D^{+}f=\infty$ 的全体，同样 $E(D^{+}f>c)$表示 E 中所有使得 $D^{+}f>c$ 的点全体。

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}<r, \quad \xi<x$$

作函数 $g(x)=f(x)-rx$，上式便是 $g(x)<g(\xi)$，$\xi<x$. x 是左控点，利用 Riesz 引理 1′，$M_{c,r}$ 必包含在一个开集 $\bigcup(a_k, b_k)$ 中，并且 $g(b_k-0)\leqslant g(a_k)$. 由于 $g(a_k)=g(a_k+0)$，所以

$$f(b_k-0)-f(a_k+0)\leqslant r(b_k-a_k) \tag{6.18}$$

现在考察每个小区间 (a_k, b_k) 中的 $M_{c,r}$ 点 x. 由于 $D^+f>c$，利用第一步证明中有关 E_c 的结果，便得到 $M_{c,r}\cap(a_k, b_k)$ 必包含在 (a_k, b_k) 的某个开子集 $\bigcup\limits_l(a_{kl}, b_{kl})$ 中，并且

$$c(b_{kl}-a_{kl})\leqslant f(b_{kl}+0)-f(a_{kl}+0) \tag{6.19}$$

但这里当发生 $b_{kl}=b_k$ 时，$f(b_{kl}+0)$ 应改为 $f(b_k-0)$，所以

$$\sum_l(f(b_{kl}+0)-f(a_{kl}+0))\leqslant f(b_k-0)-f(a_k+0).$$

结合(6.18)、(6.19)，我们便得到 $M_{c,r}$ 包含在开集

$$\bigcup_{k,l}(a_{kl}, b_{kl})$$

中，并且

$$\begin{aligned}
m(M_{c,r})&\leqslant m\left(\bigcup_{k,l}(a_{kl}, b_{kl})\right)\\
&=\sum_{k,l}(b_{kl}-a_{kl})\leqslant\sum_{k,l}\frac{1}{c}(f(b_{kl}+0)-f(a_{kl}+0))\\
&\leqslant\frac{1}{c}\sum_k(f(b_k-0)-f(a_k+0))\\
&\leqslant\frac{r}{c}\sum_k(b_k-a_k)\leqslant\frac{r}{c}(b-a)
\end{aligned}$$

这样我们得到如下重要事实：对 $[a, b]$ 上单调增加函数，开始只知道 $M_{c,r}$ 分布在 (a, b) 中，对 r, c 分别用一次 Riesz 引理1′，便知道

$M_{c,r}$ 只能分布在 $\bigcup_{k,l}(a_{kl}, b_{kl})$ 中，并且

$$m\left(\bigcup_{k,l}(a_{kl}, b_{kl})\right)\leqslant\frac{r}{c}(b-a)$$

由此可见，如果用$[a_{kl}, b_{kl}]$代替$[a, b]$，重复上面的讨论，便知道

$$(a_{kl}, b_{kl})\cap M_{c,r}$$

只能包含在开集 $O_{kl}=\bigcup_{m,n}(a_{kl,mn}, b_{kl,mn})\subset(a_{kl}, b_{kl})$中，而且

$$m(O_{kl})\leqslant\frac{r}{c}(b_{kl}-a_{kl})$$

从而$m^*(M_{c,r})\leqslant\sum_{k,l}m(O_{kl})\leqslant\left(\frac{r}{c}\right)^2(b-a)$. 这样地重复 n 次，就得到

$$m^*(M_{c,r})\leqslant\left(\frac{r}{c}\right)^n(b-a)$$

由于$\frac{r}{c}<1$，令 $n\to\infty$，就得到 $m(M_{c,r})=0$. 因此

$$m(E(D^+f>D_-f))=0$$

第三步，证 $E(D^-f>D_+f)$也是零集。由于 $h(x)=-f(-x)$是$[-b, -a]$上单调增加函数，当记 $y=-x$ 时，由于

$$\frac{h(y+h_n)-h(y)}{h_n}=\frac{-f(-(y+h_n))-(-f(-y))}{h_n}$$

$$=\frac{f(x-h_n)-f(x)}{-h_n}$$

我们得到

$$\begin{cases}D^+h(y)=D^-f(x), & y=-x\\ D_-h(y)=D_+f(x), & y=-x\end{cases}$$

因此 $E(D^-f>D_+f)=\{y\mid D^+h(y)>D_-h(y),\ y\text{ 是 }h\text{ 的连续点}\}$. 由第二步知道$\{y\mid D^+h>D_-h,\ y\text{ 是 }h\text{ 的连续点}\}$是零集，但是勒贝格测

度 m 在"反射变换" $x\to -x$ 下测度保持不变，所以

$$m(E(D^-f>D_+f))=0$$

第四步，证明(6.15)式：利用第一、二、三步结果得到

$$D^+f\leqslant D_-f\leqslant D^-f\leqslant D_+f\leqslant D^+f<\infty$$

在 E 上几乎处处成立．所以除一个零集外，

$$D^+f=D_-f=D^-f=D_+f<\infty$$

成立．证毕．

对于单调增加函数，不仅有上述深刻的导数定理，而且由它还可以得到很有用的逐项求导定理．

定理 8（富必尼(Fubini)） 设 $f_1, f_2, \cdots$，都是 $[a, b]$ 上的单调增加函数，并且函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 在区间 $[a, b]$ 上处处收敛于 f．那末

$$f'=\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$$

几乎处处成立．

证 不妨设 $f_1(a)=f_2(a)=\cdots=0$，不然的话，改记

$$f_n(x)-f_n(a)$$

为 $f_n(x)$ 就行了．作函数级数的部分和 $S_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$．显然，$S_n(x)$，$f(x)$ 都是单调增加函数，因此除去一个零集 E 外，导数

$$f'_1(x), f'_2(x), \cdots, f'(x)$$

都存在．由于 $S_n(x)-S_{n-1}(x)=f_n(x)$，$f(x)-S_n(x)$ 都是单调增加函数，它们的导数是非负的，所以当 $x\overline{\in} E$ 时，

$$S'_{n-1}(x)\leqslant S'_n(x)\leqslant f'(x) \tag{6.20}$$

由(6.20)，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)=\lim_{n\to\infty} S'_n(x)$ 是几乎处处收敛的．如果我

们能证明存在一个子序列$\{S'_{n_\nu}(x)\}$，使得

$$\lim_{\nu\to\infty} S'_{n_\nu}(x)=f'(x) \tag{6.21}$$

几乎处处成立，定理就证明了。

由于$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(b)=f(b)$，对于每个自然数$k$，取$n_k$，使得

$$f(b)-S_{n_k}(b)<\frac{1}{2^k}$$

但是$f(x)-S_{n_k}(x)$也是x的单调增加函数，而且

$$f(a)=S_{n_k}(a)=0$$

所以

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\{f(x)-S_{n_k}(x)\}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\{f(b)-S_{n_k}(b)\}$$

$$<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$$

这就是说，级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\{f(x)-S_{n_k}(x)\}$也是由单调增加函数列

$$f(x)-S_{n_k}(x)\quad k=1,2,\cdots$$

所构成的收敛级数，它和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$具有同样的性质，把关于$\sum\limits_{n}f_n(x)$已经得到的结论用到$\sum\limits_{k}\{f(x)-S_{n_k}(x)\}$上去，便得到

$$\sum_{k}\{f'(x)-S'_{n_k}(x)\}<\infty$$

几乎处处成立．收敛级数的一般项收敛于零，因此

$$\lim_{k\to\infty}(f'(x)-S'_{n_k}(x))\underset{m}{=}0$$

即(6.21)成立．证毕．

注 定理8中级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$在$[a, b]$上处处收敛这个条件可以减弱为在端点a和b处$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$和$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(b)$收敛. 因为$\sum_{n=1}^{\infty}(f_n(x)-f_n(a))$是非负单调增加函数项级数,由于它在$x=b$点收敛,立即就推出对任何$x\in(a, b)$,级数$\sum_{n=1}^{\infty}(f_n(x)-f_n(a))$收敛,从而级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$处处收敛.

系 φ是$[a, b]$上跳跃函数,那末$\varphi' \underset{m}{\doteq} 0$

证 因为$\varphi=\varphi_1-\varphi_2$, φ_1、φ_2是$[a, b]$上单调增加的跳跃函数,注意到

$$\theta'(x-x_n) \underset{m}{\doteq} 0, \quad \theta_1'(x-x_n) \underset{m}{\doteq} 0 \quad (n=1, 2, \cdots, p)$$

由Fubini定理立即得到系的结论.

定理9 设f是$[a, b]$上的单调增加函数,那末f'必是勒贝格可积函数①,而且

$$\int_a^b f' dx \leqslant f(b)-f(a) \tag{6.22}$$

证 设在$(b, b+1]$上规定$f(t)=f(b)$. 对任何自然数n,作函数

$$\varphi_n(t)=\frac{f\left(t+\frac{1}{n}\right)-f(t)}{\frac{1}{n}}$$

它是勒贝格可积函数,而且$\varphi_n(t)\geqslant 0$. 由于

① 凡$f(x)$的导数不存在的点x,就规定$f'(x)$为任意的值.

$$
\begin{aligned}
\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(t)\,dt &= \underline{\lim}_{n\to\infty} n\left[\int_a^b \left(f\left(t+\frac{1}{n}\right)-f(t)\right)dt\right] \\
&= \underline{\lim}_{n\to\infty} n\left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(t)\,dt - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)\,dt\right] \\
&= f(b)-f(a+0)\leqslant f(b)-f(a)<\infty
\end{aligned}
$$

由 Fatou 引理得到

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f'(t)\,dt &= \int_a^b \lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)\,dt \\
&\leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(t)\,dt \leqslant f(b)-f(a)
\end{aligned}
$$

证毕.

一般说来，不等式(6.22)是不能变成等式的. 例如$[-1,1]$上的 Heaviside 函数 $\theta(x)$, $\theta'(x)=0$(除 $x=0$ 外成立). 因而

$$
\int_{-1}^{1}\theta'(x)\,dx=0
$$

然而 $\theta(1)-\theta(-1)=1$. 甚至假设 $f(x)$是连续的单调增加函数，也不能做到使不等式(6.22)变成等式.

例 3　存在$[0,1]$上严格单调增加连续函数 f, 但 $f'\underset{m}{\doteq}0$.

取定$(0,1)$中一个数 λ, 在$[0,1]$上用归纳法作如下单调增加连续函数的序列$\{f_n\}$：设 $f_0(x)=x$. 假如 $f_n(x)$已经按如下方式定义好，并且它在区间(为方便，称为第 n 级区间)

$$
(\alpha,\beta)=\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)\quad (k=0,1,2,\cdots,2^n-1)
$$

中是一次函数，那末定义 $f_{n+1}(\alpha)=f_n(\alpha)$, $f_{n+1}(\beta)=f_n(\beta)$. 而在 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, 定义

$$
f_{n+1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1-\lambda}{2}f_n(\alpha)+\frac{1+\lambda}{2}f_n(\beta) \tag{6.23}
$$

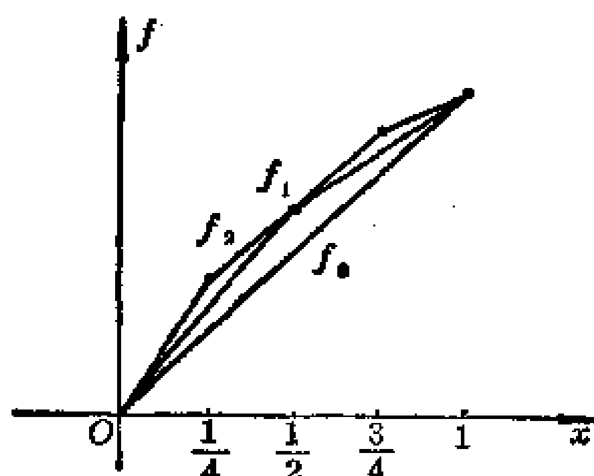


图 3.11 $-f'(x)\doteq 0$ 的严格增加函数的构造过程

而在第 $n+1$ 级区间$\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$上(如图 3.11 所示), 延拓 $f_{n+1}(x)$分别成为一次的函数.

从上述定义方式易知, 当 f_n 是单调增加函数时, f_{n+1} 也是单调增加函数. 由于 $\lambda>0$, 从(6.23)得到

$$f_{n+1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>f_n\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

从而

$$f_{n+1}(x)>f_n(x),\quad x\in(\alpha, \beta)$$

由此得到 $f_0\leqslant f_1\leqslant\cdots$在$[0, 1]$上成立. 并且

$$0\leqslant f_n(x)\leqslant 1, x\in[0, 1]$$

所以$\{f_n\}$处处收敛于一个单调增加函数 f.

今证 f 即为所要求的函数. 为此我们先计算 f 在某个第 n 级区间(α_n, β_n)①$=\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$上的值 $f(\beta_n)-f(\alpha_n)$: 由定义

$$f_{n+1}\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right)-f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{1+\lambda}{2}(f_n(\beta_n)-f_n(\alpha_n)) \tag{6.24}$$

① 显然, 严格说来应记为(α_n^k, β_n^k), 这里省掉上标 k 是为了书写简单, 读者不要忘记这一点.

$$f_{n+1}(\beta_n)-f_{n+1}\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right)=\frac{1-\lambda}{2}(f_n(\beta_n)-f_n(\alpha_n))$$

记$(\alpha_{n+1},\beta_{n+1})$是$n+1$级区间

$$\left(\alpha_n,\frac{1}{2}(\alpha_n+\beta_n)\right),\left(\frac{1}{2}(\alpha_n+\beta_n),\beta_n\right)$$

中的某一个，由(6.24)得到

$$f_{n+1}(\beta_{n+1})-f_{n+1}(\alpha_{n+1})=\frac{1\pm\lambda}{2}(f_n(\beta_n)-f_n(\alpha_n)) \tag{6.25}$$

从定义知道当$k\geqslant n$时，$f_k(\alpha_n)=f_n(\alpha_n)$，$f_k(\beta_n)=f_n(\beta_n)$．所以令$k\to\infty$，便得到$f(\alpha_n)=f_n(\alpha_n)$，$f(\beta_n)=f_n(\beta_n)$．再从(6.25)就得到

$$f(\beta_{n+1})-f(\alpha_{n+1})=\frac{1\pm\lambda}{2}(f(\beta_n)-f(\alpha_n)) \tag{6.26}$$

重复应用(6.26)就得到

$$f(\beta_{n+1})-f(\alpha_{n+1})=\prod_{\nu=1}^{n+1}\frac{1+\lambda\varepsilon_\nu}{2}\quad(\varepsilon_\nu=\pm1) \tag{6.27}$$

从(6.27)得到对任何n级区间(α_n,β_n)，$f(\beta_n)-f(\alpha_n)>0$，所以$f(x)$是$[0,1]$上严格单调增加函数．当$n\to\infty$时，由(6.27)得到

$$0<f(\beta_n)-f(\alpha_n)<\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^n\to0 \tag{6.28}$$

由于函数f是单调的，由(6.28)易知f是$[0,1]$上连续函数．

f的导数f'几乎处处存在，并且是有限的．记f'存在并且有限的点为E_0，又记$E=E_0-\{\alpha_n\}-\{\beta_n\}$，显然$m(E)=1$．任取$x\in E$，对任何$n$，总有$(\alpha_n,\beta_n)$，使得$\alpha_n<x<\beta_n$，那末从(6.27)得到

$$\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\prod_{\nu=1}^{n}(1+\varepsilon_\nu\lambda)$$

当$n\to\infty$时，由于无穷乘积$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\varepsilon_\nu\lambda)$总是发散的，而上式左边

有极限 $f'(x)$，所以只有 $f'(x)=0$. 例子证毕.

如果只要求 f 是连续、单调，而并不要求严格单调，例子就要简单一点，可参见[2]第四章§5.

定义 f 是 $[a,b]$ 上有限函数，如果 $f' \underset{m}{\doteq} 0$ 并且 f 在 $[a,b]$ 上不恒为常数，那末称 f 为 $[a,b]$ 上**奇异函数**

例 3 便是一个连续，单调增加，并且任何一个区间 $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$ 上都不为常数的奇异函数.

4. 有界变差函数 在研究不定积分时，最常碰到的单调增加函数是

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

其中 f 是 $[a,b]$ 上非负的可积函数. 在 $[a,b]$ 上一般的可积函数 f 的不定积分总可以写成

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^x f^+(t)\,dt-\int_a^x f^-(t)\,dt$$

即 $F(x)$ 是两个单调增加函数 $\int_a^x f^+(t)\,dt$，$\int_a^x f^-(t)\,dt$ 的差. 因此，在这一段里我们先研究什么样的函数可以分解成两个单调增加函数的差，即研究有界变差函数①，而把什么样的函数才能写成一个可积函数的不定积分问题放在下一节去研究.

定义 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有限函数，在 $[a,b]$ 上任取一组分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

作和式

$$V_f(x_0,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

① 在数学历史上是由研究曲线积分和曲线长度问题引入有界变差函数概念的.

称它为 f 对分点组 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的**变差**. 如果对一切可能的分点组，变差所形成的数集 $\{V_f(x_0, \cdots, x_n)\}$ 有界，即

$$\sup_{x_0, \cdots, x_n} V_f(x_0, \cdots, x_n) < \infty$$

就称 f 是 $[a, b]$ 上的**有界变差函数**. 记

$$\bigvee_a^b (f) = \sup_{x_0, \cdots, x_n} V_f(x_0, \cdots, x_n)$$

称 $\bigvee_a^b (f)$ 是 f 在 $[a, b]$ 上的**全变差**. 当 x 在 $[a, b]$ 上变化时，称 f 在 $[a, x]$ 上的全变差 $\bigvee_a^x (f)$ 为 f 在 $[a, b]$ 上的**全变差函数**.

区间 $[a, b]$ 上有界变差函数全体所成的函数类记为 $V[a, b]$.

例 4　区间 $[a, b]$ 上的任何单调增加函数 f 必是有界变差的. 因为在 $[a, b]$ 上任取一组分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 时，

$$V_f(x_0, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(b) - f(a)$$

所以 f 是有界变差的，而且 $\bigvee_a^b (f) = f(b) - f(a)$.

例 5　设 f 在 $[a, b]$ 上满足 Lipschitz 条件，即存在常数 M，当 $x, x' \in [a, b]$ 时

$$|f(x) - f(x')| \leqslant M |x - x'|$$

那末 f 必是有界变差函数. 这是因为

$$V_f(x_0, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$\leqslant M\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=M(b-a)$$

所以$\bigvee\limits_a^b(f)\leqslant M(b-a)$.

例6 跳跃函数显然是有界变差函数.

例7 连续函数不一定是有界变差函数，例如

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1\\ 0, & x=0\end{cases}$$

是[0, 1]上的连续函数，如果取分点

$$x_0=0,\ x_n=1,\quad x_i=\frac{1}{((n-1)-i)\pi+\frac{\pi}{2}}$$

$$i=1,2,\cdots,n-1$$

那末

$$V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\sum_i\left|x_i\sin\frac{1}{x_i}-x_{i-1}\sin\frac{1}{x_{i-1}}\right|$$

$$>\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{(k-1)\pi+\frac{\pi}{2}}\right)>\frac{2}{\pi}\sum_{1}^{n-2}\frac{1}{k}$$

但是$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\infty$. 所以$\sup V_f(x_0,\cdots,x_n)=\infty$. 就是说$f$不是有界变差的.

定理10 有界变差函数具有下面一些性质:

1° 当$f\in V[a,b]$时，f必是有界函数.

2° $f\in V[a,b]$, $g\in V[a,b]$, α、β是两个常数，那末

$$\alpha f+\beta g\in V[a,b]$$

而且$\bigvee\limits_a^b(\alpha f+\beta g)\leqslant|\alpha|\bigvee\limits_a^b(f)+|\beta|\bigvee\limits_a^b(g)$.

3° $f\in V[a,b]$, $g\in V[a,b]$, 那末 $fg\in V[a,b]$.

4° $f\in V[a,b]$, 而且 $\bigvee_a^b(f)=0$ 时, f 必是常数.

5° 设 $[c,d]\subset[a,b]$, $f\in V[a,b]$, 那末当把 f 限制在 $[c,d]$ 上时, $f\in V[c,d]$.

6° $f\in V[a,b]$, 那末对任何 c, $a<c<b$, 成立着

$$\bigvee_a^b(f)=\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f) \tag{6.29}$$

7° 如果 $g_n\in V[a,b]$, $n=1,2,\cdots$, $\left\{\bigvee_a^b(g_n)\right\}$ 是有界的, 而且 $\{g_n(x)\}$ 处处收敛于 $g(x)$, 那末 $g\in V[a,b]$, 并且

$$\bigvee_a^b(g)\leqslant\sup_n\bigvee_a^b(g_n) \tag{6.30}$$

证 我们只证 2°, 6°, 7°, 其余留给读者.

2° 任取 $[a,b]$ 上一组分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 由于

$$
\begin{aligned}
&V_{\alpha f+\beta g}(x_0,\cdots,x_n)\\
&=\sum_{i=1}^n|\alpha f(x_i)+\beta g(x_i)-\alpha f(x_{i-1})-\beta g(x_{i-1})|\\
&\leqslant|\alpha|V_f(x_0,\cdots,x_n)+|\beta|V_g(x_0,\cdots,x_n)\\
&\leqslant|\alpha|\bigvee_a^b(f)+|\beta|\bigvee_a^b(g)
\end{aligned}
$$

所以 $\alpha f+\beta g$ 是有界变差函数, 而且

$$\bigvee_a^b(\alpha f+\beta g)\leqslant|\alpha|\bigvee_a^b(f)+|\beta|\bigvee_a^b(g)$$

6° 根据 5°, $f\in V[a,c]$, $f\in V[c,b]$. 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 在 $[a,c]$, $[c,b]$ 上分别取分点组 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=c$, $c=x_0'<x_1'$

$<\cdots<x'_m=b$，使得

$$V_f(x_0,\cdots,x_n)>\bigvee_a^c(f)-\varepsilon$$

$$V_f(x'_0,\cdots,x'_m)>\bigvee_c^b(f)-\varepsilon$$

将分点组$\{x_i\}$和$\{x'_i\}$合并起来构成$[a,b]$上一个分点组，显然

$$\begin{aligned}\bigvee_a^b(f)&\geqslant V_f(x_0,\cdots,x_n,x'_1,\cdots,x'_m)=V_f(x_0,\cdots,x_n)\\&\quad+V_f(x'_0,\cdots,x'_m)\\&>\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)-2\varepsilon\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0$ 便得到

$$\bigvee_a^b(f)\geqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)$$

再证 $\bigvee_a^b(f)\leqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)$：对任给 $\varepsilon>0$，存在$[a,b]$上的一个分点组 $x_0,\cdots,x_n$，使得

$$V_f(x_0,\cdots,x_n)>\bigvee_a^b(f)-\varepsilon$$

设 $x_{k-1}<c\leqslant x_k$，作分点组 $x_0,\cdots,x_{k-1},c,x_k,\cdots,x_n$. 那末将 $x_0,\cdots,x_{k-1}$, c 和 $c,x_k,\cdots,x_n$ 分别作为$[a,c]$，$[c,b]$的一个分点组，显然

$$\begin{aligned}\bigvee_a^b(f)-\varepsilon&<V_f(x_0,\cdots,x_n)\leqslant V_f(x_0,\cdots,x_{k-1},c,x_k,\cdots,x_n)\\&=V_f(x_0,\cdots,x_{k-1},c)+V_f(c,x_k,\cdots,x_n)\\&\leqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$，就得到 $\bigvee_a^b(f)\leqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)$. 所以(6.29)成立.

7° 设 $M=\sup_n\bigvee_a^b(g_n)<\infty$. 对$[a,b]$上任意给定的一组分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，当分点取定后，由于

$$V_g(x_0,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n|g(x_i)-g(x_{i-1})|$$

$$=\sum_{i=1}^n\lim_{m\to\infty}|g_m(x_i)-g_m(x_{i-1})|$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^n|g_m(x_i)-g_m(x_{i-1})|\leqslant M$$

性质 7° 中条件 $\sup_n\bigvee_a^b(g_n)<\infty$ 不能去掉.

例 8 令

$$f_n=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{n}\sin n, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{n},\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$

显然，对每个 n，f_n 在$\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$，$\left[\dfrac{1}{n},1\right]$上满足 Lipshitz条件，所以 f_n 是有界变差的. 而

$$\lim_{n\to\infty}f_n=f=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

但 f 在$[0,1]$上不是有界变差的.

定理 11(约尔当(Jordan)分解定理) 设 f 是$[a,b]$上的有界变差函数，那末 f 必能分解成两个单调增加函数的差，即

$$f=\varphi-\psi$$

φ, ψ 都是单调增加函数.

证 作函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\left\{\bigvee_a^x(f)+f(x)\right\},\ \psi(x)=\frac{1}{2}\left\{\bigvee_a^x(f)-f(x)\right\}$$

由定理 10 的 6°, 当 $x'>x$ 时,

$$|f(x)-f(x')|=V_f(x,x')\leqslant\bigvee_x^{x'}(f)$$

$$=\bigvee_a^{x'}(f)-\bigvee_a^x(f). \tag{6.31}$$

所以 $\bigvee_a^x(f)+f(x)\leqslant\bigvee_a^{x'}(f)+f(x')$, 这就是说 $\varphi(x)$是单调增加函数. 同样可证 $\psi(x)$也是单调增加函数. 由等式

$$f(x)=\frac{1}{2}\left\{\bigvee_a^x(f)+f(x)\right\}-\frac{1}{2}\left\{\bigvee_a^x(f)-f(x)\right\}$$

立即得到本定理. 证毕.

系 有界变差函数的不连续点都是第一类的; 不连续点全体最多是一可列集; 有界变差函数是黎曼可积的; 有界变差函数几乎处处有有限导数, 而且导函数是勒贝格可积的.

显然, 有界变差函数分解为两个单调增加函数的差时, 这种分解不是唯一的. 例如把 φ, ψ 同加一个相同的常数或同加一个相同的单调增加函数时, 仍然是它的一个分解.

如果我们引入函数

$$p(x)=\frac{1}{2}\left\{\bigvee_a^x(f)+f(x)-f(a)\right\} \tag{6.32}$$

$$n(x)=\frac{1}{2}\left\{\bigvee_a^x(f)-f(x)+f(a)\right\} \tag{6.33}$$

分别称 $p(x)$, $n(x)$ 为 $f(x)$ 的**正变差函数和负变差函数**. 这时

$$\bigvee_a^x(f)=p(x)+n(x) \tag{6.34}$$

$$f(x)-f(a)=p(x)-n(x) \tag{6.35}$$

称(6.34)、(6.35)为 $f(x)$ 的**正规分解**.

关于 $\bigvee_a^x(f)$ 的连续性与 $f(x)$ 的连续性, 有如下定理.

定理 12 设 f 是 $[a,b]$ 上有界变差函数, 那末 f 与 $\bigvee_a^x(f)$ 有相同的右(左)方连续的点.

证 当 $x<x'$ 时, 由不等式(6.31)知道, 全变差函数的右(左)方连续的点必是 f 的右(左)方连续的点.

反过来, 如果 ξ 是 f 的右方连续的点, $a\leqslant\xi<b$. 那末对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $0<\delta<b-\xi$, 使得当 $x\in(\xi,\xi+\delta)$ 时,

$$|f(x)-f(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

在 $[\xi,\xi+\delta]$ 上取一分点组 $\xi=x_0<x_1<\cdots<x_n=\xi+\delta$, 使得

$$\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|=V_f(x_0,\cdots,x_n)>\bigvee_{\xi}^{\xi+\delta}(f)-\frac{\varepsilon}{2}$$

由于

$$\sum_{i=2}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant\bigvee_{x_1}^{\xi+\delta}(f)$$

以及
$$\bigvee_{\xi}^{\xi+\delta}(f)=\bigvee_{\xi}^{x_1}(f)+\bigvee_{x_1}^{\xi+\delta}(f),$$

就得到

$$\bigvee_{\xi}^{x_1}(f)=\bigvee_{\xi}^{\xi+\delta}(f)-\bigvee_{x_1}^{\xi+\delta}(f)<\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}-\sum_{i=2}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}+|f(x_1)-f(\xi)|<\varepsilon$$

所以当 $x\in(\xi,x_1)$时,

$$\left|\bigvee_{a}^{\xi}(f)-\bigvee_{a}^{x}(f)\right|=\bigvee_{\xi}^{x}(f)<\varepsilon$$

即 ξ 是 $\bigvee_{a}^{x}(f)$的右连续的点. 同样可证左连续的情况. 证毕

系 1° $\bigvee_{a}^{x}(f)$和 f 有相同的连续点;

2° x_0是 f 的连续点的充要条件是 x_0 同时是 p, n 两个函数的连续点.

证 1° 可直接由定理 12 推出.

2° 当 x_0 是 f 的连续点时, 由 1° 及(6.32)、(6.33) 可推出 x_0 是 p, n 的连续点. 反过来, 当 x_0 是 p, n 的连续点时, 由(6.35)就可推出 x_0 是 f 的连续点. 证毕.

定理13 设 f 是$[a,b]$上的有界变差函数, 那末唯一地存在在(a,b)上右连续的有界变差函数 g, 使得(i)在(a,b)中 $f(x)$的连续点上 $g(x)=f(x)$; (ii) $g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$, (iii)

$$\bigvee_{a}^{b}(g)\leqslant\bigvee_{a}^{b}(f)$$

证 事实上, 对 $x\in(a,b)$, 取 $g(x)=f(x+0)$就可以了.

如果 $x_0\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的一个连续点，由于 $f(x_0+0)=f(x_0)$，所以就有 $g(x_0)=f(x_0+0)=f(x_0)$，即 $f(x)=g(x)$ 在 (a,b) 中 $f(x)$ 的连续点上成立.

再证 $g(x)$ 在 (a,b) 上右连续：任取 $x_0\in(a,b)$，对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，成立着

$$f(x_0+0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0+0)+\varepsilon \tag{6.36}$$

对 $(x_0,x_0+\delta)$ 中每个点 x，只要取 $x_n\in(x,x_0+\delta)$，并且 $x_n\to x$，从上式立即得到 $f(x_0+0)-\varepsilon\leqslant f(x+0)\leqslant f(x_0+0)+\varepsilon$. 即当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，

$$|g(x_0)-g(x)|<\varepsilon \tag{6.37}$$

这就是说 $g(x)$ 在 x_0 点是右连续的. x_0 是任取的，所以 $g(x)$ 在 (a,b) 上右连续.

最后证明：　$\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}(g)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}(f)$.

事实上，在 $[a,b]$ 上任取一分点组

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

再取 y_i：$x_i<y_i<x_{i+1}$，$i=1,2,\cdots,n-1$，由于

$$V_f(x_0,y_1,\cdots,y_{n-1},x_n)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}(f)$$

再令 $y_i\to x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$，从上式和 $g(x_i)=\lim f(y_i)$ 就得到

$V_g(x_0,x_1,\cdots,x_n)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}(f)$，因此 $\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}(g)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{\bigvee}}(f)$. 证毕.

显然满足定理 13 中条件的 g 是由 f 唯一确定的.

类似于单调增加函数可以分解为连续的单调增加函数同跳跃函数的和，对有界变差函数也有如下分解的定理.

定理 14　设 f 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，$\{x_n\}$ 是它的不连续

点全体，那末，1°

$$\sum_k \{|f(x_k+0)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(x_k-0)|\} \leqslant \bigvee_a^b(f) \tag{6.38}$$

2° 作跳跃函数

$$\varphi(x)=\sum_k\{f(x_k+0)-f(x_k)\}\theta(x-x_k)$$
$$+\sum_k\{f(x_k)-f(x_k-0)\}\theta_1(x-x_k)$$

那末 $g=f-\varphi$ 是连续的有界变差函数.

换句话说，任何一个有界变差函数总可以表示成一个连续的有界变差函数与一个跳跃函数的和.

证 先证(6.38)式：记 $F(x)=\bigvee_a^x(f)$，作分解

$$f(x)=p(x)-n(x)+f(a)$$

由(6.34)，(6.35)式，我们有

$$|f(x_k+0)-f(x_k)|=|p(x_k+0)-n(x_k+0)-p(x_k)+n(x_k)|$$
$$\leqslant p(x_k+0)-p(x_k)+n(x_k+0)-n(x_k)=F(x_k+0)-F(x_k)$$

同样可以得到 $|f(x_k)-f(x_k-0)|\leqslant F(x_k)-F(x_k-0)$

对 $F(x)$应用定理 1 的 3° 就知道(6.38)成立.

对于函数 $g=f-\varphi$ 的连续性的证明和定理 4（关于单调函数情况）的证明类似. 请读者自己证明.

现在介绍有界变差函数列的一个重要性质——**赫利(Helly)选取原理**. 为此，先介绍一个引理.

引理 2 设E是任意一个可列集，$\{f_\alpha|\alpha\in A\}$是E上一族均匀有界的函数，A 是无限指标集(容许不可列). 那末一定可以从$\{f_\alpha\}$中选出一列$\{f_{\alpha_\nu}, \nu=1,2,\cdots\}$，其中$\{\alpha_\nu\}$是$A$中一列不同指标，而

$\{f_{\alpha_\nu}\}$在E上收敛.

证　因为E是可列集，将它排成序列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

由于$\{f_\alpha\}$均匀有界，即存在M，使得

$$|f_\alpha(x)| < M, x \in E, \alpha \in A$$

根据 Weierstrass 定理，可从数集$\{f_\alpha(x_1)\}$中选出一收敛数列：

$$f_{\alpha_{11}}(x_1), f_{\alpha_{12}}(x_1), \cdots, f_{\alpha_{1n}}(x_1), \cdots$$

其中$\{\alpha_{1n}\}$是A中一列不同的指标．再考察$\{f_{\alpha_{1n}}(x), \ n=1, 2, \cdots\}$由于均匀有界性，又可从指标列$\{\alpha_{1n}\}$中选出指标$\{\alpha_{2n}\}$使得

$$f_{\alpha_{21}}(x_2), f_{\alpha_{22}}(x_2), \cdots, f_{\alpha_{2n}}(x_2), \cdots$$

是收敛的．再考察$\{f_{\alpha_{2n}}(x)\}$，如此手续一直进行下去，我们得到如下函数列：

$$f_{\alpha_{11}}(x), f_{\alpha_{12}}(x), \cdots, f_{\alpha_{1n}}(x), \cdots$$
$$f_{\alpha_{21}}(x), f_{\alpha_{22}}(x), \cdots, f_{\alpha_{2n}}(x), \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{\alpha_{n1}}(x), f_{\alpha_{n2}}(x), \cdots, f_{\alpha_{nn}}(x), \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中每个序列都是前一个序列的子序列．由选取规则易知第n个函数列一定在$x_1, \cdots, x_n$上收敛．从上面一列序列中选出对角线序列$\{f_{\alpha_{nn}}(x)\}$，它将在所有E中的点都收敛．事实上，对任何$x_l \in E$，除掉前$l-1$项后，所得的序列是第l个序列$\{f_{\alpha_{ln}}\}$的子序列，因此$\{f_{\alpha_{nn}}(x_l)\}$收敛．并且指标$\{\alpha_{nn}\}$显然是互不相同的．证毕．

定理 15(Helly)　设$\{f_\alpha | \alpha \in A\}$是$[a, b]$上一族（无限个）有界变差函数，又设它们本身和它们的全变差都是均匀有界的，那末一定可以从$\{f_\alpha | \alpha \in A\}$中抽出指标互不相同的序列，这个序列在$[a, b]$上处处收敛于一个有界变差函数．

证　先设f_α都是单调增加函数．设E是$[a, b]$上有理点全体，

它是可列集. 根据引理 2, 必有 A 中一个指标互不相同的序列 $\{\alpha_n\}$, 使得 $\{f_{\alpha_n}(x)\}$ 在 E 上收敛. 记它在 E 上的极限是 $f(x)$.

由于每个 f_{α_n} 是单调增加的, 显然 f 也在 E 上是单调增加的. 对 $[a, b]$ 上不属于 E 的点 x, 补充定义:

$$f(x) = \sup_{\xi \in E, \xi < x} f(\xi)$$

容易知道, 这样定义出来的 $[a, b]$ 上函数仍是 $[a, b]$ 上单调增加的. 它的不连续点全体记为 F, 它最多是可列集. 下面来证明 $\{f_{\alpha_n}\}$ 在点 $x \in [a, b] - F$ (即 $f(x)$ 的连续点)上收敛于 $f(x)$.

事实上, 设 $x_0 \in [a, b] - F$, 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在有理数 $p, q \in E$, 使得 $p < x_0 < q$, 而且

$$0 \leqslant f(x_0) - f(p) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leqslant f(q) - f(x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (6.39)$$

利用 $\{f_{\alpha_n}\}$ 在 p, q 点的收敛性, 必存在 N, 使得 $n \geqslant N$ 时,

$$|f_{\alpha_n}(p) - f(p)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f_{\alpha_n}(q) - f(q)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (6.40)$$

由(6.39)、(6.40)立即得到, 当 $n \geqslant N$ 时,

$$|f(x_0) - f_{\alpha_n}(p)| < \varepsilon, \quad |f(x_0) - f_{\alpha_n}(q)| < \varepsilon \qquad (6.41)$$

因为每个函数 f_{α_n} 是单调增加的, 所以

$$f(x_0) - f_{\alpha_n}(q) \leqslant f(x_0) - f_{\alpha_n}(x_0) \leqslant f(x_0) - f_{\alpha_n}(p)$$

从(6.41)就得到

$$|f(x_0) - f_{\alpha_n}(x_0)| < \varepsilon$$

即 $\{f_{\alpha_n}(x_0)\}$ 收敛于 $f(x_0)$.

既然 $\{f_{\alpha_n}\}$ 在 $f(x)$ 的连续点上都收敛于 $f(x)$. 因此不收敛于 $f(x)$ 的点最多只是可列集了. 记它为 S, 这时对函数列 $\{f_{\alpha_n}\}$ 与集 S 再应用引理 2 的结论, 又可从 $\{f_{\alpha_n}\}$ 中选出子序列, 使它在 S 上收敛. 当然它在 S 上收敛的值可以不是 $f(x)$ 的值. 但它是在整个 $[a, b]$ 上收敛的序列. 因此在一切 $\{f_\alpha\}$ 是单调增加的情形时定理

已得证.

当 $\{f_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是一族有界变差函数时，由于 $\left\{\bigvee_a^b(f_\alpha),\alpha\in\Lambda\right\}$ 是有界的，根据正规分解，作 $p_\alpha(x)=\frac{1}{2}\left(\bigvee_a^x(f_\alpha)+f_\alpha(x)-f_\alpha(a)\right)$,

$$n_\alpha(x)=\frac{1}{2}\left(\bigvee_a^x(f_\alpha)-f_\alpha(x)+f_\alpha(a)\right),\quad q_\alpha(x)=p_\alpha(x)+f_\alpha(a).$$

那末 $\{q_\alpha(x)\}$，$\{n_\alpha(x)\}$ 是两个均匀有界的单调增加函数族，而且 $f_\alpha(x)=q_\alpha(x)-n_\alpha(x)$. 由已证明的结果，可以从 $\{q_\alpha(x)\}$ 中选出序列 $\{q_{\alpha_k}(x)\}$ 在 $[a,\ b]$ 上收敛于一个单调增加函数 $q(x)$. 再从相应的子序列 $\{n_{\alpha_k}(x)\}$ 又选出子序列 $\{n_{\alpha'_k}(x)\}$，在 $[a,b]$ 上收敛于单调增加函数 $n(x)$. 因而序列 $\{f_{\alpha'_k}(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 $f(x)=q(x)-n(x)$. 显然 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数. 证毕.

例 9　Helly 选取原理中设 $\left\{\bigvee_a^b(f_\alpha),\alpha\in\Lambda\right\}$ 有界这个条件是不能去掉的. 例 8 中的例子便可说明这一点.

对于有界变差函数概念，还可以推广到无限区间上去，并且具有相应的许多性质，包括 Helly 选取原理也可推广到无界区间上去. 这里不重复了.

Helly 选取原理在概率论中是很有用的. 它的对角线方法是很有用的一种方法，结论也被推广了.

习　题

1. $[a,b]$ 上任何两个单调函数，如果在一稠密集上相等，那末它们有相同的连续点，并且在不连续点的跳跃度一致.

2. 单调函数全体的势是$\aleph$.

3. 设f是$[a,b]$上单调函数，当把它的不连续点的值修改成右连续(或左连续)时所得的函数记为$\bar{f}$. 证明$f,\bar{f}$具有相同的可微分点.

4. 设E是直线上勒贝格测度为零的集. 试作一直线上单调增加函数$f(x)$,使得当$x\in E$时,$f'(x)=\infty$.

5. 设f是$[a,b]$上的连续函数,如果存在M,使得在每个点x, f总有一个右方导出数Df,适合

$$|Df|<M$$

那末f满足Lipschitz条件.

6. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}1+x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1 & , \ x=0\end{cases}$$

由φ作函数f:当$x\geqslant 0$时$f(x)=\sqrt{x}\varphi(x)$;当$x<0$时,$f(x)=-\sqrt{-x}\varphi(x)$. 问$f(x)$在$x=0$点导数是否存在?

7. 设函数$f(x)$在$[a,\ b]$上(关于m)几乎处处有有限导数. 证明对任何$\delta>0$,必存在可测集$E_\delta\subset[a,b]$, $m([a,b]-E_\delta)<\delta$, 使得对任何$\varepsilon>0$,存在$\eta>0$,对一切$x\in E_\delta$, $x'\in[a,b]$,当$|x-x'|<\eta$时,成立着

$$\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}-f'(x)\right|<\varepsilon$$

8. 设α是一实数,函数

$$f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\frac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1\\ 0 & , \ x=0\end{cases}$$

在α取什么值时, f是$[0,1]$上的有界变差函数?

9. 设f是$[a,b]$上的有限函数,在$[a,b]$上取一分点组$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,记

$$V_f^2(x_0,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n-1}\left|\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}-\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right|$$

如果对一切分点组,数集$\{V_f^2(x_0,\cdots,x_n)\}$有上界. 证明这种函数必定满足Lipschitz条件. 更进一步证明,在每点x, $D^+f(x)=D_+f(x)$, $D^-f(x)=D_-f(x)$. 如记$D^+f(x)=f'_+(x)$, $D^-f(x)=f'_-(x)$. 证明f'_+, f'_-是有界变差

函数.

10. 当区间$[a, b]$上的函数满足$|f(x')-f(x'')|\leqslant k|x'-x''|^{\alpha}$, ($\alpha>0$, k是常数)时, 称$f(x)$满足α次 Hölder 条件, 证明: 当$\alpha>1$时, $f(x)$恒为常数. 并作一个不满足任何次 Hölder条件的有界变差函数, 又设$\alpha<1$为已知, 作一函数满足α次 Hölder 条件, 但不是有界变差的.

11. 设f是$[a, b]$上的有界变差函数, 那末(关于m)几乎处处成立着

$$\frac{d}{dx}\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)=|f'(x)|$$

12. 设f是$[a, b]$上有界变差函数. 对任何分点组$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 记$P_f(x_0, \cdots, x_n)=\Sigma'(f(x_i)-f(x_{i-1}))$, Σ'表示满足$f(x_i)-f(x_{i-1})\geqslant 0$的$i$求和. 称$P_f(x_0, \cdots, x_n)$为正变差, 而称$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{P}}}(f)=\sup\{P_f(x_0, \cdots, x_n)\}$为正全变差. 证明(i) 对任何$c(a<c<b)$, $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{P}}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{P}}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{\mathrm{P}}}(f)$; (ii) $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{P}}}(f)=p(x)$, 这里$p(x)$是$f(x)$的正变差函数. 对负变差函数也有类似结果.

13. 证明, 函数f在$[a, b]$上满足Lipschitz条件的充要条件是对任何$\varepsilon>0$, 必存在$\delta>0$, 使得任何有限个区间(a_ν, b_ν) $\nu=1, 2, \cdots, n$, 只要$\sum_{1}^{n}(b_\nu-a_\nu)<\delta$时, 总有$\sum_{\nu=1}^{n}|f(b_\nu)-f(a_\nu)|<\varepsilon$.

14. 设f是$[a, b]$上单调函数. 那末f必将$[a, b]$上 Borel 集映照成$(-\infty, \infty)$上的 Borel 集; 又如果$f'(x)$处处存在, 并且是有限函数, 那末f必将$[a, b]$上勒贝格测度为零的集映照成$(-\infty, \infty)$上勒贝格测度为零的集.

15. 设f是$[a, b]$上有界变差函数, 并且连续. 证明: 对任何$\varepsilon>0$, 必存在$\delta>0$, 当分点组$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$的$\max\limits_i(x_i-x_{i-1})<\delta$时, 总有

$$V_f(x_0, \cdots, x_n)>\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)-\varepsilon$$

16. 设f是$[a, b]$上有限函数. 证明f在$[a, b]$上的连续点全体是Borel

集.

17. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上处处存在有限导数. 证明: f' 不能在 (a,b) 上有第一类不连续点.

18. 作一个在 (a,b) 上连续的函数 f, 要求它在 (a,b) 上处处具有有限的导数, 并且 f' 在 (a,b) 上不连续点全体具有正的勒贝格测度.

19. 求出跳跃函数的全变差.

20. 设 $E\subset[a,b]$ (a,b 可以是无限大), 并且是勒贝格可测集. 证明(关于 m)几乎所有 E 中的点是 E 的全密点(见第二章 §4 习题 6).

§7 不定积分与全连续函数

在这一节讨论牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) \tag{7.1}$$

成立的条件问题. 这是微积分学中一个基本问题. 在黎曼积分情况下, 通常的结论是(i)如果 f 是 $[a,b]$ 上连续函数, 那末不定积分 $(R)\int_a^x f(t)\,dt$ 便是 f 的一个原函数; (ii)如果 F 是连续函数 f 的一个原函数, 那末(7.1)成立. 这就是说, "积分"与"求导"是互为逆运算. 可是 f 连续的假设, 在许多场合显得要求太高, 甚至成为进一步研究的障碍. 由于这个公式无论在实际应用或理论研究中都很重要. 公式(7.1)究竟在怎样较弱条件下成立的问题就曾是人们研究的一个课题. 下面用勒贝格积分和点集分析方法来研究这个问题. 这个问题在一般测度空间上的推广将在下一节(§8)中讨论.

1. 不定积分的求导 和黎曼积分一样, 如果 f 是 $[a,b]$ 上勒贝格可积函数, 那末称 $\int_a^x f(t)\,dt$ (x 在 $[a,b]$ 上变化)是 f 的**不定积分**. 现在先考察不定积分的求导问题.

定理 1 设 f 是 $[a,b]$ 上勒贝格可积函数, 那末

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt \underset{m}{\doteq} f(x) \tag{7.2}$$

证　首先注意，对任何 $g\in L[a,b]$①，导数 $\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt$ 几乎处处存在，而且是有限的，同时有

$$\int_a^b\left|\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt\right|dx\leqslant\int_a^b|g(t)|\,dt \tag{7.3}$$

事实上，因为 $g=g^+-g^-$，$\int_a^x g^+(t)\,dt$，$\int_a^x g^-(t)\,dt$ 是两个单调增加函数，所以

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt \underset{m}{\doteq} \frac{d}{dx}\int_a^x g^+(t)\,dt-\frac{d}{dx}\int_a^x g^-(t)\,dt$$

而且是有限的．根据§6定理9知道，这三个导函数不仅可积，并且

$$\int_a^b\left|\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt\right|dx\leqslant\int_a^b\left(\frac{d}{dx}\int_a^x g^+(t)\,dt\right)dx+\int_a^b\left(\frac{d}{dx}\int_a^x g^-(t)\,dt\right)dx$$

$$\leqslant\int_a^b g^+(t)\,dt+\int_a^b g^-(t)\,dt$$

这就是说(7.3)成立．

现在利用(7.3)来证(7.2)：对任何 $\varepsilon>0$，由§3定理10的系，存在连续函数 φ，使得

$$\int_a^b|f-\varphi|\,dx<\varepsilon$$

对连续函数 φ，显然 $\frac{d}{dx}\int_a^x\varphi(t)\,dt=\varphi(x)$．因此

$$\int_a^b\left|\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt-f(x)\right|dx$$

$$\leqslant\int_a^b\left|\frac{d}{dx}\int_a^x(f(t)-\varphi(t))\,dt+\varphi(x)-f(x)\right|dx$$

① $L[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上勒贝格可积函数全体所成的类．

$$\leqslant\int_a^b\left|\frac{d}{dx}\int_a^x(f(t)-\varphi(t))\,dt\right|dx+\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\,dx$$

对函数$(f-\varphi)$应用(7.3)就得到

$$\int_a^b\left|\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt-f(x)\right|dx\leqslant 2\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\,dx<2\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to 0$, 便知道(7.2)成立. 证毕.

在讨论怎样的函数 $F(x)$能写成(7.1)之前, 先简要说明在怎样的点 x_0, 能使等式(7.2)式成立.

定义 设 f 是$[a,b]$上勒贝格可积函数, $x_0\in(a, b)$, 对任何 $h_1\geqslant 0$, $h_2\geqslant 0$, $h=h_1+h_2\neq 0$, 如果

$$\lim_{h_1+h_2\to 0}\frac{1}{h_1+h_2}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|\,dx=0$$

称 x_0 是 f 的**勒贝格点**.

勒贝格点是经典分析中有用的一个概念.

定理 2 设 f 在$[a,b]$上是勒贝格可积的, x_0 是 f的勒贝格点, 那末

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt\Big|_{x=x_0}=f(x_0)$$

证 显然,

$$\left|\frac{1}{h_1+h_2}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}f(t)\,dt-f(x_0)\right|$$

$$=\frac{1}{h_1+h_2}\left|\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}(f(t)-f(x_0))\,dt\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{h_1+h_2}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(t)-f(x_0)|\,dt\to 0\quad(h_1+h_2\to 0)$$

根据§6定理6, 立即从上式得到定理的结论. 证毕.

但是, 使(7.2)式成立的点未必是勒贝格点.

例 1 任取一收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 满足 $a_n\Big/\sum\limits_{n+1}^{\infty}a_k\to 0(n\to$

∞). 记 $a=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. 作$[0,a]$上函数如下，将$[0,a]$先分裂成可列个左开右闭区间$(x_{n+1},x_n]$($n=1,2,\cdots$)之和，$x_1=a$，而$x_n-x_{n+1}=a_n$，规定

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\left(x_{n+1},\dfrac{x_n+x_{n+1}}{2}\right]\\ -1, & x\in\left(\dfrac{x_n+x_{n+1}}{2},x_n\right] \quad n=1,2,\cdots\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

然后将 f 按偶函数方式延拓成$[-a,a]$上的函数. 下面证明 $x=0$ 点能使(7.2)成立:

事实上，设 $h\in(x_{n+1},x_n]$，记 $h-x_{n+1}=\eta$，显然 $\eta\leqslant a_n$，因此

$$\left|\frac{1}{h}\int_0^h f(t)dt\right|=\left|\frac{1}{\eta+\sum\limits_{n+1}^{\infty}a_k}\int_{x_{n+1}}^{h}f(t)dt\right|$$

$$<\frac{\eta}{\eta+\sum\limits_{n+1}^{\infty}a_k}\to 0(h\to 0)$$

即函数$\int_{-a}^{x}f(t)dt$ 在 $x=0$ 点右方导数存在，并且是零.

同样可证在 $x=0$ 点左方导数存在，也是零，即(7.2)成立.

可是当 $h_1\geqslant 0$, $h_2\geqslant 0$, 而 $h=h_1+h_2\neq 0$ 时，恒有

$$\frac{1}{h}\int_{-h_1}^{h_2}|f(t)-0|dt=1$$

即 $x=0$ 并不是 $f(x)$的勒贝格点.

可见 x_0 是勒贝格点比要求 x_0 满足(7.2)要强. 但我们可用定理 1 获得比定理 1 更强的结果:

定理 3　设 $f(x)$是$[a,b]$上勒贝格可积函数，那末$[a,b]$上几

乎所有(按勒贝格测度)的点是勒贝格点.

证 设 r 是有理数，显然 $|f(x)-r|$ 是 $[a, b]$ 上勒贝格可积函数. 记 $[a, b]$ 中使下式成立的 x 全体为 E_r,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x |f(t)-r|\,dt = |f(x)-r|$$

由定理 1, $m(E_r)=b-a$. 当 r 遍取一切有理数，记 $E=\bigcap_r E_r$, 显然 $m([a,b]-E)=m\left(\bigcup_r([a,b]-E_r)\right)\leqslant\sum_r m([a, b]-E_r)=0.$

现在证明 E 中点都是勒贝格点：设 $x_0\in E$, 对任何 $\varepsilon>0$, 取有理数 r_0, 使得 $|f(x_0)-r_0|<\frac{\varepsilon}{2}$. 因此对任何 $h_1\geqslant 0, h_2\geqslant 0, h=h_1+h_2>0$

$$\frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|\,dx$$
$$\leqslant\frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-r_0|\,dx+|f(x_0)-r_0|$$

在上式中令 $h\to 0$, 就得到

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|\,dx\leqslant|f(x_0)-r_0|+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

再令 $\varepsilon\to 0$, 就得到

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|\,dx=0.$$

定理证毕.

2. 全连续函数 下面讨论怎样的函数 $F(x)$ 能写成一个可积函数 $f(t)$ 的不定积分. 如果 $F(x)$ 能写成

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C \tag{7.4}$$

显然，$F(x)$ 必是 $[a, b]$ 上连续有界变差函数. 但利用定理 2, 3, 易知 §6 例 3 中的连续的有界变差函数就不能写成上面形式. 积

分有更强的连续性，即全连续性．由积分的全连续性，对任何 $\varepsilon>0$，必有 $\delta>0$，使得$[a, b]$中任何有限个(或可列个)互不相交的区间 (a_ν, b_ν)，$\nu=1, 2, \cdots, n$，当 $m\left(\bigcup_\nu (a_\nu, b_\nu)\right)=\sum_\nu(b_\nu-a_\nu)<\delta$ 时，

$$\sum_\nu |F(b_\nu)-F(a_\nu)|=\sum_\nu\left|\int_{a_\nu}^{b_\nu} f(t)\,dt\right|\leqslant\sum_\nu\int_{a_\nu}^{b_\nu}|f(t)|\,dt$$

$$=\int_{\bigcup_\nu (a_\nu, b_\nu)}|f(t)|\,dt<\varepsilon$$

由此可见，能够成为某个可积函数的不定积分的函数 $F(x)$，它要求函数具有比普通连续性更强的连续性，将这种连续性抽象出来，引入如下定义：

定义 设 F 是$[a, b]$上的有限函数，如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当$\{(a_\nu, b_\nu)\}$是$[a, b]$上任意有限个互不相交的开区间，其总长度 $\sum_\nu(b_\nu-a_\nu)<\delta$ 时，不等式

$$\sum_\nu |F(b_\nu)-F(a_\nu)|<\varepsilon \tag{7.5}$$

成立．那末称 F 是在$[a, b]$上的**全连续函数，或称做绝对连续函数**．

当然，我们的目标是证明全连续函数 $F(x)$ 就能写成(7.4)的形式．下面先考察全连续函数具有什么性质．

例 2 设 f 在$[a, b]$上满足 Lipschitz 条件，那末 f 是全连续函数．

证 由假设，存在正数 M，当 x、$x'\in[a, b]$时，

$$|f(x)-f(x')|\leqslant M|x-x'|$$

对任何 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$．这时对任意个区间(不管它们是否两两不

相交)$\{(a_\nu, b_\nu)\}$，只要$\sum_\nu (b_\nu - a_\nu) < \delta$，总有

$$\sum_\nu [f(b_\nu) - f(a_\nu)] \leqslant \sum_\nu M(b_\nu - a_\nu) < \varepsilon$$

证毕.

注意，正如§6习题13所指出，如果(7.5)中允许(a_ν, b_ν)可以重复，这等价于函数F是满足Lipschitz条件.一个无界函数，如果是勒贝格可积的，那末，它的不定积分必是全连续函数，一般说来，它的不定积分并不满足Lipschitz条件.所以全连续函数的定义中$\{(a_\nu, b_\nu) | \nu = 1, 2, \cdots n\}$是互不相交不能修改成可相交．但可以把互不相交的有限个可以修改成可列个(读者自己证明).

全连续函数有下面的简单性质.

定理4 (i)$[a, b]$上的全连续函数必是连续的;

(ii) 两个全连续函数的线性组合、乘积仍是全连续函数;

(iii) $[a, b]$上全连续函数必是有界变差函数.

证 (i)、(ii)是明显的(读者自己证明).

(iii) 取$\varepsilon = 1$，按定义，存在$\delta > 0$，对任意有限个互不相交的开区间$\{(a_\nu, b_\nu)\}$，只要$\sum_\nu (b_\nu - a_\nu) < \delta$时，$\Sigma |F(b_\nu) - F(a_\nu)| < 1$.

取自然数M，使得$\frac{b-a}{M} < \delta$．将区间$[a, b]$ M等分，得到分点组

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_M = b$$

对$[x_{i-1}, x_i]$上任何一组分点

$$x_{i-1} = z_0 < z_1 < \cdots < z_k = x_i$$

由于$\sum_k (z_k - z_{k-1}) = x_i - x_{i-1} < \delta$，所以

$$V_F(z_0, \cdots, z_k) \leqslant 1$$

因此$\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(F) \leqslant 1$．从而$\bigvee_a^b(F) = \sum_{i=1}^M \bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(F) \leqslant M$．所以$F(x)$是

有界变差的. 证毕.

系 全连续函数(关于勒贝格测度)几乎处处有有限导数, 而且导函数是可积的.

下面是全连续函数的一个重要性质.

定理 5 设 F 是 $[a, b]$ 上的全连续函数, 而且 $F'=0$(关于勒贝格测度)几乎处处成立, 那末 $F=$ 常数.

证 先证 $F(b)=F(a)$: 对任何 $\varepsilon>0$, 由 $F(x)$ 的全连续性, 存在 $\delta>0$, 当 $\{(a_\nu, b_\nu)\}$ 是有限个总长度小于 δ 的互不相交的开区间时,

$$\sum_\nu |F(b_\nu)-F(a_\nu)|<\varepsilon \tag{7.6}$$

记 $E_0=\{x \mid F'(x)=0, x\in(a, b)\}$, 由假设 $m([a, b]-E_0)=0$. 所以由第二章 § 4 定理 5, 对上面的 δ, 存在开集 O, $O\supset[a, b]-E_0$, 而且 $m(O)<\delta$. 设 $\{(a_\nu, b_\nu)\}$ 为 O 的构成区间集.

另一方面, 当 $y_0\in[a, b]-O\subset E_0$ 时, $F'(y_0)=0$. 所以存在正数 $h(y_0, \varepsilon)$, 使得 $y\in(y_0-h, y_0+h)$ 时,

$$\left|\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0}\right|<\varepsilon \tag{7.7}$$

这时开集族 $\{(a_\nu, b_\nu), \nu=1, 2, \cdots\}\cup\{(y_0-h, \ y_0+h) \mid y_0\in[a, b]-O\}$ 覆盖了 $[a, b]$. 根据 Borel 覆盖定理, 可从中选出有限个来覆盖 $[a, b]$, 设它们是

$$(a_1, b_1), \cdots, (a_m, b_m), (y_1-h_1, y_1+h_1), \cdots, (y_l-h_l, y_l+h_l)$$

显然, 可以在集 $\{a_i, b_i, y_j, i=1, 2, \cdots, m, \ j=1, 2, \cdots, l\}$ 中再加入适当分点, 使其全体构成 $[a, b]$ 上一个分点组:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

并且使得: 任何 (x_{k-1}, x_k), 或是(i)包含在某个 (a_i, b_i) 中, 或是(ii) $x_{k-1}=y_j$, 而且 $(x_{k-1}, x_k)\subset(y_j, \ y_j+h_j)$, 或是(iii) $x_k=y_j$, 而且 $(x_{k-1}, x_k)\subset(y_j-h_j, y_j)$. 由此得到

$$|F(b)-F(a)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |F(x_k)-F(x_{k-1})|$$

$$= \Sigma' |F(x_k)-F(x_{k-1})| + \Sigma'' |F(x_k)-F(x_{k-1})|$$

其中 Σ' 表示对(i)形式(x_{k-1}, x_k)求和，Σ'' 表示对(ii)，(iii)形式的(x_{k-1}, x_k)求和．根据(7.6)，$\Sigma'|F(x_k)-F(x_{k-1})|<\varepsilon$．根据(7.7)

$$\Sigma''|F(x_k)-F(x_{k-1})|<\varepsilon\Sigma''(x_k-x_{k-1})\leqslant\varepsilon(b-a)$$

所以

$$|F(b)-F(a)|<\varepsilon[(b-a)+1]$$

由于 ε 是任意的，令 $\varepsilon\to0$，便得到 $F(b)=F(a)$．显然，对任何 $x\in[a, b]$，用$[a, x]$代替$[a, b]$来讨论，便得到

$$F(x)=F(a), \text{即} F(x)=\text{常数}.$$

证毕．

3. 牛顿-莱布尼兹公式 利用上述定理立即得到下列定理

定理 6 牛顿-莱布尼兹公式

$$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(t)\,dt$$

成立的充要条件是 $F(x)$是全连续函数．

证 必要性已在引入全连续性定义时讨论过．今证充分性：因为 $F(x)$是全连续的，由定理 4 的系知道 $F'(x)$是勒贝格可积的．作函数

$$\Phi(x)=\int_a^x F'(t)\,dt$$

显然 $\Phi(x)$是全连续函数．令$\Psi(x)=F(x)-\Phi(x)$，它是两个全连续函数的差，也是全连续．根据定理 1，$\Psi'(x)\underset{m}{=}F'(x)-F'(x)=0$，再由定理 5，$\Psi(x)\equiv$常数．所以$\Psi(x)\equiv\Psi(a)=F(a)$．证毕．

通过上面的讨论，清楚地看出：利用勒贝格积分这一工具，把

过去数学分析中原函数、不定积分、牛顿-莱布尼兹公式之间相互关系的讨论深入了一大步.

4. 勒贝格分解　经前面讨论立即可以得到有界变差函数的勒贝格分解.

定理 7(勒贝格分解定理)　设 g 是$[a, b]$上有界变差函数,那末必可分解成

$$g=g_s+g_c+\varphi \tag{7.8}$$

其中 φ 是$[a, b]$上跳跃函数,g_c是$[a, b]$上全连续函数,g_s 是奇异的有界变差函数(当然,g_s、g_c、φ 三个函数可以有某些不出现在分解(7.8)中). 除去相差一个常数外, 三个函数 g_s、g_c、φ 均由 g 唯一确定.

证　根据§6定理14, 取 φ 是由 g 产生的跳跃函数(显然 $\varphi(a)=0$),因此 $g-\varphi$ 便是连续的有界变差函数. 取

$$g_c(x)=\int_a^x(g'(t)-\varphi'(t))dt+g(a)$$

显然 g_c 是$[a, b]$上全连续函数, 且 $g_c(a)=g(a)$. 由§6定理8的系, $\varphi'(t)\underset{m}{\doteq}0$, 因而$g_c(x)=\int_a^x g'(t)dt+g(a)$. 显然$g_s(x)=g(x)-g_c(x)-\varphi(x)$是连续函数, 如果它不恒等于0, 根据定理1,$g_s'(x)\doteq g'(x)-g_c'(x)-\varphi'(x)\underset{m}{\doteq}0$,因而 g_s 就是奇异的有界变差函数,即有分解(7.8).

再证分解的唯一性: 因为 φ 是由 g 的跳跃点、跳跃度所唯一确定的. 如果有另一个分解: $g=\bar{g}_s+\bar{g}_c+\varphi$. 那末 $\bar{g}_s-g_s=g_c-\bar{g}_c$. 因此全连续函数 $g_c-\bar{g}_c$ 的导函数

$$(g_c-\bar{g}_c)'\underset{m}{\doteq}\bar{g}_s'-g_s'\underset{m}{\doteq}0$$

由定理5, $g_c(x)=\bar{g}_c(x)+$常数. 从而 $g_s(x)=\bar{g}_s(x)+$常数. 证毕.

习 题

1. 证明，函数 F 是 $[a, b]$ 上全连续的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任何一族互不相交的开区间 $\{(a_\nu, b_\nu)\}$，只要 $\sum_\nu (b_\nu-a_\nu)<\delta$ 时，总有

$$\sum_\nu |F(b_\nu)-F(a_\nu)|<\varepsilon.$$

2. 设 F 是 $[a, b]$ 上全连续函数，G 是 $[c, d]$ 上全连续函数，而且 $\mathscr{R}(F)\subset[c, d]$。证明 $G(F(x))$ 是 $[a, b]$ 上全连续函数。

3. 设 F 是 $[a, b]$ 上单调增加的函数，对任何集 $E\subset[a, b]$，记 $F(E)=\{F(x)\,|\,x\in E\}$。证明 F 是 $[a, b]$ 上全连续函数的充要条件是如果 $E\in\boldsymbol{B}$ (Borel 集类)，$m(E)=0$ 必有 $m(F(E))=0$。

4. 证明 $[a, b]$ 上导数处处存在且有限的单调函数 F 必是全连续的。

5. 证明 F 在 $[a, b]$ 上是满足 Lipschtiz 条件的函数的充要条件：F 是 $[a, b]$ 上有界勒贝格可测函数的不定积分。

6. 设 f 是 $[a, b]$ 上满足下面条件的函数：对任何 $a\leqslant x_1<x_2<x_3\leqslant b$，

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

称这种函数为凸(向下)函数(注意，它的等价定义是：对任何 x、$y\in[a, b]$，$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(f(x)+f(y))$)。证明凸(向下)函数 f 必是 (a, b) 上连续函数。如果 f 又在 a, b 两点连续，那末 f 是 $[a, b]$ 上全连续函数，按 §6 习题 9 的记号，证明 f'_+ 在 $[a, b)$ 上处处存在，并且是单调增加函数。

7. 设 f 是 $[a, b]$ 上凸函数，$(X, \boldsymbol{S}, \mu)$ 是测度空间，$E\in\boldsymbol{S}$，p 是 E 上非负可积函数。又设 φ 是 E 上可测函数，并且对任何 $x\in E$，$\varphi(x)\in[a, b]$，证明 (Jensen 不等式)

$$f\left(\frac{\int_E\varphi(x)p(x)d\mu(x)}{\int_E p(x)d\mu(x)}\right)\leqslant\frac{\int_E f(\varphi(x))p(x)d\mu(x)}{\int_E p(x)d\mu(x)}$$

8. 设 f 是 $[a, b]$ 上全连续函数，证明 f 的 $\bigvee_a^x(f)$、$p(x)$、$n(x)$ 都是全连续函数。

9. 设 f 是 $[a,b]$ 上全连续函数，证明

$$\int_a^b |f'(t)|dt = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$$

(此题不要用 §6 习题 11 来证明).

§8　广义测度和积分

1. 引言　设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调增加的右连续函数，从数学分析来看，它是 $[a,b]$ 上点的函数．如果从测度论来看，给出这样的点的函数，实质上就是给出了 $[a,b]$ 上 Borel 集上的一个集的函数，并且是测度．如果 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上右连续有界变差函数，从点函数观念看，它有 Jordan 分解：$f(x)=p(x)-n(x)+f(a)$．从集函数观念来看这一点，点函数 $f(x)$ 其实是两个集函数 $p(x)+f(a)$ 与 $n(x)$ 之差．因此，$f(x)$ 实质上也应该是一个集函数，并且是两个测度（分别由 $p(x)+f(a)$、$n(x)$ 产生）之差．当 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上有界变差函数，$h(x)$ 是 $[a,b]$ 上有界函数时，可仿照定义黎曼积分的方法，并将黎曼积分定义的和式中的 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ 换为 $\Delta_i f=f(x_{i+1})-f(x_i)$，就引入起过重要作用的所谓黎曼-斯蒂阶积分

$$\int_a^b h(x)df(x)$$

如果黎曼积分被推广成勒贝格积分，很自然，黎曼-斯蒂阶积分就应被推广成 h 关于能够表示成两个测度之差的那种"测度"的积分．

另外，§7 中证明了 $[a,b]$ 上全连续函数 $F(x)$ 所成的函数类就是勒贝格可积函数 $h(x)$ 的不定积分

$$F(x)=\int_a^x h(t)dt+C$$

全体所成的类．从测度论来看上述结果，就是一个可以表示成两

个测度之差的那种"测度" F，在某种限制下(例如这里限制是全连续)，一定能表示成一个可积函数的不定积分. 由于

$$\int_a^x h(t)dt=\int_a^x h^+(t)dt-\int_a^x h^-(t)dt,$$

因此，又可以说是能表示成由两个非负可积函数(通过不定积分)所产生的测度之差的形式.

在本节中，我们将把上述点函数中很重要的事实以及还有一些重要公式(如分部积分等)推广到一般测度的情况.

2. 广义测度

定义 设$(X,\mathbf{R})$是可测空间，μ_1、μ_2是$(X,\mathbf{R})$上的两个测度，其中至少有一个是有限测度①，$(X,\mathbf{R})$上集函数

$$\mu(E)=\mu_1(E)-\mu_2(E),\qquad E\in\mathbf{R} \tag{8.1}$$

称为$(X,\mathbf{R})$上的**广义测度**.

今后总假定μ_2是有限的，即$\mu(E)$最多只能取$+\infty$.

例1 设$(X,\mathbf{R},\mu)$是全σ-有限测度空间，$f(x)$是X上可积函数，集函数

$$\nu(E)=\int_E fd\mu,\qquad E\in\mathbf{R} \tag{8.2}$$

便是$(X,\mathbf{R})$上广义测度. 事实上，只要取

$$\mu_1(E)=\int_E f^+d\mu、\qquad \mu_2(E)=\int_E f^-d\mu\qquad E\in\mathbf{R}$$

即可.

如果f^+仅是有限的可测函数，那末，这时例1中广义测度ν就可能在某些可测集上取值∞.

例2 取$X=[a,b]$，记$B([a,b])$为$[a,b]$中所有Borel集全体所成的σ-代数，取$\mathbf{R}$是$[a,b]$中集族$\{[a,\alpha]|\alpha\in[a,b]\}$张成的

① 目的是保证(8.1)式有意义. 本书中总假定μ_2是有限的测度

环，设 $g(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的单调增加函数．作 $\boldsymbol{R}$ 上的集函数如下：

$$g((\alpha,\beta])=g(\beta+0)-g(\alpha+0),\qquad a\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant b,$$
$$g([a,\beta])=g(\beta+0)-g(a),\qquad a\leqslant\beta\leqslant b \tag{8.3}$$

当 $\beta=b$ 时，其中 $g(b+0)$ 表示 $g(b)$．易知，由(8.3)可以定义出 $\boldsymbol{R}$ 上一个测度．用第二章§3的方法可唯一地把 g 扩张成可测空间 $([a,b],\boldsymbol{B}([a,b]))$ 上的测度，仍然把它记为 g．称它是由单调函数 $g(x)$ 导出的测度．对于不满足右连续的单调函数 g，它导出的测度总是理解成按(8.3)方式产生的．容易看出，如果 c 是常数，单调函数 $g(x)+c$ 与 $g(x)$ 导出的测度相同．此外，如果 $h(x)$ 是 $[a,b]$ 上的另一个单调函数，它和 $g(x)$ 有如下关系：$g(a)=h(a)$，$g(b)=h(b)$，而且对 (a,b) 中一切 x，有 $g(x+0)=h(x+0)$．那末由(8.3)知道，$g(x)$ 和 $h(x)$ 导出的测度也是相同的．因此，对 $[a,b]$ 上任一单调函数 $g(x)$，可以作一个函数 $h(x)$：$h(a)=0$，$h(b)=g(b)-g(a)$，当 $x\in(a,b)$ 时，$h(x)=g(x+0)-g(a)$．那末，这时对一切 $x\in(a,b)$，函数 $h(x)$ 是右方连续的，$h(x)=h(x+0)=g(x+0)-g(a)$，而且 $h(x)$ 导出的测度就是 $g(x)$ 导出的测度．

现在设 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，根据§6的正规分解定理，我们有

$$g(x)=p(x)-n(x)+g(a)$$

其中 $p(x)$、$n(x)$ 是 $g(x)$ 的正、负变差函数．记 $\bigvee\limits_a^x(g)$ 为 $v(x)$，那末 $v(x)=p(x)+n(x)$．按例2所述的方式，由 $p(x),n(x),v(x)$ 可分别导出 $([a,b],\boldsymbol{B}([a,b]))$ 上三个全有限测度，分别记为 p,n,v．今作 $([a,b],\boldsymbol{B}([a,b]))$ 上广义测度 g 如下：

$$g(E)=p(E)-n(E)\qquad E\in\boldsymbol{B}([a,b]) \tag{8.4}$$

由 (8.4) 和测度 p, n 的定义 $p((\alpha,\beta])=p(\beta+0)-p(\alpha+0)$, $n((\alpha,\beta])=n(\beta+0)-n(\alpha+0)$) 可以看出

$$g((\alpha,\beta])=g(\beta+0)-g(\alpha+0),\qquad a\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant b$$

$$g([a,\beta])=g(\beta+0)-g(a),\qquad a\leqslant\beta\leqslant b \tag{8.5}$$

其中 $g(b+0)=g(b)$. 而且广义测度 g 是 $([a,b],\boldsymbol{B}([a,b]))$ 上满足(8.5)的唯一测度. 有时我们称 p,n 为 g 的正变差、负变差测度. 这时 $v=p+n$ 称为 g 的全变差测度. 显然 g 是全变差有限的测度.

用 $V_0[a,b]$表示$[a,b]$上满足条件

(i) $h(a)=0$;

(ii) $h(x)=h(x+0)$, $\qquad x\in(a,b)$

的有界变差函数 h(由(ii), h 必在(a,b)上右连续)的全体. 对于$[a,b]$上任何有界变差函数 $g(x)$, 我们作

$$h(x)=\begin{cases}0, & x=a\\ g(b)-g(a), & x=b\\ g(x+0)-g(a), & a<x<b\end{cases}$$

那末 $h\in V_0[a,b]$, 而且如前面例 2 所示, h、g所产生的广义测度是一样的. 因此, 今后研究有界变差函数导出的广义测度时, 不妨只要考察 $V_0[a,b]$ 中函数导出的广义测度. 因为这个事实在下册泛函分析中要用, 所以在这里交待一下.

下面是广义测度的简单性质.

引理1. 设 μ 是$(X,\boldsymbol{R})$上广义测度, 那末

(i) $\mu(\varnothing)=0$;

(ii) (可列可加)对任何$\{E_n\}\subset\boldsymbol{R}$, $E_n\cap E_m=\varnothing$ $(n\neq m)$, 那末

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n);$$

(iii) $\pm\infty$ 中只有一个可能被取作为 μ 的值①.

证　从 μ 是测度 μ_1、μ_2 之差，以及 μ_1、μ_2 中至少有一个是有限的，立即得到(i)，(ii)、(iii).

一般测度论书中(例如[3])，称可测空间 $(X, \mathbf{R})$ 上满足引理 1 中(i)、(ii)、(iii)条件的集函数 μ 为**带符号的测度**. 显然，广义测度是带符号的测度. 反之，我们要证明带符号的测度就是广义测度. 为此我们引入

定义　设 μ 是定义在可测空间 $(X, \mathbf{R})$ 的 $\mathbf{R}$ 上的集函数，$A\subset X$. 如果对一切可测集 $E\in\mathbf{R}$，$E\cap A$ 必可测，而且 $\mu(E\cap A)\geqslant 0$(或 $\mu(E\cap A)\leqslant 0$)，那末称 A 是 μ 的**正集**(或**负集**).

定理 1　(Hahn 分解定理)　设 μ 是定义在可测空间 $(X, \mathbf{R})$ 的 $\mathbf{R}$ 上的集函数，满足 $\mu(\varnothing)=0$，可列可加，永不取 $-\infty$ 值. 这时必存在 μ 的正、负集 A、B，使得 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=X$.

证　第一步，找出 μ 的"最大"的可测负集. 令

$$\alpha=\inf\{\mu(C)\,|\,C \text{ 是可测的负集}\}$$

取可测负集序列 $\{C_n\}$，使得 $\mu(C_n)\to\alpha$. 因为可测负集的和、差、可列和仍是可测负集，因此，集

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(C_n-\bigcup_{j=1}^{n-1}C_j\right)$$

是可测负集，而且易知 $\mu(B)=\alpha$②.

第二步，证明 $A=X-B$ 是 μ 的正集. 对任何 $E\in\mathbf{R}$，因为 $E\cap A=E-E\cap B$，所以 $E\cap A$ 是可测集. 显然，关键是要证明 $\mu(E\cap A)\geqslant 0$. 假如不对，必有 A 的可测子集 E_0，使得 $\mu(E_0)<0$. 显然，E_0 不可能再是可测负集了(否则 $\mu(B\cup E_0)=\mu(B)+\mu(E_0)<\alpha$，这与 α 的定义相矛盾)，因此，必有 E_0 的可测子集 $\tilde{E}_1$，$\mu(\tilde{E}_1)$

① 本书中总假定 $-\infty$ 永不能作为 μ 的值.

② 因为假定 $\mu(E)\neq-\infty$ $(E\in\mathbf{R})$，由此顺便得到 $\alpha>-\infty$.

>0. 对$\bar{E}_1$, 必有自然数k, 使得$\mu(\bar{E}_1)\geqslant\frac{1}{k}$. 记一切适合这个条件的$k$中最小数为$k_1$, 对于$k_1$, 必有$E_0$的可测子集$E_1$, 使得$\mu(E_1)\geqslant\frac{1}{k_1}$. 显然从$E_0$中挖去$E_1$后的$(E_0-E_1)$满足$\mu(E_0-E_1)=\mu(E_0)-\mu(E_1)\leqslant\mu(E_0)-\frac{1}{k_1}<0$. 继续用$E_0-E_1$代替原来的$E_0$地位, 重复上面讨论就有可测集$E_2\subset E_0-E_1$, $\mu(E_2)\geqslant\frac{1}{k_2}\left(k_2\geqslant k_1\right)$, $\mu(E_0-E_1-E_2)\leqslant\mu(E_0-E_1)-\frac{1}{k_2}$, 如此继续下去, 得到

$$E_n\subset E_0,\qquad E_n\cap E_m=\varnothing(n\neq m),\qquad m,n=1,2,\cdots$$

$$k_1\leqslant k_2\leqslant\cdots\leqslant k_n\leqslant\cdots,\ \mu(E_n)\geqslant\frac{1}{k_n},\quad n=1,2,\cdots$$

显然$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}=0$, 否则将有$\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)\geqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n}=\infty$. 但$E_0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\bigcup\left(E_0-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)$, 根据$\mu$的有限可加性(可列可加的特殊情况), $\mu(E_0)=\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)+\mu\left(E_0-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)$以及$\mu(E_0)<0$, 将得$\mu\left(E_0-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=-\infty$, 显然这与假设不取$-\infty$矛盾.

既然$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}=0$. 这表明可测集$F=E_0-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$只能是负集. 但由于$\mu(F)=\mu(E_0)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<\mu(E_0)<0$, 与$E_0$不是负集的理由完全一样, F也不可能是负集. 这就发生矛盾. 因而A是正集. 证毕.

例如例1中的情况, 由可积函数f定义出的$\nu(E)$就可以看成

带符号的测度，对于ν，集$A=X(f\geqslant 0)$、$B=X(f<0)$就分别是ν的正、负集．当然，取集$A_1=X(f>0)$、$B_1=X(f\leqslant 0)$，它们分别也是ν的正、负集．所以一般说来 Hahn 分解并不唯一．但有如下结果．

系 如果μ满足定理1的条件，(A_1,B_1)、(A_2,B_2)分别是μ的两个 Hahn 分解，那末，必对任何可测集E

$$\mu(E\cap A_1)=\mu(E\cap A_2),\ \mu(E\cap B_1)=\mu(E\cap B_2)$$

证 因为

$$E\cap(A_1-A_2)\subset E\cap A_1,\quad E\cap(A_1-A_2)\subset E\cap B_2$$

A_1、B_2分别是正、负集，所以$\mu(E\cap(A_1-A_2))=0$．交换A_1、A_2位置，就又有$\mu(E\cap(A_2-A_1))=0$．因此

$$\mu(E\cap A_1)=\mu(E\cap A_1\cap A_2)=\mu(E\cap A_2)$$

同样，$\mu(E\cap B_1)=\mu(E\cap B_2)$．证毕．

系表明，从测度方面来看，Hahn 分解实质上是唯一的．由此引入下面几个重要的测度(容易验证它们是测度)

$$\mu^+(E)=\mu(E\cap A),\quad \mu^-(E)=-\mu(E\cap B) \tag{8.6}$$

$$|\mu|(E)=\mu^+(E)+\mu^-(E) \tag{8.7}$$

$$(E\in\boldsymbol{R})$$

分别称μ^+、μ^-、$|\mu|$为μ的**正变差测度**、**负变差测度**、**全变差测度**．并且显然有

$$\mu(E)=\mu^+(E)-\mu^-(E), \tag{8.8}$$

$$|\mu|(E)\geqslant|\mu(E)| \tag{8.9}$$

这样，我们得到类似有界变差函数的 Jordan 分解的定理．

定理 2 (Jordan 分解定理) 设μ是定义在可测空间$(X,\boldsymbol{R})$的$\boldsymbol{R}$上的集函数．满足$\mu(\varnothing)=0$，μ是可列可加的，并且μ永不取到$-\infty$．那末必有$\mu(E)=\mu^+(E)-\mu^-(E)$ $(E\in\boldsymbol{R})$，并且存在正数α，使得一切$E\in\boldsymbol{R}$，$\mu^-(E)\leqslant\alpha$．

读者自己证明这个定理.

Jordan 分解定理说明，带符号的测度就是广义测度，和有界变差函数的分解一样，有如下系.

系 设 $\mu=\mu_1-\mu_2$ 是 $(X,\boldsymbol{R})$ 上广义测度，那末对一切 $E\in\boldsymbol{R}$，

$$\mu_1(E)\geqslant\mu^+(E),\ \mu_2(E)\geqslant\mu^-(E),\ (\mu_1+\mu_2)(E)\geqslant|\mu|(E)\tag{8.10}$$

证 由(8.6)，对任何 $E\in\boldsymbol{R}$，$\mu^+(E)=\mu(E\cap A)=\mu_1(E\cap A)-\mu_2(E\cap A)\leqslant\mu_1(E\cap A)\leqslant\mu_1(E)$. 同样，$\mu_2(E)\geqslant\mu^-(E)$. 由此易知 $(\mu_1+\mu_2)(E)\geqslant|\mu|(E)$. 证毕.

系表明，广义测度的 Jordan 分解是一切分解 $\mu=\mu_1-\mu_2$ 中达到某种意义下的极值的分解. 今后都采用这种分解.

对于广义测度，我们同样可以引入如下一些概念.

定义 设 μ 是可测空间 $(X,\boldsymbol{R})$ 上广义测度，如果对任何 $E\in\boldsymbol{R}$，$\mu(E)<\infty$①，称 μ 为**有限的**；如果 $X\in\boldsymbol{R}$，有限的广义测度称为**全有限的**；如果对每个 $E\in\boldsymbol{R}$，总存在 $\{E_n\}\subset\boldsymbol{R}$，$\mu(E_n)<\infty$，$E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，称 μ 为**σ-有限的**；如果 $X\in\boldsymbol{R}$，σ-有限的广义测度称为**全 σ-有限的**.

从 Jordan 分解，读者很容易证明下面性质

(i) μ 是有限的充要条件是 $|\mu|$ 为有限的；

μ 是全有限的充要条件是 $|\mu|$ 为全有限的.

(ii) μ 是 σ-有限的充要条件是 $|\mu|$ 是 σ-有限的；

μ 是全 σ-有限的充要条件是 $|\mu|$ 是全 σ-有限的.

3. 关于广义测度的积分 和普通测度一样，类似地引入函数关于广义测度的积分.

---

① 我们书中规定，$\mu(E)$ 不取 $-\infty$ 值，所以，$\mu(E)<\infty$ 就是 $-\infty<\mu(E)<\infty$.

定义　设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是广义测度空间，f是E上可测函数．如果f在E上关于$|\mu|=\mu^{+}+\mu^{-}$是可积的(等价于f在E上同时关于μ^{+}、μ^{-}可积)，那末称f在E上关于μ可积分，称

$$\int_{E} f d\mu^{+}-\int_{E} f d\mu^{-}$$

是f在E上关于μ的积分，记为$\int_{E} f d\mu$.

特别，如果$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是$(E^{1}, \boldsymbol{B}, g)$或$(E^{1}, \boldsymbol{L}^{g}, g)$，这里$g$是$E^{1}$上有界变差函数(即可分解成$E^{1}$上两个单调函数之差的函数)，上述积分就仍称为勒贝格-斯蒂阶积分。

和普通函数一样，当f是复值函数时，我们只要分别考察$\mathrm{Re}f$、$\mathrm{Im}f$的积分就可以了．

关于广义测度的积分，有完全类似于普通测度积分的性质．

定理 3　设$(X, \boldsymbol{R}, \mu)$是广义测度空间，那末有如下性质：

1°　任何$\mu(E)<\infty$的集E上的有界可测函数关于μ总是可积的．

2°　设f、h关于μ在E上可积，α、β是任何两个常数，那末$\alpha f+\beta h$关于μ也是在E上可积的，而且

$$\int_{E}(\alpha f+\beta h) d\mu=\alpha \int_{E} f d\mu+\beta \int_{E} h d\mu$$

3°　如果f、h在E上关于$|\mu|$几乎处处相等，并且f可积，那末

$$\int_{E} f d\mu=\int_{E} h d\mu$$

4°　对任何E上可积的函数f，总有

$$\left|\int_{E} f d\mu\right| \leqslant \int_{E}|f| d|\mu|$$

特别，当g是$[a, b]$上有界变差函数时，

$$\left|\int f dg\right| \leqslant \int |f|\,|dg|$$①

5° 如果 f 在 E 上可积，那末对任何 $\varepsilon>0$，一定存在 $\delta>0$，当 $e\subset E$，$|\mu|(e)<\delta$ 时，

$$\left|\int_e f d\mu\right|<\varepsilon$$

6° 如果 $\{E_n\}$ 是一列互不相交的可测集，那末 f 在 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 上关于 μ 可积的充要条件是

(i) f 在 E_i，$i=1,2,\cdots$ 上关于 μ 可积；

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}|f|d|\mu|<\infty$.

当 f 在 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 上可积时，成立着

$$\sum_i \int_{E_i} f d\mu = \int_{\bigcup_i E_i} f d\mu$$

特别，当 $g\in V_0[a,b]$ 时，对任何 $c\in(a,b)$，

$$\int_{[a,b]} f dg = \int_{[a,c]} f dg + \int_{(c,b]} f dg = \int_{[a,c)} f dg + \int_{[c,b]} f dg$$

7° （控制收敛定理） 设 $\{f_n\}$ 是 E 上可积的函数列，如果 f_n 关于 $|\mu|$ 几乎处处收敛于 f，而且存在可积的函数 F，使得

$$|f_n|<F,\quad n=1,2,\cdots$$

关于 $|\mu|$ 几乎处处成立，那末

---

①"$|dg|$"是分析数学中一般通常用的记号，表示 g 的全变差 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(g)$ 所导出的测度的微分，即"$d\overset{x}{\underset{a}{V}}(g)$"。

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu=\int\lim_{n\to\infty}f_n d\mu$$

因为这些性质均属明显，我们不去证明了．读者必须注意的是，凡是以前普通测度的积分中所说的"零集"、"几乎处处"之类的条件，现在都要改成关于$|\mu|$的"零集"、"几乎处处"．这是因为对广义测度μ来说，它的零集可以很"大"，例如一个非零的广义测度，全空间X却可以是它的零集．具体例子如$X=[0, 2\pi]$，$g(x)=\sin x$．由$g(x)$导出$[0, 2\pi]$上所有 Borel 集上的广义测度g，这时$g([0, 2\pi])=g(2\pi)-g(0)=0$．其次，凡是关于普通测度的积分理论中要通过不等式的估计才能得到的性质（例如一切极限性质等等），那里的条件都得改为关于测度$|\mu|$的条件．这种条件的更改是由于广义测度μ是可以取正、负值所造成的．读者如能实地地去推导一些性质就不难正确地把握了．

当μ_1、μ_2是$(X, \mathbf{R})$上两个普通测度，μ_2是有限的，如果f在E上关于$\mu=\mu_1-\mu_2$可积，一般地说，f并不一定关于μ_1、μ_2是可积的（请读者举一个例子），但有如下结果．

引理 2　如果$\mu=\mu_1-\mu_2$是$(X, \mathbf{R})$上广义测度，f在E上关于μ_1、μ_2都可积，那末f在E上必关于μ可积．当可积时，有

$$\int_E f d\mu=\int_E f d\mu_1-\int_E f d\mu_2 \tag{8.11}$$

证　从(8.10)，即从$\mu^+\leqslant\mu_1$、$\mu^-\leqslant\mu_2$，立即知道f关于μ^+、μ^-在E上可积（可参见§3 习题 12）．又由于$\mu_1-\mu_2=\mu^+-\mu^-$，即$\mu_1+\mu^-=\mu_2+\mu^+$，因此

$$\begin{aligned}\int_E f d\mu_1+\int_E f d\mu^-&=\int_E f d(\mu_1+\mu^-)=\int_E f d(\mu_2+\mu^+)\\&=\int_E f d\mu_2+\int_E f d\mu^+\end{aligned} \tag{8.12}$$

上面第一、三两个等式是利用§3 习题 12 得到的．由(8.12)立即

得到(8.11). 证毕.

下面是关于测度的线性.

定理 4 (线性) 设 μ、ν 是 $(X, \boldsymbol{R})$ 上的两个广义测度. 如果 f 在 E 上关于 μ、ν 可积, 那末, 对任何常数 α、β,

$$\int_E f d(\alpha\mu+\beta\nu)=\alpha\int_E f d\mu+\beta\int_E f d\nu \tag{8.13}$$

证 我们仅考察 $\alpha\geqslant 0$, $\beta\leqslant 0$ 的情况(其它情况由读者补证). 这时

$$\alpha\mu+\beta\nu=(\alpha\mu^+-\beta\nu^-)-(\alpha\mu^--\beta\nu^+)$$

因为 f 关于 μ^+、μ^-、ν^+、ν^- 可积, 因此 f 关于测度 $\alpha\mu^+-\beta\nu^-$、$\alpha\mu^--\beta\nu^+$ 在 E 上可积. 由引理 2, f 关于 $\alpha\mu+\beta\nu$ 在 E 上可积, 并且

$$\int_E f d(\alpha\mu+\beta\nu)=\int_E f d(\alpha\mu^+-\beta\nu^-)-\int_E f d(\alpha\mu^--\beta\nu^+)$$

因为 $\alpha\mu^+-\beta\nu^-=\alpha\mu^++(-\beta)\nu^-$, $\alpha\mu^--\beta\nu^+=\alpha\mu^-+(-\beta)\nu^+$ 易知

$$\int_E f d(\alpha\mu^+-\beta\nu^-)=\alpha\int_E f d\mu^++(-\beta)\int_E f d\nu^-$$

$$\int_E f d(\alpha\mu^--\beta\nu^+)=\alpha\int_E f d\mu^-+(-\beta)\int_E f d\nu^+$$

由此立即可以得到(8.13). 证毕.

4. R-N导数 对于广义测度, 除了有类似有界变差函数的 Jordan 分解, 也有类似于全连续函数的牛顿-莱布尼兹公式的结果, 通常称为拉东-尼古丁(Radon-Nikodym)定理, 还有类似的有界变差函数的勒贝格分解定理. 为此, 先推广全连续概念. 当然要把直线中启发引入全连续函数概念时的不定积分这种点函数 $F(x)$(见(7.4))换成:

$$\nu(E)=\int_E f d\mu, \qquad E\in\boldsymbol{R}$$

$\nu(E)$是$(X, \boldsymbol{R})$上的集函数, 是广义测度. 由积分全连续性的启

发，我们可以引入一个测度关于另一个广义测度全连续的概念．

定义　设 ν、μ 是可测空间 $(X, \mathbf{R})$ 上两个广义测度．如果对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，使得对任何 $E\in\mathbf{R}$，只要 $|\mu|(E)<\delta$ 时，就有 $|\nu(E)|<\varepsilon$，那末称 ν 关于 μ 是**强全连续**．

上述全连续概念完全是仿照§7直线上的情况．读者容易证明：ν 关于 μ 强全连续的充要条件是 $|\nu|$ 关于 μ 为强全连续，或者充要条件是 ν^+、ν^- 同时关于 μ 为强全连续的．

但在一般测度论中，常用的是比强全连续要求弱一点的下面的全连续概念．

定义　设 ν、μ 是可测空间 $(X, \mathbf{R})$ 上两个广义测度．如果从 $|\mu|(E)=0$ 必可推出 $|\nu(E)|=0$，那末，称 ν 关于 μ 为**全连续**，记为 $\nu\ll\mu$

从定义先得到今后有用的下面事实．

引理 3　下面三件事是等价的：

(i) $\nu\ll\mu$

(ii) $\nu^+\ll\mu, \nu^-\ll\mu$．

(iii) $|\nu|\ll\mu$

证　(i)⇒(ii) 记 A、B 为 ν 的正、负集，$A\cup B=X$，$A\cap B=\varnothing$．设 $E\in\mathbf{R}$，$|\mu|(E)=0$，因而 $|\mu|(E\cap A)=|\mu|(E\cap B)=0$．根据(i)成立，必然 $|\nu(E\cap A)|=0$，$|\nu(E\cap B)|=0$，即 $\nu^+(E)=\nu(E\cap A)=0$，$\nu^-(E)=-\nu(E\cap B)=0$．从而(ii)成立．

(ii)⇒(iii)⇒(i)都是显然的．证毕．

利用引理 3 就得到下面有关强全连续和全连续关系的命题．

引理 4　(i) ν 关于 μ 强全连续时，ν 必关于 μ 全连续；(ii) 如果 ν 是有限的，那末，ν 关于 μ 强全连续等价于 ν 关于 μ 全连续．

证　(i)由强全连续假设，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $|\mu|(E)$

$<\delta$ 时，$|\nu|(E)<\varepsilon$. 特别，当 E 是 $|\mu|$ 零集时，对任何 δ, $|\mu|(E)<\delta$ 成立，所以 $|\nu(E)|<\varepsilon$. 再令 $\varepsilon\to 0$, 便得到 $|\nu(E)|=0$, 即 $\nu\ll\mu$.

(ii) 由 (i) 知道，只要证明在 ν 是有限的条件下，由全连续能推出强全连续. 假如不对，即 ν 关于 μ 不强全连续，自然 $|\nu|$ 关于 μ 不强全连续. 因而存在 $\varepsilon_0>0$, 对任取 $\delta=\frac{1}{2^n}$ $(n=1,2,\cdots)$, 相应地有 $E_n\in\mathbf{R}$, $|\mu|(E_n)<\frac{1}{2^n}$, 但 $|\nu|(E_n)>\varepsilon_0$. 从而 $|\nu|\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k\right)>\varepsilon_0$ $(n=1, 2, \cdots)$. 但 $\left\{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k\right\}$ 是单调下降序列，并且 $|\mu|\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k\right)\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}<\infty$, 记 $F=\lim\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k$ 所以 $|\mu|(F)=0$. 另一方面，又假设 ν 是有限的，因而 $|\nu|\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k\right)<\infty$, 从而

$$|\nu|(F)=\lim_{n\to\infty}|\nu|\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\right)\geqslant\varepsilon_0$$

这就是说 $|\nu|$ 关于 μ 不全连续. 但根据引理 3, $\nu\ll\mu$ 等价于 $|\nu|\ll\mu$, 所以这不可能，因而 ν 关于 μ 为强全连续. 证毕.

因为在一般情况下，σ- 有限测度总是化成可列个测度有限集上去考虑. 因而，上述全连续概念在一般测度论中已足够应用了，

注意，即使在全 σ- 有限测度情况，两种全连续性并不等价.

例 3 $(E^1, \mathbf{B})$ 是直线上 Borel 可测空间，取 $\mu=m$, ν 取为 $g(x)=x^3$ 所导出的勒贝格-斯蒂阶测度. 由于

$$\nu((a,b])=g(b)-g(a)=g'(\theta)(b-a)=\theta^2\mu((a,b]),\ a<\theta<b$$

易知 ν 关于 μ 不是强全连续的(因为 θ^2 值可以任意地大).

但 ν 关于 μ 却是全连续的. 事实上，如果 $E\in\mathbf{B}$, $\mu(E)=0$. 如

记$E_n=E\cap(n,n+1]$($n=0,\pm1,\pm2,\cdots$),那末$E=\bigcup_{-\infty}^{\infty}E_n$, $\mu(E_n)=0$. 把μ、ν都限制在$((n,n+1],\mathbf{B}\cap(n,n+1])$上, 对任何$F\in\mathbf{B}\cap(n,n+1]$,易知

$$\nu(F)=g(F)=\int_F g'(t)dt=\int_F t^2dt$$

函数t^2在$(n,n+1]$上是勒贝格可积的, 特别取$F=E_n$时, 便有$\nu(E_n)=0$. 再由ν的可列可加性, 得到$\nu\left(\bigcup_{-\infty}^{\infty}E_n\right)=0$. 例子证毕.

如果我们采用"积分"可以取无限大值(参见本章§4第三小节的说明),容易知道, 对任何$E\in\mathbf{B}$, 上例中$\nu(E)$可表示成下面形式(参见§4习题12)

$$\nu(E)=\int_E t^2d\mu\ (d\mu=dt)$$

函数$g(x)=x^3$的导函数$g'(x)=x^2$, 正是集函数ν关于μ的"密度"函数.

对于一般测度空间, 如§4习题12所指出. 如果$(X,\mathbf{R},\mu)$是全σ-有限测度空间,f是X上非负可测函数, 那末, 由f定义的集函数

$$\nu(E)=\int_E fd\mu,\qquad E\in\mathbf{R}\tag{8.14}$$

是$(X,\mathbf{R})$上的全σ-有限测度, 并且从$\mu(E)=0$必可推出$\nu(E)=0$.

下面我们要证明两个全σ-有限的广义测度, 如果$\nu\ll\mu$, 那末ν必表示成(8.14)形式(当然函数f不一定是非负的了). 通常称它为Radon-Nikodym定理, 简称为R-N定理, 而称f为ν关于μ的Radon-Nikodym导数(R-N导数), 记为$\frac{d\nu}{d\mu}$.

定理 5 (Radon-Nikodym) 设 ν、μ 是 $(X, \boldsymbol{R})$ 上两个全 σ-有限的广义测度, 如果 $\nu \ll \mu$, 那末必存在 $(X, \boldsymbol{R})$ 上有限可测函数 f, 使得

$$\nu(E)=\int_E f d\mu, \qquad E \in \boldsymbol{R} \tag{8.15}$$

并且这里的 f 是由 ν 唯一确定的 (除去一个 $|\mu|$-零集上的值有差别之外).

证 第一步, 先证唯一性. 如果又有 X 上可测函数 h, 使得

$$\nu(E)=\int_E h d\mu, \qquad E \in \boldsymbol{R} \tag{8.16}$$

这时, 令 A^+、A^- 分别为 μ 的 Hahn 分解的正、负集, $A^+ \cap A^- = \varnothing$, $A^+ \cup A^- = X$. 由于

$$0=\nu(X(h>f) \cap A^{\pm})-\nu(X(h>f) \cap A^{\pm})$$

$$=\int_{X(h>f)\cap A^{\pm}} h d\mu-\int_{X(h>f)\cap A^{\pm}} f d\mu=\int_{X(h>f)\cap A^{\pm}}(h-f) d\mu$$

由于被积函数是定号的, 从上式立即得到 $|\mu|(X(h>f))=0$, 同样可证 $|\mu|(X(f>h))=0$, 即 $f \underset{|\mu|}{=} h$.

第二步, 在 μ, ν 都是全有限测度情况下, 证明存在 f, 使得 (8.15) 成立:

(I) 先解决如何从集函数条件 $\nu \ll \mu$ 来找出点函数 f. 较自然的想法是从"下方"逼近所要求的 f: 记 $\mathscr{L}$ 是 $(X, \boldsymbol{R})$ 上满足

$$\int_E h d\mu \leqslant \nu(E), \qquad E \in \boldsymbol{R} \tag{8.17}$$

的非负可测函数 h 的全体. 显然, $\mathscr{L} \neq \varnothing$ (至少 $h=0$ 属于 $\mathscr{L}$). 可以设想, 要求的 f 应是 $h \in \mathscr{L}$ 的"上确界"函数. 显然不能简单地取 $f=\sup_{h \in \mathscr{L}} h$ (f 的函数值可能处处无限大, 另外 f 的可测性没法保证).

为了找 f, 令 $\alpha=\sup_{h \in \mathscr{L}}\left\{\int_X h d\mu\right\} \leqslant \nu(X)<\infty$. 任取一列

$h_n\in\mathscr{L}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_X h_n d\mu=\alpha \tag{8.18}$$

记 $f_0=\sup_n\{h_n\}=\lim_{n\to\infty}\max(h_1,\cdots,h_n)$. 为了证明 f_0 实质上就是所要求的 f，先证 $f_0\in\mathscr{L}$：事实上，对每个 n，必存在 n 个互不相交的集 $E_1,\cdots E_n$，$X=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$，使得 $x\in E_i$ 时，可测函数 $f_n(x)=\max(h_1(x),\cdots h_n(x))$ 就是 $h_i(x)$. 由(8.17)，对任何 $E\in\boldsymbol{R}$，

$$\int_E f_n d\mu=\int_{\bigcup_{i=1}^{n}(E\cap E_i)}f_n d\mu=\sum_{i=1}^{n}\int_{E\cap E_i}h_i d\mu$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\nu(E\cap E_i)=\nu(E) \tag{8.19}$$

即 $f_n\in\mathscr{L}$. 但 $f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_n\leqslant\cdots$，由 Levi 引理知道 $f_0=\lim_{n\to\infty}f_n$ 是 $(X,\boldsymbol{R},\mu)$ 上可积函数. 由(8.18)、(8.19)还可以得到

$$\int_X f_0 d\mu=\alpha,\qquad \int_E f_0 d\mu\leqslant\nu(E),\quad E\in\boldsymbol{R} \tag{8.20}$$

因为 $f_0=\infty$ 的点最多是 μ-零集，所以不妨设 f_0 本身就是有限函数(否则改变某个 μ-零集上函数值就可以了).

(II) 证明 f_0 就是所要求的"上确界函数" f：如令

$$\nu_0(E)=\nu(E)-\int_E f_0 d\mu,\quad E\in\boldsymbol{R}$$

显然，就是要证明对一切 $E\in\boldsymbol{R}$，$\nu_0(E)=0$. 如果不对，那末必有某个 $E_0\in\boldsymbol{R}$，$\nu_0(E_0)\neq0$. 注意，由(8.20)知道，ν_0 是 $(X,\boldsymbol{R})$ 上测度. 根据 $\nu_0(E_0)>0$，必有自然数 n，使得 $\left(\nu_0-\frac{1}{n}\mu\right)(E_0)>0$. 根据 Hahn 分解定理，必有(不妨取为可测的)集 A，$\left(\nu_0-\frac{1}{n}\mu\right)(A)$

>0，而且对一切 A 的可测子集 A_1，$\left(\nu_0-\frac{1}{n}\mu\right)(A_1)\geqslant 0$①．我们说这不可能，因为由 $\nu\ll\mu$ 以及$\left(\nu_0-\frac{1}{n}\mu\right)(A)>0$，必有 $\mu(A)>0$（否则由 $\mu(A)=0$，推出 $\nu(A)=0$，更有 $\nu_0(A)=0$，从而 $\left(\nu_0-\frac{1}{n}\mu\right)(A)=0$）．作函数

$$f_1=f_0+\frac{1}{n}\chi_A$$

此地 χ_A 是集 A 的特征函数．显然，对任何 $E\in\mathbf{R}$，

$$\begin{aligned}\int_E f_1d\mu&=\int_{E\cap A}\left(f_0+\frac{1}{n}\chi_A\right)d\mu+\int_{E-A}f_0d\mu\\&\leqslant(\nu-\nu_0)\ (E\cap A)+\frac{1}{n}\mu(E\cap A)+\nu(E-A)\\&\leqslant\nu(E\cap A)+\nu(E-A)=\nu(E)\end{aligned}$$

即$f_1\in\mathscr{L}$．可是

$$\int_X f_1d\mu=\int_X f_0d\mu+\frac{1}{n}\int_X\chi_Ad\mu=\alpha+\frac{1}{n}\mu(A)>\alpha$$

这与 α 是$\mathscr{L}$类中积分的上确界相矛盾．所以 $\nu_0=0$，因此 $f_0=\frac{d\nu}{d\mu}$.

第三步，证明当 ν、μ 是两个全 σ-有限的测度时，存在 f 使得(8.15)成立：

由于 ν、μ 的全 σ-有限性，存在两个互不相交的序列$\{E_n\}$、$\{F_m\}$，使得 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=X=\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m$，$\nu(E_n)<\infty$，$\mu(F_n)<\infty$ $(n=1,2,\cdots,\infty)$．显然$\{E_n\cap F_m\}$互不相交（对一切 n,m），并且对 ν、μ 都是有限的序列．把 ν、μ 都限制在$(E_n\cap F_m,\mathbf{R}\cap(E_n\cap F_m))$上，都是全有限的测度，并且仍满足 $\nu\ll\mu$．因而存在 $f_{n,m}$，使得

---

① 这个事实相当于所要找的函数 f 与 f_0 的差 $f-f_0$ 在 A 中大于等于$\frac{1}{n}$.

$$\nu(E)=\int_E f_{n,m}d\mu,\qquad E\in\mathbf{R}\cap(E_n\cap F_m)$$

在X上定义f：当$x\in E_n\cap F_m(n, m=1, 2, \cdots)$时，$f(x)=f_{nm}(x)$. 易知这个$f$便适合要求，即(8.15)成立.

第四步，证明当ν、μ是两个全σ-有限的广义测度时，存在f使得(8.15)成立：

由于$\nu\ll\mu$，所以$\nu\ll|\mu|$，从而$\nu^+\ll|\mu|$，$\nu^-\ll|\mu|$. 由第三步，存在f^+、f^-，使得

$$\nu^+(E)=\int_E f^+d|\mu|,\quad \nu^-(E)=\int_E f^-d|\mu|,\quad E\in\mathbf{R}$$

记$f_0=f^+-f^-$，因而

$$\nu(E)=\int_E f_0d|\mu|,\qquad E\in\mathbf{R}$$

用$A^\pm$表示μ的Hahn分解中的正、负集，令$f=f_0(\chi_{A^+}-\chi_{A^-})$，显然

$$\nu(E)=\int_E f_0d|\mu|=\int_{E\cap A^+}f_0d|\mu|+\int_{E\cap A^-}f_0d|\mu|$$
$$=\int_{E\cap A^+}f_0d\mu-\int_{E\cap A^-}f_0d\mu=\int_E fd\mu$$ 证毕.

现在利用R-N定理将微积分中的下面公式

$$\int_a^b fdu=\int_a^b fu'dx$$

推广到一般测度的情况.

定理6　设ν, μ是$(X,\mathbf{R})$上两个全σ-有限广义测度，$E\subset X$，且$\nu\ll\mu$. 又设f是E上关于$(X,\mathbf{R})$可测的函数. 那末f在E上关于ν可积的充要条件是$f\dfrac{d\nu}{d\mu}$在E上关于μ可积. 当可积时，下式成立：

$$\int_E fd\nu=\int_E f\frac{d\nu}{d\mu}d\mu\tag{8.21}$$

证 我们只证 ν、μ 都是测度的情况.

第一步,证明当 f 是 E 的可测子集 A 的特征函数 χ_A 时必要性成立: $f=\chi_A$ 关于 ν 可积就是 (8.21) 的左边积分存在, 而且 $\int_E f d\nu=\nu(E\cap A)<\infty$, 而(8.21)的右边

$$\int_E \chi_A \frac{d\nu}{d\mu} d\mu=\int_{E\cap A}\frac{d\nu}{d\mu}d\mu=\nu(E\cap A)$$

即(8.21)右边积分不仅存在,而且确实与该等式左边相等.

第二步,证明当 f 是 E 上的非负可测函数时必要性成立: 作

$$f_n=\sum_0^{2^{n+1}}\frac{i}{2^n}\chi_{E\left(\frac{i}{2^n}\leqslant f<\frac{i+1}{2^n}\right)} \qquad n=1,2,\cdots,$$

显然$\{f_n\}$是单调增加序列, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$(处处收敛). 由 f 在 E 上关于 ν 的可积性,易知 f_n 都是关于 ν 可积的,并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\nu=\int_E f d\nu \tag{8.22}$$

根据第一步,易知(8.21)对 f_n成立,即

$$\int_E f_n d\nu=\int_E f_n\frac{d\nu}{d\mu}d\mu \quad n=1,2,\cdots \tag{8.23}$$

但$\left\{f_n\dfrac{d\nu}{d\mu}\right\}$也是单调增加序列,并且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n\dfrac{d\nu}{d\mu}=f\dfrac{d\nu}{d\mu}$(处处收敛), 从(8.22)便知(8.23)右边积分有上界. 由 Levi 引理,

$$\int_E f d\nu=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\nu=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\frac{d\nu}{d\mu}d\mu=\int_E f\frac{d\nu}{d\mu}d\mu$$

第三步, 对一般的关于 ν 可积函数 f, 分解 $f=f^+-f^-$, $f^\pm$ 都关于 ν 可积, 分别对 f^+、f^- 用第二步结论, 并注意到 $f^\pm\dfrac{d\nu}{d\mu}=\left(f\dfrac{d\nu}{d\mu}\right)^\pm$, 立即得到

$$\int_E f d\nu=\int_E f^+d\nu-\int_E f^-d\nu=\int_E f^+\frac{d\nu}{d\mu}d\mu-\int_E f^-\frac{d\nu}{d\mu}d\mu$$

$$=\int_E f\frac{d\nu}{d\mu}d\mu$$

上面证明了必要性，以及等式(8.21)成立，下面证明充分性.

第四步，将第一、二、三步中的每步证明过程反过来就可证明：如果 $f\dfrac{d\nu}{d\mu}$ 关于 μ 可积，必可推出 f 关于 ν 也可积(自然(8.21)也成立).

对 ν、μ 都是测度时，定理 6 已被证明. 至于一般情况的证明将留给读者作为练习.

现在给出定理 6 在直线上的具体形式，它是通常分析数学中常用的.

系 1 设 $g\in V_0[a,b]$，h 是$[a,b]$上关于 g 可积的函数. 作函数

$$u(x)=\begin{cases}0, & x=a\\ \int_a^x hdg, & x\in(a,b]\end{cases} \tag{8.24}$$

那末 (i)$u(x)\in V_0[a,b]$； (ii)$[a,b]$上 Borel 可测函数 f 关于测度 u (由$u(x)$产生的)可积的充要条件是 fh 关于 g 可积. (iii) 当 f 关于 u 可积时，下式成立

$$\int_a^b fdu=\int_a^b fhdg \tag{8.25}$$

本系 1 是定理 6 的直接推论，不予证明. 但必须注意：当$g(t)$在 $t=a$ 点连续时，(8.24)中定义的 $u(x)$就是

$$\bar{u}(x)=\int_a^x hdg,\ x\in[a,b]$$

当 $g(t)$ 在 $t=a$ 点不连续时，只有(8.24)定义的 $u(x)$才属于 $V_0[a,b]$，更重要的是它产生的测度才与测度

$$u(E)=\int_E hdg \qquad E\in\boldsymbol{B}\cap[a,b] \tag{8.26}$$

相符合(由(8.26)定义的测度才是适合定理6的测度). 由 $\bar{u}(x)$ 产生的测度 $\bar{u}$ 在单点集 $\{a\}$ 上有 $\bar{u}(\{a\})=0$, 而

$$u(\{a\})=\int_{[a,a]} hdg=h(a)[g(a+0)-g(a)]$$

一般地说 $u(\{a\})\neq 0$. 在考察勒贝格-斯蒂阶积分时, 这种地方应特别当心.

当然, 对于无限区间也有类似于系1的结果.

下面的系是更为特殊的, 但也是很重要的.

系2 设 $u(x)$ 是 $[a, b]$ 上的全连续函数, f 是 $[a, b]$ 上 Borel 可测函数, 那末, f 关于测度 u (由 $u(x)$ 产生的) 可积的充要条件是 fu' ($u'(x)$ 是 $u(x)$ 的导函数) 是勒贝格可积的. 当可积时, 有

$$\int_a^b fdu=\int_a^b fu'dx \tag{8.27}$$

只要在系1中取 $h=u'$, $g=m$ 立即就得到系2.

下面是分部积分公式

系3 设 f、g 是 $[a, b]$ 上两个全连续函数, 那末

$$f(b)g(b)-f(a)g(a)=\int_a^b fdg+\int_a^b gdf \tag{8.28}$$

证 因为 fg 也是全连续函数, 由牛顿-莱布尼兹公式以及(8.27)就得到

$$f(b)g(b)-f(a)g(a)=\int_a^b (fg)'dx=\int_a^b fg'dx+\int_a^b f'gdx$$
$$=\int_a^b fdg+\int_a^b gdf$$

5. 勒贝格分解 现在将有界变差函数的勒贝格分解推广到一般测度的情况. 先引入测度相互奇异的概念:

定义 设 ν、μ 是可测空间 $(X, \boldsymbol{R})$ 上两个广义测度, 如果存在集 A, 使得对一切 $E\in\boldsymbol{R}$, 有 $E\cap A\in\boldsymbol{R}$, $|\nu|(E\cap A)=0$, $|\mu|(E-A)=0$, 那末, 称 ν、μ 是(相互)**奇异的**, 记为 $\nu\perp\mu$.

显然，ν、μ 是奇异的，意味着 X 被分割成两部分 A、$X-A$，所有 $\mathbf{R}$ 中的元素 E 相应地必分割成两个可测的部分 $E\cap A$、$E-A$，而所有 A 中可测子集都是 $|\nu|$-零集，$X-A$ 中可测集都是 $|\mu|$-零集．当 $\mathbf{R}$ 是 σ-代数时，取 $E=X$，由此可知，此时 A 本身必是可测集．

引理 5　设 ν_1、ν_2、μ 都是可测空间 $(X,\mathbf{R})$ 上广义测测度，$\mathbf{R}$ 是 σ-代数，而且 $\nu_i\perp\mu(i=1,2)$，那末 $(\nu_1\pm\nu_2)\perp\mu$．

证　因为 $\nu_i\perp\mu(i=1,2)$，所以存在 A_i，$|\mu|(A_i)=0$，$|\nu_i|(X-A_i)=0$．显然，$|\nu_1\pm\nu_2|(X-(A_1\cup A_2))\leqslant(|\nu_1|+|\nu_2|)(X-(A_1\cup A_2))=0$，而 $|\mu|(A_1\cup A_2)=0$，所以 $(\nu_1\pm\nu_2)\perp\mu$．证毕．

例 4　设 φ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的跳跃函数，由它产生（即由右连续函数 $g(x)=\varphi(x+0)$ 产生）的广义测度 φ 的测度实际上集中在函数 φ 的不连续点全体 $A=\{x_n\,|\,n=1,2,\cdots,p,\ p\leqslant\infty\}$ 这个集上，即 $\varphi((-\infty,\infty)-A)=0$．然而 $m(A)=0$（m 是勒贝格测度），所以 $\varphi\perp m$．

例 5　设 $(X,\mathbf{R},\mu)$ 是测度空间，$\mathbf{R}$ 是 σ-代数，f_1，f_2 是 X 上非负有限可测函数．作两个测度 ν_1、ν_2：对任何 $E\in\mathbf{R}$，

$$\nu_i(E)=\int_E f_i d\mu,\qquad i=1,2 \tag{8.29}$$

如果 $f_1f_2\underset{\mu}{\doteq}0$，那末取 $A=X(f_1=0)$，便知对任何 $E\in\mathbf{R}$，

$$\nu_1(E\cap A)=0,\qquad \nu_2(E-A)=0$$

即 $\nu_1\perp\nu_2$．反之，由(8.29)产生的两个测度 $\nu_i(i=1,2)$，如果 $\nu_1\perp\nu_2$，显然必有 $f_1f_2\underset{\mu}{\doteq}0$．

例 6　设 $s(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调增加的奇异函数，由它导出 $[a,b]$ 上 Borel 集类上测度 s 必与测度 m 是奇异的．

证　记 $E=\{x\,|\,s'(x)=0\}-\{a,b\}$．注意 E 未必是 Borel 集．由

于 $m([a,b]-E)=0$, 因而存在 Borel 集$G_\delta=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}O_n\supset[a,b]-E$, 其中$O_n$都是开集, $O_n\subset[a,b]$, 而且 $m(G_\delta)=0$. 今取 $A=G_\delta$, 要证明 $s\perp m$, 仅需指出$S([a,b]-G_\delta)=0$即可. 由于$[a,b]-G_\delta=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$, 其中$F_n=[a,b]-O_n$是闭集. 根据测度的次可列可加性, 只要证明 $s(F_n)=0(n=1,2,\cdots)$即可. 下面证明这一点:

固定自然数 n, 因为 $F_n\subset E$, 所以对任何给定的 $\varepsilon>0$, 对每个 $x_0\in F_n$, 总有 $\delta_0(x_0,\varepsilon)$, 使当 $|x'-x_0|<\delta_0(x_0,\varepsilon)$时,

$$\left|\frac{s(x')-s(x_0)}{x'-x_0}\right|<\varepsilon \tag{8.30}$$

因而一切 $\{(x_0-\delta_0(x_0,\varepsilon),\ x_0+\delta_0(x_0,\varepsilon))\,|\,x_0\in F_n\}$ 覆盖 F_n. 利用 Borel 覆盖定理, 可选出有限个区间$(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1),\cdots,(x_k-\delta_k,x_k+\delta_k)$, 使得$\bigcup\limits_{i=1}^{k}(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\supset F_n$, 不妨设$\{(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)\}$互不相交, 利用(8.30)立即得到

$$s(F_n)\leqslant\sum_{1}^{k}s((x_i-\delta_i,x_i+\delta_i))\leqslant\varepsilon(b-a)$$

再令 $\varepsilon\to0$, 就得到 $s(F_n)=0$. 证毕.

定理 7 (勒贝格分解定理) 设 ν、μ 是可测空间 $(X,\mathbf{R})$ 上两个全 σ-有限的广义测度, 那末必存在唯一的全 σ-有限的广义测度ν_s和ν_c, 使得 $\nu=\nu_s+\nu_c$, 而 $\nu_c\ll\mu$, $\nu_s\perp\mu$.

证 第一步, 先对 ν、μ 都是测度的情况证明定理中的分解成立: 由于 $\nu\ll\nu+\mu$, $\mu\ll\nu+\mu$, 所以存在 f_ν、f_μ, 使得

$$\nu(E)=\int_E f_\nu d(\nu+\mu),\ \mu(E)=\int_E f_\mu d(\nu+\mu),\ E\in\mathbf{R}$$

记$A=X(f_\mu>0)$, $X-A=X(f_\mu=0)$. 作$(X,\ \mathbf{R})$上两个全σ-有限测度ν_s、ν_c:

$$\nu_s(E)=\int_E f_\nu \chi_{X-A} d(\nu+\mu),\ \nu_c(E)=\int_E f_\nu \chi_A d(\nu+\mu),\quad E\in \mathbf{R}$$

显然，$\nu=\nu_s+\nu_c$. 其次，对任何$E\in \mathbf{R}$,

$$\mu(E-A)=\int_{E-A} f_\mu d(\mu+\nu)=0$$

$$\nu_s(E\cap A)=\int_{E\cap A} f_\nu \chi_{X-A} d(\nu+\mu)=0$$

即 $\nu_s\perp\mu$. 再证 $\nu_c\ll\mu$: 设 $E\in \mathbf{R}$, 并且 $\mu(E)=0$. 因此 $\mu(E\cap A)=0$, 注意到 f_μ 在 A 上是正的，从

$$0=\mu(E\cap A)=\int_{E\cap A} f_\mu d(\nu+\mu)$$

就可推出$(\nu+\mu)(E)=0$, 从而

$$\nu_c(E)=\int_E f_\nu \chi_A d(\nu+\mu)=\int_{E\cap A} f_\nu d(\nu+\mu)=0$$

即 $\nu_c\ll\mu$.

第二步，证明当 ν、μ 都是广义测度时定理中的分解成立：由第一步，测度 ν^+、ν^-对$|\mu|$而言必分别存在分解

$$\nu^\pm=\nu_s^\pm-\nu_c^\pm,\quad \nu_s^\pm\perp|\mu|,\quad \nu_c^\pm\ll|\mu|$$

所以 (i) $\nu_c^+-\nu_c^-\ll|\mu|$, 即 $\nu_c^+-\nu_c^-\ll\mu$; (ii) 由引理 5, 得到 $(\nu_s^+-\nu_s^-)\perp|\mu|$, 即 $(\nu_s^+-\nu_s^-)\perp\mu$. 从而只要取 $\nu_c=\nu_c^+-\nu_c^-$, $\nu_s=\nu_s^+-\nu_s^-$ 就适合定理中的分解的要求.

第三步，证明唯一性：如又有一组分解 $\nu=\nu_s'+\nu_c'$, 那末

$$\nu_c-\nu_c'=\nu_s'-\nu_s$$

因为 $\nu_c-\nu_c'\ll|\mu|$, 所以对任何 $E\in \mathbf{R}$, 如果 $|\mu|(E)=0$必有$|\nu_c-\nu_c'|(E)=0$. 另一方面，又有$(\nu_c-\nu_c')=(\nu_s'-\nu_s)\perp|\mu|$, 所以存在$|\mu|$一零集$A$, 使得

$$|\nu_c-\nu_c'|(X-A)=|\nu_s'-\nu_s|(X-A)=0$$

从而对任何$E\in \mathbf{R}$, $|\nu_c-\nu_c'|(E)=|\nu_c-\nu_c'|(E\cap A)+|\nu_c-\nu_c'|(E-A)=0$, 即$\nu_c=\nu_c'$, $\nu_s=\nu_s'$. 证毕.

6. 测度唯一性 下面的两个定理主要是为了泛函分析的需要而写的.

定理8 设 $g\in V_0[a,b]$，而且对 $[a,b]$ 上任何正值连续函数 $x(t)$，始终有 $\int_a^b x(t)dg(t)\geq 0$，那 $g(t)$ 必是 $[a,b]$ 上单调增加函数

证 在 $[a,b]$ 上作一列函数 $\{x_n(t)\}$ 如下：

$$x_n(t)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n}, & t\in[a,\beta]\\ 1-n\dfrac{t-\beta}{b-\beta}+\dfrac{1}{n}, & t\in\left(\beta,\ \beta+\dfrac{b-\beta}{n}\right]\\ \dfrac{1}{n}, & t\in\left(\beta+\dfrac{b-\beta}{n},b\right]\end{cases}\quad(n=1,2,\cdots)$$

显然 $|x_n(t)|\leq 2$，$x_n(t)\geq\dfrac{1}{n}$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=\chi_{[a,\beta]}(t)$（图 3.12）．取 $F\equiv 2$ 作为控制函数，由广义测度控制收敛定理（定理3的7°）就得到

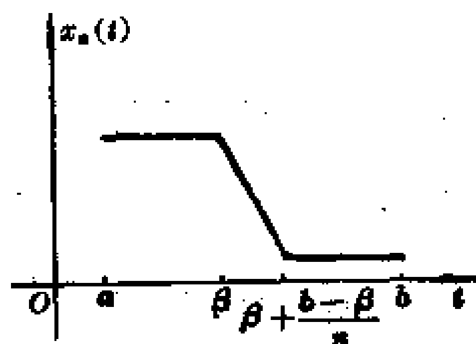


图 3.12

$$g(\beta)-g(a)=\int_a^b\chi_{[a,\beta]}dg=\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n dg\geq 0$$

类似地，对任何 $a<\alpha<\beta\leq b$，作

$$y_n(t)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n}, & t\in\left[\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{n},\ \beta\right]\\ \dfrac{1}{n}, & t\in[a,\alpha)\cup\left(\beta+\dfrac{b-\beta}{n},\ b\right]\\ n\dfrac{t-\alpha}{\beta-\alpha}+\dfrac{1}{n}, & t\in\left[\alpha,\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{n}\right)\\ 1-n\dfrac{t-\beta}{b-\beta}+\dfrac{1}{n}, & t\in\left(\beta,\beta+\dfrac{b-\beta}{n}\right]\end{cases}\quad(n=1,2,\cdots)$$

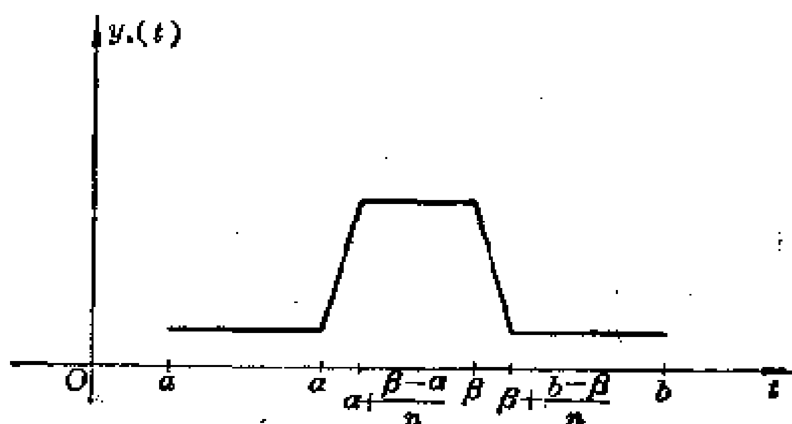


图　3.13

利用控制收敛定理(定理 3 的 7°)得到

$$g(\beta)-g(\alpha)=\int_a^b \chi_{(\alpha,\beta]}dg=\lim_{n\to\infty}\int_a^b y_n dg\geqslant 0$$

由此得到对一切$a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$, 都有$g(\beta)-g(\alpha)\geqslant 0$, 即 g 是单调增加函数. 证毕.

系　设 $g\in V_0[a,b]$, 而且对$[a,b]$上任何连续函数$x(t)$, 始终有$\int_a^b x(t)dg(t)=0$, 那末$g\equiv 0$.

证　根据假设, 对一切正值连续函数, $\int_a^b x(t)dg(t)\geqslant 0$. 由定理 6 立即得到 g 是$[a,b]$上单调增加函数. 又由于

$$\int_a^b x(t)d(-g)=\int_a^b(-x(t))dg$$

所以$(-g)$也应该是$[a,b]$上单调增加函数. g, $(-g)$既都是单调增加函数, 所以只有 $g(t)\equiv$常数. 但是 $g(a)=0$, 所以 $g(t)\equiv 0$. 证毕.

我们注意, 这里条件 $g\in V_0[a,b]$是不能去掉的, 例如, 任取$a<c<b$作函数

$$g(t)=\begin{cases}1, & t=c\\ 0, & t\neq c\end{cases}$$

那末对一切连续函数$x(t)$，都有

$$\int_a^b x(t)dg(t)=0$$

但是 $g\neq0$.

对于周期函数我们也有类似的结果，为了以后的需要我们也把有关结果写于下面.

记$V_{2\pi}$为$V_0[0,2\pi]$中在点$x=0$也保持右连续的函数全体.对任何$g\in V_{2\pi}$，它导出的$[0,2\pi]$上广义测度g显然具有如下性质：对任何$0<\beta\leqslant2\pi$，$g([0,\beta])=g((0,\beta])$，或者说由单独一点$x=0$组成的“闭区间”$[0,0]$的测度$g([0,0])=0$.

定理 8' 设$g\in V_{2\pi}$，如果对任何以2π为周期的正值的三角多项式$T(t)$，始终有$\int_0^{2\pi}T(t)dg(t)\geqslant0$，那末$g(t)$是$[0,2\pi]$上的单调增加函数.

证 利用定理8中所作$\{y_n\}$，并取$a=0$，$b=2\pi$. 显然y_n都是$[0,2\pi]$上连续正值函数，并且$y(0)=y(2\pi)=\frac{1}{n}$，它可以用三角多项式在$[0,2\pi]$上均匀逼近(参看[2])，即对任何一个y_n，总存在三角多项式序列$\{T_m^{(n)}\}$，当$m\to\infty$时，$T_m^{(n)}(t)$均匀收敛于y_n. 由于$\int_0^{2\pi}T_m^{(n)}(t)dg(t)\geqslant0$，利用广义测度控制收敛定理，就得到

$$\int_0^{2\pi}y_n(t)dg(t)=\lim_{m\to\infty}\int_0^{2\pi}T_m^{(n)}(t)dg(t)\geqslant0$$

和定理8一样，再令$n\to\infty$，就得到

$$g(\beta)-g(\alpha)=\int_0^{2\pi}\chi_{(\alpha,\beta]}dg=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}y_n dg\geqslant0.$$

由此得到$0<\alpha<\beta<2\pi$，$g(\beta)-g(\alpha)\geqslant0$. 再根据$g(0)=g(0+0)$，所以对$0\leqslant\alpha<\beta<2\pi$，$g(\beta)-g(\alpha)\geqslant0$也成立，即$g$是$[0,2\pi)$上的单调增加函数. 类似可证$g(2\pi)\geqslant g(x)(x\in[0,2\pi))$. 证毕.

同样可得类似于定理 8 的系，由于以后我们不用它，所以不写了.

7. 测度与积分后记 作为一般集上的测度与积分理论，本书中所介绍的，是目前流行的最一般的形式了. 这些结果在四十年前就有了. 后来，又在某些方面有了推广，例如，向量值测度(即非数值的测度). 在定义域方面，现在已经是一般集了，一般不能再推广，所以，对定义域，往往是再加入一些结构，例如，考察希尔伯特空间，巴拿赫空间，或更一般的是线性拓扑空间、拓扑空间上的测度(数值测度). 近二十多年来，由于各方面需要，特别是理论物理方面的需要，在这方面有较多的讨论. 此外，作为抽象测度的理论，较有代表性的，是出现了在具有某种拓扑结构集上，而取值是具有某种类似于群结构(但不是群)的"测度"和"积分"理论.

另外，引入勒贝格或勒贝格-斯蒂阶积分或更一般的积分的方法，也可以是多种多样的，本书是由测度论建立积分论. 但也有先建立积分论，后建立测度论，这条路线，在直线的情况，首先是由 Daniell 提出的 (见[2]). 这里似乎可以说：有测度便有积分，有积分便有测度，即测度和积分是等价的. 但也必须指出，确实有这样的场合，例如非交换积分，到目前为止，还只有"积分理论"，没有"测度理论".

习 题

1. 设 μ 是可测空间 $(X, \boldsymbol{R})$ 上广义测度，证明 μ^+、μ^-、$|\mu|$ 都是 $(X, \boldsymbol{R})$ 上测度，举例说明 $|\mu(E)|$ $(E\in\boldsymbol{R})$ 不是 $(X, \boldsymbol{R})$ 上测度.

2. 设 μ 是可测空间 $(X, \boldsymbol{R})$ 上广义测度，E 是可测集，$\{E_n\}$ 是 E 的可测剖分(即 $E_n\in\boldsymbol{R}$, $n=1, 2, \cdots, p$, $E_n\cap E_m=\varnothing\ (n\neq m)$, $\bigcup\limits_{n=1}^{p} E_n=E$). 证明

$$|\mu|(E)=\sup_{\{E_n\}}\sum_{n=1}^{p}|\mu(E_n)|,\quad \mu^+(E)=\sup_{\{E_n\}}\sum_{n=1}^{p}\max(\mu(E_n), 0)$$

$$\mu^-(E)=\sup_{\{E_n\}}\sum_{n=1}^{p}\max(-\mu(E),0)$$

3．设 μ_1、μ_2 是可测空间 $(X, \boldsymbol{R})$ 上两个测度，μ_2 是有限的．试举例说明，存在 f，它关于 $\mu=\mu_1-\mu_2$ 在 E 上可积，但 f 关于 μ_1、μ_2 在 E 上并不可积．

4．证明，ν 关于 μ 是强全连续的充要条件是 $|\nu|$ 关于 μ 强全连续，或者充要条件是 ν^+、ν^- 同时关于 μ 强全连续．

5．举出一个在 $(-\infty, \infty)$ 上的勒贝格-斯蒂阶测度 g，它关于 m 是强全连续(当然是把 g、m 都视为 Borel 集类 $\boldsymbol{B}$ 上的测度)，但不存在(关于 m 的)可积函数 f，使得下式成立：

$$g(E)=\int_E f dm,\ E\in\boldsymbol{R}$$

6．设 $\{\mu_n\}$ 是可测空间 $(X, \boldsymbol{R})$ 上一列有限的广义测度．

(i) 如果 $\{\mu_n\}$ 是全有限的测度序列，证明，必存在 $(X, \boldsymbol{R})$ 上全有限测度 μ，使得 $\mu_n\ll\mu\ (n=1, 2, \cdots)$．

(ii) 证明必存在 $(X, \boldsymbol{R})$ 上有限测度 μ，使得 $\mu_n\ll\mu\ (n=1, 2, \cdots)$．

7．设 ν、μ 是可测空间 $(X, \boldsymbol{R})$ 上全 σ-有限的广义测度，A_ν、B_ν；A_μ、B_μ 分别是 ν、μ 的 Hahn 分解中的正、负集．

(i) 求出 $\dfrac{d\nu}{d|\nu|}$ 的表达式；

(ii) 假设 $\nu\ll\mu$，并已知 $\dfrac{d\nu}{d\mu}$．求出 $\dfrac{d\nu^+}{d\mu}$，$\dfrac{d\nu^-}{d\mu}$，$\dfrac{d|\nu|}{d\mu}$，$\dfrac{d\nu^+}{d|\mu|}$，$\dfrac{d\nu^-}{d|\mu|}$，$\dfrac{d\nu}{d|\mu|}$，$\dfrac{d|\nu|}{d|\mu|}$．

8．证明定理 6 在 ν、μ 为广义测度情况下成立．

9．设 $g(x)\in V_0[a, b]$．证明：如果对一切多项式 $p(x)$，都有

$$\int_a^b p\,dg=0$$

那末 $g(x)=0$．

10．设 τ、ν、μ 是可测空间 $(X, \boldsymbol{R})$ 上三个全 σ-有限的广义测度，$\tau\ll\mu$，$\nu\ll\tau$．证明 $\nu\ll\mu$，并且

$$\frac{d\nu}{d\mu}\doteq_{|\mu|}\frac{d\nu}{d\tau}\frac{d\tau}{d\mu}$$

11．设 ν、μ 是可测空间 $(X, \boldsymbol{R})$ 上全 σ-有限的测度，那末

(i) $\nu\perp\mu$ 的充要条件是 $\frac{d\nu}{d(\nu+\mu)}\frac{d\mu}{d(\nu+\mu)} \doteq 0$, $\nu+\mu$

(ii) $\nu\sim\mu$(称为 ν 等价于 μ, 即 $\nu\ll\mu$, $\mu\ll\nu$ 同时成立) 的充要条件是 $\frac{d\nu}{d(\nu+\mu)} \underset{\nu+\mu}{>} 0$, $\frac{d\mu}{d(\nu+\mu)} \underset{\nu+\mu}{>} 0$ 同时成立;

(iii) τ 是$(X, \boldsymbol{R})$上另一个全 σ-有限的测度, 并且 $\nu\ll\tau$、$\mu\ll\tau$. 试给出 $\nu\perp\mu$, $\nu\sim\mu$ 用$\frac{d\nu}{d\tau}$、$\frac{d\mu}{d\tau}$ 来表示的充要条件的形式.

12. (i) 设 μ 是可测空间$(X, \boldsymbol{R})$上全 σ-有限的测度. 证明必存在 $(X, \boldsymbol{R})$上全有限的测度 ν, 使得 $\nu\sim\mu$;

(ii) 设$\{\mu_n\}$是可测空间$(X, \boldsymbol{R})$上全 σ-有限的广义测度的序列. 证明必存在$(X, \boldsymbol{R})$上全有限测度 μ, 使得 $\mu_n\ll\mu\,(n=1, 2, \cdots)$.

13. 举例说明: 如果 μ 是可测空间$(X, \boldsymbol{R})$上 σ-有限的测度(注意 $\boldsymbol{R}$ 未必是代数), 未必存在$(X, \boldsymbol{R})$上有限测度 ν, 使得 $\nu\sim\mu$.

14. 将定理 6 的系 2 中 f 的 Borel 可测性假设换为勒贝格可测性的假设, 并假设测度 u 是经过外测度扩张所得到的; 证明系 2 仍成立.

参考文献

1. 陈建功, 实函数论, 科学出版社, 1978.
2. 夏道行等, 实变数函数论与泛函分析概要, 上海科技出版社, 1963.
3. Halmos P. R., Measure Theory, D. Van Nostrand, New York, 1950. (有中译本, 测度论, 科学出版社, 1965.)
4. Hardy, G. H., A Course of Pure Mathematics, Cambridge, 1944.
5. Hausdorff, F., W. de Hruyter, Mengenlehre, Berlin and Leipzig, 1935. (有中译本, 集论, 科学出版社, 1960.)
6. Riesz, F. and Sz-Nagy, B., Leçons d'analyse fonctionnelle, Akademiai Kiadó, Budapest, 1953. (有第一卷中译本, 泛函分析讲义. 科学出版社, 1963.)
7. Zaanen, A. C., An Introduction to the Theory of Integration, North-Holland, Amsterdam, 1958.
8. Натансон, И. П., Теория Функций Вещественной Переменной, Изд. 2-ое, Гос. Москва 1957. (有中译本. 实变函数论, 高等教育出版社 1956.)

索　　引

(说明：数 I, 1, 3 表示第一章，§1，第 3 小节(段)，其余类推)

一　　划

一一对应 …… I, 2, 3

二　　划

二进位小数 …… I, 2, 7

二重积分 …… III, 5, 4

二重级数 …… III, 5, 4

几乎处处 …… III, 2, 1

　～收敛 …… III, 2, 1

　～相等 …… III, 2, 1

三　　划

小数 …… I, 2, 7

　g 进位～ …… I, 2, 7

　三进位～ …… I, 2, 7

上界 …… I, 3, 3

上导数 …… III, 6, 3

　右方～，左方～ …… III, 6, 3

上限(上极限) …… I, 5, 2

上限函数 …… I, 5, 2

上确界 …… I, 3, 1

上限集 …… I, 1, 3

下界 …… I, 3, 3

下限(下极限) …… I, 5, 2

下限集 …… I, 1, 3

下限函数……………………………………………………………………I, 5, 2
下确界……………………………………………………………………I, 3, 1
下导数……………………………………………………………………III, 6, 3
　左方～, 右方～……………………………………………………III, 6, 3
子集……………………………………………………………………I, 1, 1
广义测度………………………………………………………………III, 8, 2

四 划

计数……………………………………………………………………I, 2, 6
元素……………………………………………………………………I, 1, 1
无处稠密集……………………………………………………………I, 4, 6
无限集…………………………………………………………………I, 2, 6
开集……………………………………………………………………I, 4, 2
　～的构成区间………………………………………………………I, 4, 2
　～的构造定理………………………………………………………I, 4, 2
开区间…………………………………………………………………I, 4, 1
不可列集………………………………………………………………I, 2, 7
不可测集………………………………………………………………II, 4, 5
不相交的集……………………………………………………………I, 1, 2
不定积分………………………………………………………………III, 7, 1
区间……………………………………………………………………I, 4, 1
区间套定理……………………………………………………………I, 5, 2
内限点集………………………………………………………………II, 4, 3
分部积分公式…………………………………………………………III, 8, 4
牛顿-莱布尼兹公式……………………………………………………III, 7, 3
公理
　Zermelo～……………………………………………………………I, 3, 4
引理
Fatou～…………………………………………………………………III, 4, 2
F. Riesz～………………………………………………………………III, 6, 3
Levi～……………………………………………………………………III, 4, 2
Zorn～……………………………………………………………………I, 3, 4

双射……I, 2, 3

五 划

半序集……I, 3, 3
正变差函数……III, 6, 4
正部……III, 3, 2
正规分解……III, 6, 4
可加性……II, 0, ; II, 2, 1,
可列集……I, 2, 7
可列可加性……II, 0, ; II, 2, 1
可逆映照……I, 2, 3
可测函数……III, 1, 1
Borel～ (Baire 函数)……III, 1, 5
可测集……III, 1, 1
μ^*-～……II, 3, 2
Lebesgue～……II, 4, 2
Lebesgue-Stieltjes～……II, 4, 2
可测矩形……III, 5, 1
可测空间……III, 1, 1
Lebesgue～……III, 1, 1
Lebesgue-Stieltjes～……III, 1, 1
可测映照……III, 3, 4
代数……II, 1, 1
σ-～……II, 1, 2
外限点集……II, 4, 3
外测度……II, 3, 1
包含……I, 1, 1
对称差……I, 1, 2
对等的集……I, 2, 4
对角线法……III, 6, 4

六 划

次可列可加性……II, 2, 2

交集(通集、交)……I, 1, 2
闭包(包)……I, 4, 4
闭集……I, 4, 4
有限可加性……II, 2, 1; II, 2, 4
有限集……I, 2, 6
有限测度……
　全～……II, 3, 3
　σ-～……II, 3, 3
　全 σ-～……II, 3, 3
有界集……I, 5, 2
有界收敛定理……III, 4, 1
有理数集……I, 2, 7
有界变差函数……III, 6, 4
原象……I, 2, 1
全变差……III, 6, 4
全序集……I, 3, 3
全连续函数……III, 7, 2
负部……III, 3, 2
自密集……I, 4, 5
导出数……III, 6, 3
　右方～, 左方～……III, 6, 3
导数……III, 6, 3
导集……I, 4, 4
收敛
　～点列……I, 4, 3
　～集列……I, 1, 3

七 划

完全测度……II, 3, 2
　～空间……III, 2, 3
完全集……I, 4, 5
　Cantor～……I, 4, 5

初等分解……II, 2, 2
极大元……I, 3, 4
极限……I, 4, 4
　～点……I, 4, 4
　～集……I, 1, 3
余区间……I, 4, 4
余集……I, 1, 2
条件
　Caratheodory～……II, 3, 2
　Lipschitz～……III, 6, 4
　Riemann 可积的充要～……III, 4, 1
　阿列夫 $\aleph$……I, 2, 7
　阿列夫零 $\aleph_0$……I, 2, 7

八　　划

空集……I, 1, 1
实数……I, 5, 1
　～集……I, 4, 1
　～～的上确界、下确界……I, 4, 2
单调函数……III, 5, 2
单调类……II, 1, 3
单调集列……I, 1, 3
单调数列……I, 5, 2
定理
　上确界存在～……I, 5, 2
　开集的构造～……I, 4, 2
　Cantor 区间套～……I, 5, 2
　Егоров～……III, 2, 4
　Bernstein～……I, 2, 4
　Fubini～……III, 5, 4; III, 6, 3
　Hahn 分解～……III, 8, 2
　Heine-Borel～……I, 5, 2

Helly～……III, 6, 4
Jordan 分解～……III, 6, 4; III, 8, 2
Lebesgue～……III, 4, 1
Lebesgue 分解～……III, 6, 4; III, 8, 5
Лузин～……III, 2, 4
Radon-Nikodym～……III, 8, 4
变换
Fourier～……III, 4, 4
Fourier-Stieltjes～……III, 4, 4
势……I, 2, 5
环……II, 1, 1
σ-环……II, 1, 2
环境(邻域)……I, 4, 2
ε-环境……I, 4, 2
欧几里得空间……I, 2, 7
～中的 Lebesgue测度……II, 4, 6
和通关系……I, 1, 2
和集……I, 1, 2
孤立点……I, 4, 3
函数
Dirichlet～……II, 0,
Heaviside～……III, 6, 2
跳跃～……III, 6, 2
依测度收敛……III, 2, 2
依测度基本序列……III, 2, 2
单射……I, 2, 3

九 划

测度……II, 2, 1
Lebesgue～……II, 2, 2, II, 4, 2
～～的平移不变性……II, 4, 4
～～的反射不变性……II, 4, 4

～空间…………III, 2, 1
Lebesgue-stieltjes～…………II, 2, 3; II, 4, 2
～的可列可加性…………II, 2, 1
～的全连续性…………III, 8, 4
～的强全连续性…………III, 8, 4
～的奇异…………III, 8, 5
～的等价…………III, 8, 5
环上的～…………II, 2, 1
映照(映射、变换)…………I, 2, 1
～的定义域…………I, 2, 1
～的值域…………I, 2, 1
～的延拓…………I, 2, 2
～的限制…………I, 2, 2
逆～…………I, 2, 3
可逆～…………I, 2, 3
顺序关系…………I, 3, 3

十 划

通集(通、交集)…………I, 1, 2
象…………I, 2, 1
积分…………II, 0; III, 3, 1; III, 3, 2
～的有限可加性…………III, 3, 1
～的绝对可积性…………III, 3, 2
～的可列可加性…………III, 3, 2
～的线性…………III, 3, 2
～的单调性…………III, 3, 2
～的变数变换…………III, 3, 4; III, 8, 4
～的全连续性…………III, 3, 2
乘积测度…………III, 5, 3
乘积空间…………III, 5, 1
剖分…………I, 3, 1

十 一 划

商集……………………………………………………I, 3, 2
基本有理数列……………………………………………I, 5, 1
控制收敛定理……………………………………………III, 4, 1

十 二 划

集…………………………………………………………I, 1, 1
～上的连续函数…………………………………………III, 2, 4
～序列……………………………………………………I, 1, 3
～类(族)…………………………………………………II, 1, 1
～～张成的环……………………………………………II, 1, 1
～的特征函数……………………………………………I, 1, 5
～函数……………………………………………………II, 2, 1
等价类……………………………………………………I, 3, 1
等价关系…………………………………………………I, 3, 1
疏朗集……………………………………………………I, 4, 6

十 三 划

零集………………………………………………………II, 3, 2
跳跃度……………………………………………………III, 6, 1
左～, 右～………………………………………………III, 6, 1
稠密集……………………………………………………I, 4, 6
满射………………………………………………………I, 2, 1

十 四 划

缺口………………………………………………………III, 5, 2

十 八 划

覆盖………………………………………………………I, 5, 2
测度有限的单调～………………………………………III, 3, 2

下册目录

第四章　度量空间……1

§1　度量空间的基本概念……2

1．引言(2)　2．距离的定义(4)　3．极限的概念(6)　4．常见度量空间(7)　习题(13)

§2　线性空间上的范数……15

1．线性空间(15)　2．例(19)　3．赋范线性空间(20)　4．凸集(24)　5．商空间(26)　习题(27)

§3　空间 L^p……29

1．L^p 上的范数(29)　2．平均收敛与依测度收敛的关系(34)　3．空间 $L^\infty(E,\mu)$(35)　4．数列空间 l^p(38)　习题(39)

§4　度量空间中的点集……40

1．内点，开集(40)　2．极限点，闭集(43)　3．子空间的开集和闭集(48)　4．联络点集、区域(49)　5．点集间的距离(51)　6．n 维欧几里得空间中的 Borel 集(51)　7．赋范线性空间中的商空间(52)　习题(54)

§5　连续映照……56

1．连续映照和开映照(56)　2．闭映照(59)　3．连续曲线(62)　习题(63)

§6　稠密性……64

1．稠密性的概念(64)　2．可析点集(66)　3．疏朗集(68)　习题(69)

§7　完备性……70

1．完备性的概念(70)　2．某些完备空间(73)　3．完备空间的重要性质(77)　4．度量空间的完备化(80)　习题(84)

§8　不动点定理……85

1．压缩映照原理(85)　2．应用(92)　3．习题(95)

§9　致密集……97

1．致密集的概念(97)　2．致密集和完全有界集(100)　3．某些具体空间中致密点集的特征(104)　4．紧集(108)　5．紧集上的连续映照(110)　6．有限维赋范线性空间(111)　7．凸紧集上的不动点定理(117)　习题(119)

§10　拓扑空间和拓扑线性空间……121

1．拓扑空间(121)　2．拓扑线性空间(129)

第五章　有界线性算子……132

§1　有界线性算子……132

1. 线性算子与线性泛函概念(132) 2. 线性算子的有界性与连续性(136) 3. 有界线性算子全体所成的空间(141) 习题(147)

§2 连续线性泛函的表示及延拓……150

1. 连续线性泛函的表示(150) 2. 连续线性泛函的延拓(158) 3. 泛函延拓定理的应用(166) 4. 测度问题(174) 习题(177)

§3 共轭空间与共轭算子……180

1. 二次共轭空间(180) 2. 算子序列的收敛性(182) 3. 弱致密性(弱列紧性)(187) 4. 共轭算子(189) 习题(191)

§4 逆算子定理和共鸣定理……193

1. 逆算子定理(193) 2. 共鸣定理(201) 3. 共鸣定理的应用(204) 习题(210)

§5 线性算子的正则集与谱,不变子空间……214

1. 特征值与特征向量(214) 2. 算子的正则点与谱点(218) 3. 不变子空间(233) 习题(239)

§6 关于全连续算子的谱分析……241

1. 全连续算子的定义和基本性质(241) 2. 全连续算子的谱(247) 3. 全连续算子的不变闭子空间(255) 习题(261)

第六章 Hilbert 空间的几何学与算子……263

§1 基本概念……263

1. 内积与内积空间(264) 2. Hilbert 空间(266) 习题(270)

§2 投影定理……272

1. 直交和投影(272) 2. 投影定理(274) 习题(279)

§3 内积空间中的直交系……281

1. 就范直交系(281) 2. 直交系的完备性(286) 3. 直交系的完全性(291) 4. 线性无关向量系的直交化(293) 5. 可析 Hilbert 空间的模型 (295) 习题(297)

§4 共轭空间和共轭算子……300

1. 连续线性泛函的表示(300) 2. 共轭空间(301) 3. 共轭算子(302) 4. 有界自共轭算子(308) 习题(309)

§5 投影算子……312

1. 投影算子的定义和基本性质(312) 2. 投影算子的运算(316) 3. 投影算子与不变子空间(323) 习题(326)

§6 双线性 Hermite 泛函与自共轭算子……328

1. 双线性 Hermite 泛函(328) 2. 有界二次泛函(333) 习题(335)

§7　谱系、谱测度和谱积分……336

1. 几个例(336)　2. 谱测度(339)　3. 谱系(347)　4. 谱系和谱测度的关系(351)　习题(355)

§8　酉算子的谱分解……357

1. 酉算子的定义(357)　2. 酉算子的谱分解(359)　3. 相应于酉算子的谱测度(369)　4. L^2-Fourier 变换(371)　5. 平稳随机序列(374)　6. 平移算子(376)　习题(382)

§9　自共轭算子的谱分解……384

1. 引言(384)　2. 共轭算子(386)　3. 对称算子与自共轭算子(390)　4. Cayley 变换(394)　5. 无界函数谱积分(402)　6. 自共轭算子的谱分解定理(406)　7. 函数模型(412)　8. 全连续自共轭算子(417)　习题(418)

§10　正常算子的谱分解……421

1. 正常算子(421)　2. 乘积谱测度(423)　3. 正常算子的谱分解(428)　4. 算子代数(430)　习题(432)

§11　算子的扩张与膨胀……432

1. 闭扩张(433)　2. 半有界算子的自共轭扩张(438)　3. 广义谱系的扩张谱系(446)　4. 压缩算子的酉膨胀(461)　习题(462)

第七章　广义函数……466

§1　基本函数与广义函数……466

1. 引言(466)　2. 基本函数空间(468)　3. 局部可积函数空间(471)　4. 广义函数空间(474)　习题(477)

§2　广义函数的性质与运算……478

1. 广义函数的导函数和广义函数列的极限(478)　2. 广义函数的原函数(484)　3. 广义函数的乘法运算(485)　4. 广义函数的支集(486)　5. 有限级广义函数的构造(487)　6. 自共轭算子的广义特征展开(491)　习题(493)

§3　广义函数的 Fourier 变换……494

1. 基本函数的 Fourier 变换(494)　2. Z 空间上的连续线性泛函(498)　3. 广义函数的 Fourier 变换的概念(501)　4. 广义函数的卷积(504)　5. 常系数线性偏微分方程的基本解(507)　6. 基本函数空间 S (515)　7. 广义函数空间 S' (519)　习题(522)

参考文献……523

索引……526

第四章 度量空间

从这一章开始我们将要介绍泛函分析．泛函分析是现代数学中的一个较新的重要分支．它起源于经典数学物理中的变分问题、边值问题，概括了经典数学分析、函数论中的某些重要概念、问题和成果，又受到量子物理学、现代工程技术和现代力学的有力刺激．它综合地运用分析的、代数的和几何的观点和方法，研究分析数学、现代物理和现代工程技术提出的许多问题．从本世纪中叶开始，偏微分方程理论，概率论（特别是随机过程理论）以及一部分计算数学，由于运用了泛函分析而得到了大发展．现在，泛函分析的概念和方法已经渗透到现代纯粹与应用数学、理论物理及现代工程技术理论的许多分支，如微分方程、概率论、计算数学、量子场论、统计物理学、抽象调和分析、现代控制理论、大范围微分几何学等方面．现在泛函分析对纯粹及应用数学中的影响，好象本世纪初叶集论、点集论对后来数学的影响那样．同时泛函分析本身也不断地深入发展．例如算子谱理论以及各种表示理论已经达到相当深入的程度．

泛函分析大体分为线性泛函分析和非线性泛函分析两大部分，线性泛函分析比起非线性泛函分析来说要成熟得多，也更基本一些，这是自然的．一般来说，因为对于数学和数学物理中许多问题，人们大抵都是先做一次近似把它"线性化"；而线性问题总是比非线性问题容易研究得多，因而迄今所获得的成果也就要丰富得多．本书中除个别地方外几乎全部讨论线性泛函分析．

线性泛函分析主要是讨论有关线性算子——线性泛函是它的特殊情况——以及更加复杂的算子空间、算子代数的一些问题，如

谱理论和表示理论等. 线性算子是线性空间到线性空间的一种线性映照(见第五章). 正如同研究函数时必需研究直线上的点集一样, 为了研究算子, 我们必需首先讨论算子的定义域——无限维空间的结构, 特别是描述有关极限(拓扑)概念的一些理论. 本章中着重讲述度量空间. 它是用距离来描述极限过程的. 这对于大多数情况下已经够用了. 对于更一般的拓扑空间以及泛函分析中近些年来日渐用得较多的更加专门的局部凸线性拓扑空间理论, 只能极其简略地介绍一点有关的基本概念.

§1 度量空间的基本概念

1. 引言 极限是数学分析中基本概念之一. 实数列的收敛, 函数列的均匀收敛, 在平面区域中复变函数列的内闭均匀收敛等等各种极限概念, 都可以统一在下面要介绍的度量空间内按距离收敛的概念之中. 有些概念, 如在第一章中所讨论过的直线上点列的收敛性、开集、闭集、稠密和疏朗等, 在一般的度量空间里也可以引进这些概念. 我们在度量空间里引进了相应的概念, 并建立了相应的理论, 就可以进一步对每个具体空间引出相应的结论. 还有一些概念, 是在这一章中新引进的, 如范数、完备性、致密性等. 有一些空间, 如连续函数空间 $C[a,b]$, 可积函数空间 $L(X, \boldsymbol{B}, \mu)$等, 都是很重要的, 它们与有限维欧几里得空间有本质的区别. 分析数学方面各个学科都是以某种函数空间为对象而研究在这种空间上的某种数学运算的.

现在先介绍空间中两点间距离的概念. n 维欧几里得空间中两点间距离的概念可能已为大家所熟悉, 为了下面叙述的方便, 有必要简单回顾一下.

设平面 E^2 中两点 $x=(x_1, x_2)$ 和 $y=(y_1, y_2)$ 间的距离是

$$\rho(x, y)=\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

那末,距离 $\rho(x,y)$具有如下的性质:

(i) $\rho(x,y)\geqslant 0$,而且 $\rho(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$;

(ii) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z)$.

其中(ii)就是三角不等式.

我们知道,平面上的点列$\{x^{(n)}\}$趋向于极限点 x 的充要条件是

$$\rho(x^{(n)},x)\to 0\quad (n\to\infty)$$

对连续函数族常用的极限概念之一是均匀收敛(即一致收敛). 设$C[a,b]$是区间$[a,b]$上连续函数全体,对于 $x,y\in C[a,b]$,记

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)| \tag{1.1}$$

这里的 $\rho(x,y)$也有上面所指出的两个性质. 如果 $x_n(t)$, $n=1,2,\cdots$, $x(t)\in C[a,b]$, 那末$\{x_n(t)\}$均匀收敛于 $x(t)$的充要条件显然是

$$\rho(x_n,x)\to 0\quad (n\to\infty)$$

我们称由(1.1)所定义的 $\rho(x,y)$为函数空间 $C[a,b]$ 中两"点"x、y间的距离,它表示平面曲线 $\xi=x(t)$ 和 $\xi=y(t)$ 上横坐标相同的两点之间的最大距离(见图 4.1).

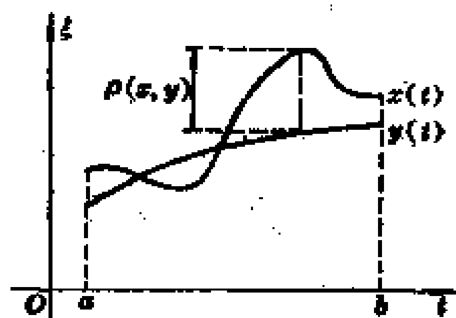


图 4.1

再举一个例子. 设$L(X,\boldsymbol{B},\mu)$是测度空间$(X,\boldsymbol{B},\mu)$上的可积函数全体. 对于 $x,y\in L(X,\boldsymbol{B},\mu)$,定义

$$\rho(x,y)=\int_X|x(t)-y(t)|d\mu \tag{1.2}$$

容易验证,它也满足前面说的两个性质. 对于 x_n $(n=1,2,\cdots)$、$x\in L(X,\boldsymbol{B},\mu)$,当

$$\rho(x_n, x) = \int_X |x_n(t) - x(t)| d\mu \to 0 \quad (n \to \infty)$$

时，我们称 $\{x_n(t)\}$（在 X 上按 μ 的积分）平均收敛于 $x(t)$.

上面各种情况，ρ 的意义是不相同的，但它们有共同的特点．如果把函数族 $C[a, b]$、$L(X, \mathbf{B}, \mu)$ 看成抽象的空间，把其中的函数看成是空间的点，那末 $\rho(x, y)$ 便可以看成是两点之间的距离．从上面看到，不少过去所学过的极限过程能够用距离来描述，而且与这些极限有关的概念和结果，实质上也仅仅利用了它们类似于距离的性质(i)、(ii)．因此，为了深入研究各种极限过程，把在上述这些具体空间中所定义的距离函数 ρ 抽象化，推而广之，对一般的集引进点与点之间的距离，这就产生了距离空间或度量空间（因为距离 R 是一种度量）的概念.

2. 距离的定义 设 R 是一个非空的集．假如对于 R 中任意一对元素 x、y，都给定一个实数 $\rho(x, y)$ 与它们对应，而且适合如下的条件：

1° $\rho(x, y) \geqslant 0$ 又 $\rho(x, y) = 0$ 的充要条件是 $x = y$；

2° 成立三角不等式：

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z) \quad (z \in R) \tag{1.3}$$

那末称 $\rho(x, y)$ 是两点 x、y 之间的**距离**，又称 R 按照距离 $\rho(x, y)$ 成为**度量空间**或**距离空间**，记为 (R, ρ)，或者简单地记作 R．R 中的元素称为点.

由性质 1° 与 2° 可以推出，距离还有对称性：对 R 中任意的 x、y，成立着

3° $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

事实上，在 2° 中取 $z = x$，就有 $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x) + \rho(y, x)$，由 1° 知道 $\rho(x, x) = 0$，所以得到

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(y, x)$$

由于 x, y 是任意的，在上面不等式中，互换 x, y 后，我们又得到

$$\rho(y, x) \leqslant \rho(x, y)$$

两式结合起来就得到 3°.

在假设 1° 的前提下，下面的不等式 4° 是与三角不等式 2° 等价的(读者自己证明).

4° 对任何 $x、y、z \in R$,

$$|\rho(x, y)-\rho(y, z)| \leqslant \rho(x, z)$$

度量空间 R 的任何非空子集M，就以 R 中距离 ρ 作为M上的距离，显然(M, ρ)也是度量空间，称(M, ρ)(或M)为 R 的**子空间**

对任何非空集 R，可引入如下的距离：

$$\rho_0(x, y)=\begin{cases}0, & x=y \in R \\ 1, & x \neq y, x、y \in R\end{cases}$$

(读者可直接验证上面的 ρ_0 是 R 上的距离).

在一个度量空间 R 中，如果存在正的常数α，使得任何 $x、y \in R$，$x \neq y$，都有 $\rho(x, y) \geqslant \alpha$ 时，称 R 是**一致离散**的距离空间．例如对任何非空集 R，(R, ρ_0)是一致离散的距离空间.

如果在一个空间中同时定义了两个距离函数 $\rho(x, y)$ 及 $\rho_1(x, y)$，而且 $\rho(x, y) \neq \rho_1(x, y)$，那末 R 按 $\rho(x, y)$ 所成的度量空间(R, ρ)同 R 按 ρ_1 所成的度量空间(R, ρ_1)应该看成不同的度量空间．一般地说，如果 R 中不止一点，那末在 R 中可以引进许多距离，成为不同的度量空间.

定义 设(R, ρ)及(R_1, ρ_1)是两个度量空间，φ 是 R 到 R_1 的映照．如果对每个 $x、y \in R$，成立着

$$\rho(x, y)=\rho_1(\varphi x, \varphi y)$$

那末称 φ 是(R, ρ)到(R_1, ρ_1)上的**等距映照**．进一步，如果还有 $\varphi(R)=R_1$，那末称这两个度量空间是**等距同构**的.

在泛函分析的一些问题中有时发现，两个度量空间，从形式上

看，两个集中的元素可以完全不同，但是从度量空间结构看，它们又是等距同构的．特别是当其中一个空间比较“抽象”一些，另一个空间比较“具体”一些时，就把这两个等距同构的空间一致化，把其中一个“抽象”空间中的元素 x 与经过等距映照 φ 后得到的较具体空间中的元素 φx 同一化，这样就可以把抽象的空间用具体的空间来表示．这在进行论证时在技术上往往有较大的好处，因为可以利用较具体的空间中的某些已经讨论过的性质来研究抽象空间中的一些问题．

3．极限的概念

定义 设 R 是一个度量空间，$x_n(n=1,2,\cdots)$、$x\in R$，假如当 $n\to\infty$ 时数列 $\rho(x_n,x)\to 0$，就说点列 $\{x_n\}$ 按照距离 $\rho(x,y)$ 收敛于 x，记做

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

或 $x_n\to x$．这时称 $\{x_n\}$ 为收敛点列，x 为 $\{x_n\}$ 的极限．

定理 1 在度量空间中，任何一个点列 $\{x_n\}$ 最多只有一个极限，即收敛点列的极限是唯一的．

证 设 x、y 都是 $\{x_n\}$ 的极限，由条件 1°、2° 和 3°，有

$$0\leqslant\rho(x,y)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x_n,y)$$

当 $n\to\infty$ 时，$\rho(x_n,x)\to 0$，$\rho(x_n,y)\to 0$，必然 $\rho(x,y)=0$，因此 $x=y$．

定理 2 如果 $x_n\to x_0$，$y_n\to y_0$，那末 $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x_0,y_0)$（也就是说，距离 $\rho(x,y)$ 是两个变元 x、y 的“连续函数”）．

证 由(1.3)可以得到

$$\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(x_0,y_0)+\rho(y_n,y_0)\cdot$$

类似地有

$$\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_0,x_n)+\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,y_0)$$

由这两个不等式得到

$$|\rho(x_n, y_n)-\rho(x_0, y_0)|\leqslant\rho(x_n, x_0)+\rho(y_n, y_0)$$

令 $n\to\infty$，就得到所要证明的结论.

定义 设 R 为度量空间，x_0 是 R 中的点．对于有限的正数 r，我们把集 $\{x|x\in R, \rho(x, x_0)<r\}$ 称做一个**开球**，它的中心是 x_0，半径是 r，把它记做 $O(x_0, r)$．也把球 $O(x_0, r)$ 叫做 x_0 的 **r-环境**.

当 R 是实数直线，或 n 维欧几里得空间时，开球是大家熟悉的，但在一般的度量空间中，开球可能只含一点．例如前面提到的一致离散的度量空间，对于不同的两点 x、y，$\rho_0(x, y)=1$，于是对于任何正数 $r<1$，每一点 x_0 的 r-环境 $O(x_0, r)$ 中只能含有一点.

定义 设 M 是度量空间 R 中的点集，如果 M 包含在某个开球 $O(x_0, r)$ 中，则称 M 是 R 中的**有界集**.

我们知道收敛数列是有界的．更一般地，在度量空间中有如下定理.

定理 3 设 $\{x_n\}$ 为度量空间 R 中收敛点列，那末 $\{x_n\}$ 是有界的.

证 设 $x_n\to x_0$，那末由收敛的定义，有自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，$\rho(x_n, x_0)\leqslant 1$，取 $r=\max(1, \rho(x_0, x_1), \cdots, \rho(x_0, x_{N-1}))+1$，那末 $\{x_n\}$ 包含在球 $O(x_0, r)$ 中．证毕.

4. 常见度量空间 在第一段中，我们已经知道了几个度量空间，如平面 E^2，$C[a, b]$，$L(X, \mathbf{B}, \mu)$．如果没有特别说明，它们的距离都是指在这些例中所分别规定的．下面再举一些常见的例子.

例 1 在 n 维欧几里得空间 E^n 中，对于

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n),\quad y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

规定距离

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu-y_\nu|^2}$$

这个 $\rho(x, y)$ 称为欧几里得距离.

我们来验证这里的 $\rho(x, y)$ 确实适合距离的两个条件. 距离的条件 1° 是容易验证的. 现在验证 2°.

由 Cauchy 不等式①

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2&=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\\&=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2\end{aligned}$$

取 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$, $a_i=z_i-x_i$, $b_i=y_i-z_i$, 那末

$$y_i-x_i=a_i+b_i$$

代入上面的不等式, 就得到三角不等式 2°.

从不等式

---

① Cauchy 不等式可由下面的恒等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

推出. 这个恒等式是不难用数学归纳法证明的. 当然, Cauchy 不等式还可利用 λ 的二次多项式 $\sum_{i=1}^{n}(a_i+\lambda b_i)^2=\varphi(\lambda)$ 的非负性的判别式得到.

$$\max_i |x_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leqslant \sqrt{n} \max_i |x_i|$$

立即知道，在 E^n 中按距离收敛就是按每个坐标收敛.

例 2　设 E^1 是实数全体，在 E^1 上另外规定一种距离 ρ_1 如下；当 $x, y \in E^1$ 时

$$\rho_1(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

显然 ρ_1 满足距离的条件 1°，为了证明 ρ_1 满足三角不等式，我们只要证明，对于任意的复数 a、b，成立着不等式：

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \tag{1.4}$$

事实上，由于在实数区间 $x \geqslant 0$，即 $[0, \infty)$ 上的函数

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$$

是单调增加函数，由不等式 $|a+b| \leqslant |a| + |b|$，我们得出

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}\end{aligned}$$

所以(1.4)成立. 这样 E^1 按照距离 ρ_1 所定义的度量空间与例1中的 E^1 按照距离 ρ 所定义的度量空间不同，但是可以证明(读者自己证明)它们所引出的极限概念实质上是一致的，就是说，当 $\{x_n\} \subset E^1$，$x_0 \in E^1$ 时，$\rho_1(x_n, x_0) \to 0$ 和 $|x_n - x_0| \to 0$ 是等价的. (注意，我们后面用到 E^1 中的距离时，是指 $\rho(x, y) = |x-y|$，而不是这里的 ρ_1.)

例 3　(空间 $C^{(k)}[a, b]$)　设 k 是一个非负整数，$x(t)$ 是区间

$[a, b]$ 上的连续函数，而且具有连续的 k 阶导函数（当 $k=0$ 时就表示只要求 $x(t)$ 本身连续），这种函数 $x(t)$ 的全体记为 $C^{(k)}[a, b]$，特别简记 $C^0[a, b]$ 为 $C[a, b]$. 对于 $x(t), y(t) \in C^{(k)}[a, b]$，令

$$\rho_k(x, y) = \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(j)}(t) - y^{(j)}(t)|$$

容易证明 $\rho_k(x, y)$ 是距离. 在 $C^{(k)}[a, b]$ 中函数列 $\{x_n(t)\}$ 依距离收敛于 $x(t)$ 的充要条件是，$\{x_n(t)\}$ 以及它们的前 k 阶导函数列在 $[a, b]$ 上都分别均匀收敛于 $x(t)$ 及其前 k 阶导函数.

例 4 设 s 为实数列 $\{x_\nu\}$ 的全体（或复数列全体）所成的空间. 称 x_ν 为点 $x=\{x_\nu\}$ 的第 ν 个坐标. 在 s 中定义距离如下：对于 $x=\{x_\nu\}$，$y=\{y_\nu\}$，令

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

现在来验证如此定义的 $\rho(x, y)$ 是一个距离. 事实上，可以仿照例 2 的办法来验证三角不等式

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - z_i + z_i - y_i|}{1 + |x_i - z_i + z_i - y_i|} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \left(\frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} + \frac{|z_i - y_i|}{1 + |z_i - y_i|} \right) \\ &= \rho(x, z) + \rho(y, z)\end{aligned}$$

我们来证明在空间 s 中点列按距离收敛等价于按坐标收敛. 这就是说，设点列 $x^{(n)} = \{x_i^{(n)}\} \in s$, $n = 1, 2, \cdots$，又 $x \in s$，$x = \{x_i\}$ 那末 $\rho(x^{(n)}, x) \to 0 (n \to \infty)$ 的充分必要条件是：对每个自然数 i

$$\lim_{n \to \infty} x_i^{(n)} = x_i$$

事实上，如果

$$\rho(x^{(n)}, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i^{(n)} - x_i|}{1 + |x_i^{(n)} - x_i|} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

那末，对每一个 i，由于 $\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\leqslant 2^i\rho(x^{(n)}, x)$，我们得到 $\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\to 0\ (n\to\infty)$，于是，对于给定的正数 ε——不妨设 $\varepsilon<1$——有自然数 N，使得当 $n>N$ 时成立着

$$\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\varepsilon$$

从而有

$$|x_i^{(n)}-x_i|<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\quad i=1, 2, \cdots$$

这说明对每个 $i=1, 2, \cdots$，当 $n\to\infty$ 时，$x_i^{(n)}\to x_i$.

反过来，设 $x_i^{(n)}\to x_i(n\to\infty)$，$i=1, 2, \cdots$. 因为对任一正数 ε，存在自然数 m，使得

$$\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}$$

又对每个 $i=1, 2, \cdots, m-1$，存在着 N_i，使得当 $n>N_i$ 时

$$|x_i^{(n)}-x_i|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N=\max\{N_1, \cdots, N_{m-1}\}$，那末当 $n>N$ 时

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\ \frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\ \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}}<\frac{\varepsilon}{2}$$

所以，当 $n>N$ 时，有

$$\rho(x^{(n)}, x)=\left(\sum_{i=1}^{m-1}+\sum_{i=m}^{\infty}\right)\frac{1}{2^i}\ \frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\varepsilon$$

例 5 设 $\mathscr{A}$ 是单位圆 $|z|<1$ 中解析函数的全体. 当 $f(z)$、$g(z)\in\mathscr{A}$ 时，定义

$$\rho(f,g)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\max_{|z|\leqslant 1-\frac{1}{i}}\frac{|f(z)-g(z)|}{1+|f(z)-g(z)|}$$

类似于例 4，可以证明 $\rho(f,g)$满足条件 1° 及 2°，因而 $\mathscr{A}$ 关于 $\rho(f,g)$成一度量空间.

点列$\{f_k(z)\}$按距离收敛于 $f(z)$（即 $\rho(f_k,f)\to 0$）的充要条件是：$\{f_k(z)\}$在单位圆$|z|<1$ 中任一闭区域Ω上均匀收敛于 $f(z)$（通常称 $\{f_k(z)\}$ 在$|z|<1$ 中内闭均匀收敛于$f(z)$）. 事实上，类似于例 4，易知 $\rho(f_k,f)\to 0$ 的充要条件是对每一个 i 成立着

$$\max_{|z|\leqslant 1-\frac{1}{i}}|f_k(z)-f(z)|\to 0\quad(k\to\infty)$$

这等价于 $\{f_k(z)\}$内闭均匀收敛于 $f(z)$.

例 6 设 $C^{\infty}[a,b]$是区间内无限次可微分函数的全体，定义

$$\rho(f,g)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu}}\max_{t\in[a,b]}\frac{|f^{(\nu)}(t)-g^{(\nu)}(t)|}{1+|f^{(\nu)}(t)-g^{(\nu)}(t)|}$$

容易知道 $\rho(f,g)$是 $C^{\infty}[a,b]$中的距离函数. 而对于 $C^{\infty}[a,b]$中点列$\{x_n(t)\}$按距离收敛于 $x(t)\in C^{\infty}[a,b]$的充要条件是对每个非负整数 p，在$[a,b]$上$\{x_n^{(p)}(t)\}$均匀收敛于 $x^{(p)}(t)$（$x_n^{(0)}(t)=x_n(t)$）. 这一点留给读者自己去证明.

可测函数列依测度收敛的概念也可以用适当的距离的收敛来描述.

例 7 设$(X,\mathbf{R},\mu)$是测度空间，E是可测集，$\mu(E)<\infty$，S是 E 上的实值的（或复值的）可测函数全体. 当 $f(t)$、$g(t)$在 E 上几乎处处相等时，把 f、g 看成 S 中的同一点，当 f、$g\in S$ 时，规定

$$\rho(f,g)=\int_E\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}d\mu$$

由于$\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}$是有界可测函数，$\mu(E)<\infty$，所以 $\rho(f,g)$

有确定的意义. 相仿于例 4, 容易证明, 这个 $\rho(f,g)$ 确实满足距离的条件.

我们要证明在空间 S 中, $\rho(f_n, f)\to 0$ 的充要条件是 f_n 依测度 μ 收敛于 f.

事实上, 如果 $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$, 由于 $\dfrac{|f_n(t)-f(t)|}{1+|f_n(t)-f(t)|}\leqslant 1$, 和 $\mu(E)<\infty$, 由有界控制收敛定理立即知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f_n,f)=0$.

反过来, 如果 $\rho(f_n,f)\to 0$, 那末, 对任何 $\sigma>0$, 由于

$$\rho(f_n,f)\geqslant\int_{E(|f_n-f|\geqslant\sigma)}\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}d\mu$$

$$\geqslant\frac{\sigma}{1+\sigma}\mu(E(|f_n-f|\geqslant\sigma))$$

令 $n\to\infty$, 就知道函数列 $f_n(t)$ 在 E 上依测度 μ 收敛于 $f(t)$.

综上所见, 虽然在一些集上可以随心所欲地根据距离的定义引进距离使得它成为度量空间, 但是这样做并不见得有什么意义. 有意义的往往是为了某个目的而引进所需要的距离. 在分析数学以及应用中最常用到的空间还是函数空间或者序列空间等. 为了要描述和研究函数列的某种特定的收敛概念 (如前面已经提到的一致收敛、平均收敛和依测度收敛等等) 而引进相应的距离才能做到有的放矢.

习　题

1. 证明例 6 中按距离收敛等价于各阶导函数均匀收敛.

2. 在三维欧几里得空间考虑任一球面 S. 对于 x、$y\in S$, 规定 x、y 间的距离 $d(x, y)$ 是过 x、y 两点的大圆上以 x、y 为端点的劣弧的弧长. 证明 $d(x,y)$ 是 x、y 间的距离, 它不是欧几里得距离. 如果用 $\rho(x,y)$ 表示欧几里得距离(见例 1), 那末

$$\rho(x,y)\leqslant d(x,y)\leqslant\frac{\pi}{2}\rho(x,y)$$

从而证明：S 中点列 $\{x_n\}$ 按距离 $d(x,y)$ 收敛于 x 的充要条件是按坐标收敛于 x.

3. 设 R 是一度量空间，距离为 $\rho(x, y)$. 试证：对于固定的 x_0，函数 $x \longmapsto \rho(x_0, x)$ 是 R 上 x 的连续函数(即当 $\rho(x_n, x) \to 0 (n \to \infty)$ 时，$\rho(x_0, x_n) \to \rho(x_0, x) (n \to \infty)$).

4. 设 $\rho(x, y)$ 为空间 R 上的距离，证明

$$\tilde{\rho}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1+\rho(x, y)}$$

适合距离的条件 1°、2°，并且按 $\tilde{\rho}$ 收敛等价于按 ρ 收敛(注意，全空间 R 按 ρ 可能是无界的，而 R 按 $\tilde{\rho}$ 是有界的，由 ρ 作 $\tilde{\rho}$ 是把无界的 R 变成有界的 R 而又保持收敛性等价的常用办法之一).

5. 设 R 是 n 维空间 E^n 中的一族函数，其中每个函数 $\varphi(x)$ 在区域 $|x| \geqslant a > 0$ 上等于零，并且 $\varphi(x)$ 在 E^n 上是任意次可微的. 令

$$\rho(\varphi, \psi) = \sum_p \frac{1}{N(p)!} \frac{\max\limits_x |D^p(\varphi-\psi)|}{1+\max\limits_x |D^p(\varphi-\psi)|} \qquad (\varphi, \psi \in R)$$

这里 $D^p = \frac{\partial^{N(p)}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_n^{p_n}}$, $N(p) = p_1 + \cdots + p_n$, $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$，而且 $p_1, p_2, \cdots, p_n \geqslant 0$ 且都是整数，证明：R 是一度量空间；在 R 中点列 $\{\varphi_n\}$ 收敛的概念等价于 $\varphi_n(x)$ 及其各阶偏导数 $D^p\varphi_n(x)$ 均匀收敛.

6. 对任何 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n) \in E^n$，规定

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i - y_i|$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 n 个正数，证明 ρ 是 E^n 中的距离，并且按距离收敛等价于按坐标收敛.

7. R 是非空集，$\rho(x, y)$ 是 R 上两元非负函数，如果满足

1°. $\rho(x, x) = 0$, $x \in R$;

2°. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z)$, x、y、$z \in R$.

称 ρ 是 R 上的拟距离. 如果 $\rho(x, y) = 0$，记 $x \sim y$. 证明：$\sim$ 是 R 上的一个等价关系. 设商集(即等价类全体)为 $\mathscr{R} = R/\sim$. 在 $\mathscr{R}$ 上作二元函数 $\tilde{\rho}$：对任何 $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathscr{R}$，规定

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho(x, y), \ x \in \tilde{x}, \ y \in \tilde{y}$$

证明：$\tilde{\rho}$ 是 $\mathscr{R}$ 上的距离(通常称 $(\mathscr{R}, \tilde{\rho})$ 为 R 按拟距离 ρ 导出的商度量空

间).

8. R 是 $[0,1]$ 上多项式全体. 当 P、$Q\in R$ 时, 记 $P-Q=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, 在 R 上分别作

$$\rho_1(P,Q)=\max_{x\in[0,1]}|P(x)-Q(x)|,$$

$$\rho_2(P,Q)=\sum_{i=0}^{n}|a_i|,$$

$$\rho_3(P,Q)=|a_0|.$$

证明: 1° ρ_1、ρ_2 都是 R 上距离;

2° 按 ρ_1 收敛等价于多项式一致收敛于某一多项式;

3° 按 ρ_2 收敛可以推出按 ρ_1 收敛, 但反之不真 (即举例说明: 存在多项式列 $\{P_n\}$, $\rho_1(P_n,0)\to 0$, 但 $\rho_2(P_n,0)\not\to 0$, 这里取了 $Q=0$);

4° ρ_3 是拟距离, 并且按 ρ_3 导出的商度量空间 $(\mathscr{R},\tilde{\rho})$ 与一维欧几里得空间 E^1 等距同构.

§2 线性空间上的范数

在上一节中介绍了度量空间的概念, 它统一了均匀收敛、平均收敛、依测度收敛、按坐标收敛以及内闭均匀收敛等极限概念. 但是, 只有度量空间的概念, 对于分析数学的各分支还不够具体. 因为通常所考察的空间, 例如函数空间和序列空间, 除去可引进极限概念外, 它们同时又是一个代数系统, 就是说空间中的元素间存在某种代数关系. 当只着眼于空间中的代数结构, 即元素之间的加法运算以及数与空间中元素的乘法运算时, 就必须引入线性空间 (或称向量空间) 的概念, 这在高等代数中已经介绍过. 在这里我们只简单回顾系数域是实数或复数域的情况.

1. 线性空间 设 R 为一集. 假如在 R 中规定了线性运算——元素的加法运算以及实数 (或复数) 与 R 中元素的乘法运算, 满足下述条件:

I．R 关于加法成为交换群．就是说对于任意一对 $x, y\in R$，都存在 $u\in R$——记做 $u=x+y$，称它是 x、y 的和——这个运算适合

1）$y+x=x+y$；

2）$(x+y)+z=x+(y+z)$；

3）R 中存在唯一的元素 0（称它是零元素），使得对于任何 $x\in R$ 成立着 $x+0=x$；

4）对于 R 中每一元素 x，存在唯一的元素 $x'\in R$（对应于 x），满足 $x+x'=0$——称 x' 是 x 的负元素，记做 $-x$．

II．对任何 $x\in R$ 及任何实（或复）数 a，存在元素 $ax\in R$，称 ax 是 a 和 x 的数积，适合

5）$1\cdot x=x$；

6）$a(bx)=(ab)x$，a、b 是实（或复）数；

7）$(a+b)x=ax+bx$，$a(x+y)=ax+ay$．

那末，称 R 为**线性空间**或**向量空间**，其中的元素也称为**向量**．

如果数积运算对于实数有意义，就称 R 是实（线性）空间；如果数积对复数有意义，称 R 是复（线性）空间．每个复空间显然也是实空间．

例 1　n 维实（或复）向量空间 R^n，其中的向量 $x=(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 是由有序的 n 个实（或复）数构成．线性运算按通常的定义方法，分别对相应的每个坐标进行运算：

$$(x^1, x^2, \cdots, x^n)+(y^1, y^2, \cdots, y^n)$$
$$=(x^1+y^1, x^2+y^2, \cdots, x^n+y^n)$$
$$\alpha(x^1, x^2, \cdots, x^n)=(\alpha x^1, \alpha x^2, \cdots, \alpha x^n)，\alpha \text{ 是数．}$$

线性相关和线性无关　设 R 是实（或复）线性空间，x_1、x_2、$\cdots$、x_n 是 R 中的一组向量，如果存在不全为 0 的 n 个实（复）数 α_1、α_2、$\cdots$、α_n，使得

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0$$

就称向量组 x_1、x_2、…、x_n 是**线性相关的**．一组向量 x_1、…、x_n，如果不是线性相关的，就称为**线性无关**的．

容易明白，如果向量组 x_1、…、x_n 中含有零向量，那它必是线性相关的．x_1、x_2、…、x_n 是线性无关的充要条件是：如果常数 α_1、α_2、…、α_n 使得 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0$，必定 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$．

设 R 是一线性空间，集 $A\subset R$．如果 A 中任何有限个向量均是线性无关，就称 A 是线性无关的，否则称 A 是线性相关的．

线性基 设 A 是线性空间 R 中的一个线性无关向量组．如果对于每一个非零向量 $x\in R$，都是 A 中的向量的线性组合，即有不全为零的 n 个实（或复）数 α_1、…、α_n，使得

$$x=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n,\quad x_1, \cdots, x_n\in A$$

就称 A 是线性空间 R 的一组**线性基**．

线性基又称为 Hamel 基．用 Zorn 引理可以证明：**任何线性空间总存在 Hamel 基**．

如果线性空间 R 中存在一组由有限个线性无关向量 x_1、…、x_n 组成的基，就说 R 是有限维——n 维——的．基 A 的势称为空间 R 的维数．可以证明：线性空间的维数是确定的，不因选取不同的基而改变（它的证明要用到势的理论）．

设 R'、R'' 同是实或复的两个线性空间，如果存在 R' 到 R'' 上的一一对应 φ，使得对任何一对 x、$y\in R'$ 及任何数 α，成立着

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),\quad \varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x)$$

那末称 R' 和 R'' 是线性同构的，而映照 φ 称为 R' 到 R'' 的**线性同构映照**．

因为线性同构映照 φ 的逆映照 φ^{-1} 仍是线性同构，所以线性无关向量组经线性同构映照后仍是线性无关向量组．

线性子空间 设 L 是线性空间 R 的子集．如果 L 对 R 中的线性运算是封闭的，就是说，当 x、$y\in L$ 时，对任何数 α，都有 $\alpha x\in L$，

$x+y\in L$，那末称 L 是 R 的**线性子空间**．显然线性空间 R 的任何线性子空间本身也是一个线性空间．

线性空间 R 本身以及只含零元素的集 $\{0\}$ 都是 R 的线性子空间，称它们是 R 的**平凡**的线性子空间．除 R 本身以外的其它 R 的线性子空间称为**真**线性子空间．

假如 Λ 是指标集（可以是无限的），$\{x_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 是 R 中一族向量，那末一切由 $\{x_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 中有限个向量的线性组合所得到的向量

$$y=\alpha_1 x_{\lambda_1}+\cdots+\alpha_k x_{\lambda_k},\quad \lambda_i\in\Lambda,\ i=1,2,\cdots,k$$

（α_1、$\cdots$、α_k 是数）的全体 M 就是一个线性子空间．称 M 是由 $\{x_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 张成的线性子空间，或称 M 是 $\{x_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 的线性包，通常记为 $\mathrm{span}\{x_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$．读者还可以证明 M 就是一切包含 $\{x_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 的线性子空间的通集．

在 n 维向量空间 R^n 中的向量组

$$e_1=(1,0,0,\cdots,0)$$
$$e_2=(0,1,0,\cdots,0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n=(0,0,\cdots,0,1)$$

称为 R^n 的**标准基**．任何向量 $a=(a_1,\cdots,a_n)\in R^n$，能表示成

$$a=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu e_\nu$$

并且表示式是唯一的．

设 M_n 是 n 维的线性空间，$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是 M_n 中的一组基．M_n 中每个向量 x 可以唯一地表示成基 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的线性组合

$$x=\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n$$

数 λ_1、$\cdots$、λ_n 称为 x 关于基 x_1、$\cdots$、x_n 的**坐标**，λ_ν 称作 x 的第 ν 个坐标．如果我们把 M_n 的向量 x 关于一组基的坐标记为 $(\lambda_1,\lambda_2,\ \cdots,$

λ_n)，它是 R^n 中的向量，令

$$\varphi:\ x\longmapsto(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

这是M_n到 R^n 上的一一对应．显然，如果在 R^n 中按通常方法规定线性运算，这个映照 φ 保持线性运算，所以M_n与 R^n 是线性同构的．因此，任意的 n 维线性空间与 R^n 线性同构．

2．例 除了有限维向量空间这个最常见的例子外，还可以举出一些分析学中常见的线性空间．

例 2 函数空间 设Q是一集，F是Q上某些实(或复)函数所成的函数族．在函数族中我们按通常方法规定函数的加法及函数与数的积如下：对于 $q\in Q$，令

$$(f+g)(q)=f(q)+g(q),\ f、g\in F$$

$$(\alpha f)(q)=\alpha f(q),\ \ f\in F,\ \alpha\text{ 是数}$$

如果当 $f、g\in F$，$\alpha、\beta$ 是任意实(或复)数时

$$\alpha f+\beta g\in F$$

那末F成为一个线性空间．此后如果不另外说明，对函数空间总是采取上述的加法及数积运算．Q上的实值函数全体成为一个实空间，而复值函数全体成为复空间．

例 3 设P是多项式 $p(x)$全体按照通常的线性运算所成的线性空间，如果 A 表示函数集$\{x^n|n=0,1,2,\cdots\}$，那末 A 张成 P．

例 4 区间$[a,b]$上有界函数全体 $B[a,b]$按照通常的函数的加法以及函数与数的乘法成为线性空间．令 A 表示区间 $[a,\xi]$ $(a\leqslant\xi\leqslant b)$的特征函数 $\chi_{[a,\xi]}(\cdot)$全体．显然 $A\subset B[a,b]$．令M是区间$[a,b]$上的左方连续的阶梯函数全体，那末 A 张成M．

例 5 数列空间 设 s 是实(或复)数列全体，规定加法及数积运算如下：

$$\{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\},\ \ \alpha\{x_n\}=\{\alpha x_n\},\ \alpha\text{ 是数},$$

那末 s 成为一个实(或复)线性空间．此后如果不另外说明，对空

间 s 都是采取这种加法和数积.

例 6 设 $L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$ 是一常系数线性常微分方程. 设 R 是方程 $L[y]=0$ 的解全体所成的线性空间, 那末 R 是 n 维空间.

设 $\{y_\nu, \nu=1,2,\cdots,n\}$ 是适合初始条件

$$y_\nu^{(k)}(0)=\delta_{k,\nu},\quad k=0,1,2,\cdots,n-1,\quad (\text{其中 } y_\nu^{(0)}=y_\nu)$$

的基本解组(其中当 $k=\nu$ 时 $\delta_{k,\nu}=1$, 否则 $\delta_{k,\nu}=0$), 那末 $\{y_1,\cdots,y_n\}$ 成为 R 的线性基.

例 7 设 s 是所有的实 (或复) 数列所成的线性空间. 令 s_0 表示所有第一个分量为 0 的向量全体:

$$s_0=\{x\,|\,x=(0,x_1,x_2,\cdots)\}$$

不难验证 s_0 是 s 的一个线性子空间.

我们固定自然数 k, s 中形如

$$(x_1,\cdots,x_k,0,0,\cdots)$$

(自第 $k+1$ 个分量起一切分量都是零) 的向量全体构成 s 的线性子空间. 它和 k 维线性空间 R^k 线性同构. 我们可以用这种办法把有限维线性空间"安装"到无限维空间 s 中去.

3. 赋范线性空间

定义 设 R 是实(或复)数域 F 上的一个线性空间. 如果 R 上的实值函数 $p(\cdot)$ 满足下列条件:

(1) $p(x)\geqslant 0$, $x\in R$;

(2) $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$, $x\in R$, $\alpha\in F$;

(3) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$, $x, y\in R$.

我们称 $p(x)$ 是 x 的**半范数**或称为**拟范数**.

如果半范数 $p(x)$ 又满足如下条件:

(4) 如果 $p(x)=0$, 那末 $x=0$,

便称 $p(x)$ 是 x 的**范数**, 通常也记 x 的范数为 $\|x\|$, 而且 R 按这个范

数$\|\cdot\|$称做**赋范线性空间**，简称做赋范空间。

我们注意到：由于零向量 $0=0x$，所以从条件(2)得到

$$\|0\|=0$$

因此，对于 x 的范数 $\|x\|$，有

(4′) $\|x\|=0$ 的充要条件是 $x=0$。

例 8 空间 $C[a,b]$ 设 $C[a,b]$是闭区间$[a,b]$上的连续函数全体所成的线性空间．当 $f\in C[a,b]$时，规定

$$\|f\|=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

$C[a,b]$按范数$\|\cdot\|$成为赋范线性空间。

例 9 空间 $L[a,b]$ 设 $L[a,b]$是区间$[a,b]$上的勒贝格可积函数全体所成的线性空间．对于 $f\in L[a,b]$，令

$$p(f)=\int_a^b|f(t)|dt$$

那末 $p(f)$是 $L[a,b]$上的半范数，但不是范数，因为 $p(f)=0$ 时并不能导致 $f=0$，而只能得出 $f(t)\doteq 0$．但是 $p(f)$限制在 $L[a,b]$的线性子空间 $C[a,b]$上时，它成为范数．这是因为在 $C[a,b]$中当$f(t)\doteq 0$ 时，$f=0$。

在例 9 中，如果把满足 $f(t)\doteq g(t)$的两个函数 f、g 视为同一个函数，即把 $f(t)\doteq 0$ 的函数 f 就视为恒等于零的函数，那末$p(f)$便是 $L[a,b]$上范数．这一点也可以用商空间来说，参见本节第五小节的例 13、14 后的说明。

现在再举出几个在数学中常用的赋范线性空间。

在 n 维向量空间 R^n 中，对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，令

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2} \tag{2.1}$$

或者

$$\|x\|_1=\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|,\quad \|x\|_2=\max_{1\leqslant\nu\leqslant n}|x_\nu|$$

这些都是范数. 我们称(2.1)中的范数$\|x\|$是欧几里得范数. 此后, 在n维空间R^n中采用范数(2.1)后所得到的赋范线性空间象在§1例1中那样地记做E^n, 称做n维欧几里得空间.

又例如以$C^{(k)}[a,b]$表示在区间$[a,b]$上连续而且在$[a,b]$中处处k次连续可微函数$f(t)$全体所成的线性空间. 在$C^{(k)}[a,b]$中规定

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\{|x(t)|,|x'(t)|,\cdots,|x^{(k)}(t)|\}\tag{2.2}$$

那末$\|x\|$是$C^{(k)}[a,b]$上的范数.

在任何一个赋范线性空间R中, 可以由范数引出两点间的距离: 对于x、$y\in R$, 令

$$\rho(x,y)=\|x-y\|\tag{2.3}$$

那末从范数的四个条件容易验证$\|x-y\|$满足距离的两个条件. 由(2.3)规定的距离$\rho(x,y)$称为相应于范数$\|\cdot\|$的距离, 或由范数$\|\cdot\|$决定的距离. 我们今后对每个赋范线性空间总是按照(2.3)引入距离, 使之成为度量空间. 这样一来, 就可以在赋范线性空间中引入极限概念.

设R是赋范线性空间, $x_n\in R$, $n=1,2,\cdots$. 如果存在$x\in R$, 使得x_n按距离收敛于x, 即

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$$

那末称$\{x_n\}$依范数收敛于x, 记做$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 或$x_n\to x(n\to\infty)$.

容易看出, 在依范数收敛意义之下, 只要$x_n\to x_0$, 就有$\|x_n\|\to\|x_0\|$, 就是说范数$\|x\|$是x的"连续函数". 事实上, 在§1定理2中取$y_n=y_0=0$, 那末$\|x_n\|=\rho(x_n,0)\to\rho(x_0,0)=\|x_0\|$.

因此, 如果$\{x_n\}$是赋范线性空间中的收敛点列, 那末它们的范

数$\{\|x_n\|\}$是有界的.

由范数决定的距离必然满足

$$\rho(x,y)=\rho(x-y,0),\ \rho(\alpha x,0)=|\alpha|\rho(x,0) \tag{2.4}$$

容易看出，在一个线性的度量空间(即一个线性空间同时也是度量空间)中，距离是由范数决定的充要条件就是$\rho(x, y)$适合(2.4). 当距离适合条件(2.4)时，定义$\|x\|=\rho(x,0)$，就成范数. 所以(2.4)也是线性的度量空间成为赋范线性空间(指范数与距离满足(2.3))的充要条件.

由此容易明白，线性空间s、$\mathscr{A}$、S等空间中按上一节中定义的距离不能由任何范数决定. 例如在数列空间s中，如果令

$$\|x\|=\rho(x,0)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu}}\ \frac{|x_\nu|}{1+|x_\nu|}$$

那末，对于$\alpha\neq0$，并不满足齐次性条件$\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$. 所以，§1中的度量空间$s$、$S$、$\mathscr{A}$等的距离都不是由范数决定的.

例10 空间l^∞ 设l^∞是有界实(或复)数列$x=\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$全体按通常的线性运算所成的线性空间(它是$s$空间的线性子空间). 对于$x\in l^\infty$，令

$$\|x\|=\sup_i|x_i|,\quad x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots) \tag{2.5}$$

那末l^∞依$\|x\|$成为赋范线性空间.

例11 空间$V[a,b]$ 设$V[a,b]$是区间$[a,b]$上的实(或复)有界变差函数的全体，依照通常的线性运算，它是一个线性空间. 对于$f\in V[a,b]$，规定

$$\|f\|=|f(a)|+\bigvee_a^b(f) \tag{2.6}$$

那末$V[a,b]$按范数$\|f\|$成为赋范线性空间. 我们令

$$V_0[a,b]=\left\{f\,\middle|\,f\in V[a,b],\ \begin{matrix}f\text{ 在}(a,b)\text{中每点是右连续的}\\ \text{而且 }f(a)=0\end{matrix}\right\}$$

它是$V[a,b]$的线性子空间. 在$V_0[a,b]$上，范数$\|f\|$等于全变差$\bigvee_a^b(f)$.

例 12 空间 $C^m(\Omega)$ 设$C^m(\Omega)$(m是非负整数)表示在空间E^n中的区域Ω上具有直到m阶的连续偏导数的函数$u(x_1,\cdots,x_n)$，并满足

$$\|u\|_m=\sum_{N(p)\leqslant m}\sup_{x\in\Omega}|D^pu(x)|<\infty \tag{2.7}$$

的全体，其中$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$p=(p_1,\cdots,p_n)$，$N(p)=p_1+\cdots+p_n$，$D^pu=\frac{\partial^{N(p)}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}u$. 那末$C^m(\Omega)$是线性空间，并且$\|u\|_m$是$C^m(\Omega)$上范数.

设m为非负的整数，$0<\alpha<1$. 又设$u\in C^m(\Omega)$，而且它的各个m阶偏导数在Ω上满足 Hölder 条件：即存在常数K，使得当P、$Q\in\Omega$时

$$|D^pu(P)-D^pu(Q)|\leqslant K|P-Q|^\alpha,\ N(p)\leqslant m \tag{2.8}$$

这种函数u的全体记为$C^{m+\alpha}(\Omega)$，它按通常的线性运算成为线性空间. 我们用$H_{\alpha,m}[u]$表示条件(2.8)中常数K的最小值. 在$C^{m+\alpha}(\Omega)$中令

$$\|u\|_{m+\alpha}=\|u\|_m+H_{\alpha,m}[u] \tag{2.9}$$

现在对每个非负实数β定义了函数空间$C^\beta(\Omega)$($\beta=m+\alpha$). 显然，$C^\beta(\Omega)$是线性空间. 不难验证，当β是整数时由(2.7)定义的$\|u\|_\beta$，以及当β不是整数时，由(2.9)定义的$\|u\|_\beta$，是空间$C^\beta(\Omega)$中元素u的范数.

函数空间$C^\beta(\Omega)$以及和它类似的其它函数空间，在偏微分方程理论中有重要的作用.

4. 凸集 凸集是泛函分析中常用的一个重要概念. 它起源于闵可夫斯基(Minkowski)所考察的有限维空间中的一种几何

学.

凸集所以和泛函分析发生密切联系，首先是因为对线性空间上半范数的研究需要凸集. 对于线性空间上任何一个半范数$p(x)$，集$\{x|p(x)\leqslant 1\}$就是一个凸集，称它为半范数p所导出的凸集. 可以给出一个凸集成为某个半范数（或范数）所导出的凸集的几何特征. 这样就可以把关于赋范线性空间或是赋半范空间上许多问题的研究，化为关于凸集的几何学的研究. 从而就能用几何的观点和方法来研究分析中的许多问题. 泛函分析的一个分支，局部凸拓扑线性空间的理论就是在这个基础上发展起来的，而且应用日见增多. 又如凸集的端点理论在泛函分析的各种表示理论中有较大影响. 晚近发展起来的凸分析与此密切相关，而且在许多不同的领域(例如对现代控制理论)有着重要的应用. 在本章§ 9 和§ 10 中将利用凸集来叙述一个重要的不动点原理.

定义 设R是一线性空间，A是R的一个子集，如果对A中任何两点x、y，联接它们的线段

$$\{\alpha x+(1-\alpha)y\,|\,0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$$

都在A中，那末称A是凸集.

例如，设R是线性空间，$p(x)$是R上的任意一个半范数. 任取$a\in R$及正数r，利用$p(\cdot)$作R中的球$S(a,r)=\{x|x\in R, p(x-a)\leqslant r\}$，那末$S(a,r)$是一个凸集. 事实上，当$x,y\in S(a,r)$时，由$p(x-a)\leqslant r$，$p(y-a)\leqslant r$得到

$$\begin{aligned}p(\alpha x+(1-\alpha)y-a)&=p(\alpha(x-a)+(1-\alpha)(y-a))\\&\leqslant\alpha p(x-a)+(1-\alpha)p(y-a)\leqslant r\end{aligned}$$

因此A是凸集.

又如线性空间R的每个线性子空间都是凸集.

设R是一个线性空间，如果$\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是一族凸集，从定义

容易看出$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$也一定是凸集. 因此, 如果$B$是$R$中的一个子集, 令$\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是$R$中包含$B$的凸集全体. 那么$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$就是包含$B$的最小的凸集, 称为$B$的凸包, 通常记为cov$B$. 可以证明: B的凸包是集

$$\{\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n\mid x_\nu\in B,\ \alpha_\nu\geqslant 0,\ \sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu=1\}$$

5. 商空间 设R是线性空间, E是R的一个线性子空间, 我们在R中规定: 当$x-y\in E$时为$x\sim y$, 容易证明$\sim$是R中的等价关系(见第一章§3), 我们把商集$R/\sim$记为R/E, 并记x所在的等价类为$\tilde{x}$. 在R/E中规定线性运算如下:

$$\tilde{x}+\tilde{y}=\widetilde{(x+y)}$$

$$\alpha\tilde{x}=\widetilde{(\alpha x)},\ \alpha\text{是数}$$

这样的线性运算是有确定的意义的. 例如我们讨论加法: 如果$\tilde{x}=\tilde{x}_1$, $\tilde{y}=\tilde{y}_1$, 那末$x-x_1\in E$, $y-y_1\in E$, 因此$x+y-(x_1+y_1)=(x-x_1)+(y-y_1)\in E$, 也就是

$$\widetilde{(x+y)}=\widetilde{(x_1+y_1)}$$

类似地可以讨论数乘. 容易看出R/E按这样规定的线性运算成为线性空间, 称R/E为R关于E的商空间. 也容易看出R/E中的零向量就是E, 即$\tilde{0}=E$. 事实上, 对任何$x\in E$, $x-0=x\in E$. 直观地说, 在商空间R/E中, E被"缩成"为零向量.

例 13 设$\Omega=(X,\boldsymbol{R},\mu)$是测度空间, S是X上关于$(X,\boldsymbol{R})$可测函数全体按通常的线性运算所成的线性空间. 令

$$E=\{f\mid f\in S,\ f\underset{\mu}{\doteq}0\}$$

S/E中的向量$\tilde{f}$就是一切与f(关于测度μ)几乎处处相等的函数全体所成的等价类.

例 14 设R是线性空间，$p(\cdot)$是定义在R上的半范数．令

$$E=\{x\,|\,p(x)=0\}$$

易证E是R的线性子空间．如在商空间R/E上规定

$$\tilde{p}(\tilde{x})=p(x)$$

也容易证明$\tilde{p}(\cdot)$是R/E上的范数．通常称$\tilde{p}(\cdot)$为由半范数$p(\cdot)$导出的范数．

在例 9 后面我们曾说"如果把$f(t)\doteq g(t)$的两个函数f、g就视为同一个函数，……，那末$p(f)$便是$L[a,b]$上范数"．其实，这句话中"视为同一"的作用等价于不区分f和$\tilde{f}$，从而也不区分$p(f)$和$p(\tilde{f})$而已．

习　题

1．在二维空间R^2中，对每一点$z=(x,y)$，令

$$\|z\|=\max\{|x|,|y|\}$$

证明$\|\cdot\|$是R^2中的一个范数．问

(i) 点集$K=\{z\,|\,\|z\|<1\}$是什么点集？

(ii) 置$e_1=(1,0)$，$e_2=(0,1)$．证明以原点$O=(0,0)$及e_1、e_2为顶点的三角形在此范数所确定的距离之下是等边三角形．

2．设a、b、p是实数，并且$p\geqslant 1$．证明不等式

$$|ta+(1-t)b|^p\leqslant t|a|^p+(1-t)|b|^p,\ 0\leqslant t\leqslant 1$$

特别地，令$t=\frac{1}{2}$，有$|a+b|^p\leqslant 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p)$．

3．设$C(0,1]$表示在半开半闭区间$(0,1]$上处处连续并且有界的函数$x(t)$的全体．对于每个$x\in C(0,1]$，令$\|x\|=\sup\limits_{0<t\leqslant 1}|x(t)|$，证明：

(i) $\|x\|$是$C(0,1]$空间上的范数；$C(0,1]$按$\|\cdot\|$成一赋范线性空间；

(ii) 在$C(0,1]$中点列$\{x_n\}$按范数$\|\cdot\|$收敛于x_0的充要条件是$\{x_n(t)\}$在$(0,1]$上均匀收敛于$x_0(t)$．

4．有界实数列全体所成的赋范线性空间l^∞与空间$C(0,1]$的一个子空间是等距同构的．

5. R 是赋范线性空间，称为**严格赋范的**，如果三角不等式 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ 中等号成立仅仅只有 $y=\alpha x(\alpha\geqslant 0)$. 证明二维欧几里得空间 E^2 是严格赋范的（分析上常用的严格赋范空间之一是 $L^p(p>1)$，可见本章§3. 严格赋范空间的作用参见本章§4 习题 14.）. 举例说明 $C[a,b]$、$L[a,b]$ 不是严格赋范的.

6. R 是线性空间，p 是 R 上函数，如果满足

(i) $p(x)\geqslant 0$, $p(x)=0$ 等价于 $x=0$;

(ii) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$;

(iii) $p(-x)=p(x)$，并且 $\lim\limits_{\alpha_n\to 0}p(\alpha_n x)=0$，$\lim\limits_{p(x_n)\to 0}p(\alpha x_n)=0$ (α_n, α 是数)，称 p 是**准范数**，(R,p) 为赋准范空间.

证明在 S 空间（见本章§1 例 7）中，规定

$$p(f)=\int_E\frac{|f(t)|}{1+|f(t)|}d\mu,$$

p 是 S 上准范数，因此，S 可视为赋准范空间. 类似地，$\mathscr{A}$, s 也是赋准范空间.

7. $(X,\boldsymbol{B})$ 是可测空间，$V(X,\boldsymbol{B})$ 是 $(X,\boldsymbol{B})$ 上（有限值）实或复广义（带符号）测度全体. 在 $V(X,\boldsymbol{B})$ 上定义加法和数乘为

$$(\mu+\nu)(A)=\mu(A)+\nu(A),\ \mu、\nu\in V(X,\boldsymbol{B}),\ A\in\boldsymbol{B}$$

$$(\alpha\mu)(A)=\alpha\mu(A),\ \mu\in V(X,\boldsymbol{B}),\ A\in\boldsymbol{B}$$

并规定

$$\|\mu\|=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\mu(E_i)|\ \middle|\ E_i\in\boldsymbol{B},\ E_i\cap E_j=\varnothing\ (i\neq j),\ \bigcup_{i=1}^{n}E_i=X\right\}$$

证明 $\|\cdot\|$ 是 $V(X,\boldsymbol{B})$ 上的范数.

8. R 是 $[0,1]$ 上多项式全体，对 R 中任何 $P(x)=\sum\limits_{0}^{n}a_ix^i$，规定 $\|P\|=\sum\limits_{0}^{n}|a_i|$. 证明 $\|\cdot\|$ 是 R 上范数，说明 R 按 $\|\cdot\|$ 不是严格赋范的.

9. 证明线性空间 X 中任何一族凸集的交仍是凸集；对任何 $x_0\in X$，凸集 A"移动"x_0 后所得的集 $A+x_0=\{y+x_0\,|\,y\in A\}$ 仍是凸集.

§3 空 间 L^p

1. L^p 上的范数 在分析中最常用的一类赋范线性空间是L^p. 设$(X, \mathbf{B}, \mu)$是一个测度空间, $E\in\mathbf{B}$, $f(t)$是E上的实值(或复值)函数, 取定正数p. 设f是E上的可测函数, 而且$|f|^p$在E上是可积的. 这种函数f的全体记做$L^p(E, \mathbf{B}, \mu)$①, 简记为$L^p(E, \mu)$, 简称$L^p(E, \mu)$中的函数是p方可积函数. 有时也用$L^p(E)$表示E上关于勒贝格测度的p方可积函数空间. 当$p=1$时, $L^1(E, \mu)$就是E上的可积函数全体, 也记作$L(E, \mu)$. 特别, 当E是区间$[a, b]$时改记$L^p([a, b])$为$L^p[a, b]$. 又如$L^p((-\infty, \infty))$改记为$L^p(-\infty, \infty)$, 如此等等.

$L^p(E, \mu)$ $(p>0)$按通常的线性运算成一线性空间. 事实上, 对于f、$g\in L^p(E, \mu)$, $f+g$在E上可测, 所以$|f+g|^p$是E上的可测函数. 对于任意的数a、b, 成立着不等式

$$(|a|+|b|)^p\leqslant[2\max(|a|, |b|)]^p\leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p) \tag{3.1}$$

由此得到

$$|f+g|^p\leqslant(|f|+|g|)^p\leqslant 2^p(|f|^p+|g|^p) \tag{3.2}$$

由于$|f|^p$, $|g|^p\in L(E, \mu)$, 所以$|f+g|^p\in L(E, \mu)$, 就是说

$$f+g\in L^p(E, \mu)$$

如果我们只考察实值函数, $L^p(E, \mu)$是实线性空间; 如果考察复值函数, 那末$L^p(E, \mu)$是复线性空间. 我们在$L^p(E, \mu)$里, 把几乎处处相等的两个可测函数f、g, 看成同一向量, 它可以用f表示, 也可以用g表示, 这时直接写$f=g$, 而不必再写成$f\doteq g$. 经过这样"同一化"之后, $L^p(E, \mu)$仍是线性空间. 由于对于几乎处处相等的函数, 它们的积分相等, 所以对$L^p(E, \mu)$中每个向量f作出

---

① 这时$(E, \mathbf{B}, \mu)$并不是测度空间, 但$(E, \mathbf{B}\cap E, \mu)$是测度空间. 我们写成$L^p(E, \mathbf{B}, \mu)$而不写成$L^p(E, \mathbf{B}\cap E, \mu)$是为了方便.

一个确定的数

$$\|f\|_p=\left(\int_E |f(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} (p\geqslant 1) \tag{3.3}$$

现来证明它是 $L^p(E,\mu)$ 上的范数. 为此, 先证明几个常用的重要不等式.

引理 1 (Hölder 不等式) 设 $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 如果 $f(x)\in L^p(E,\mu)$, $g(x)\in L^q(E,\mu)$, 那末 $f(x)g(x)\in L(E,\mu)$, 并且有

$$\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_q \tag{3.4}$$

当 $p=2$ 时, 不等式(3.4)就是 Cauchy 不等式:

$$\left(\int_E |f(x)g(x)|d\mu\right)^2\leqslant\int_E |f(x)|^2 d\mu\int_E |g(x)|^2 d\mu \tag{3.5}$$

证 首先证明: 对任意的非负数 A、B, 成立着不等式

$$A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{A}{p}+\frac{B}{q} \tag{3.6}$$

设 $y=\varphi(x)$ $(x\geqslant 0)$ 是严格增加的连续函数, 而且 $\varphi(0)=0$. $x=\psi(y)$ $(y\geqslant 0)$ 是 φ 的逆函数(如图 4.2). 从下面图中可以看出,

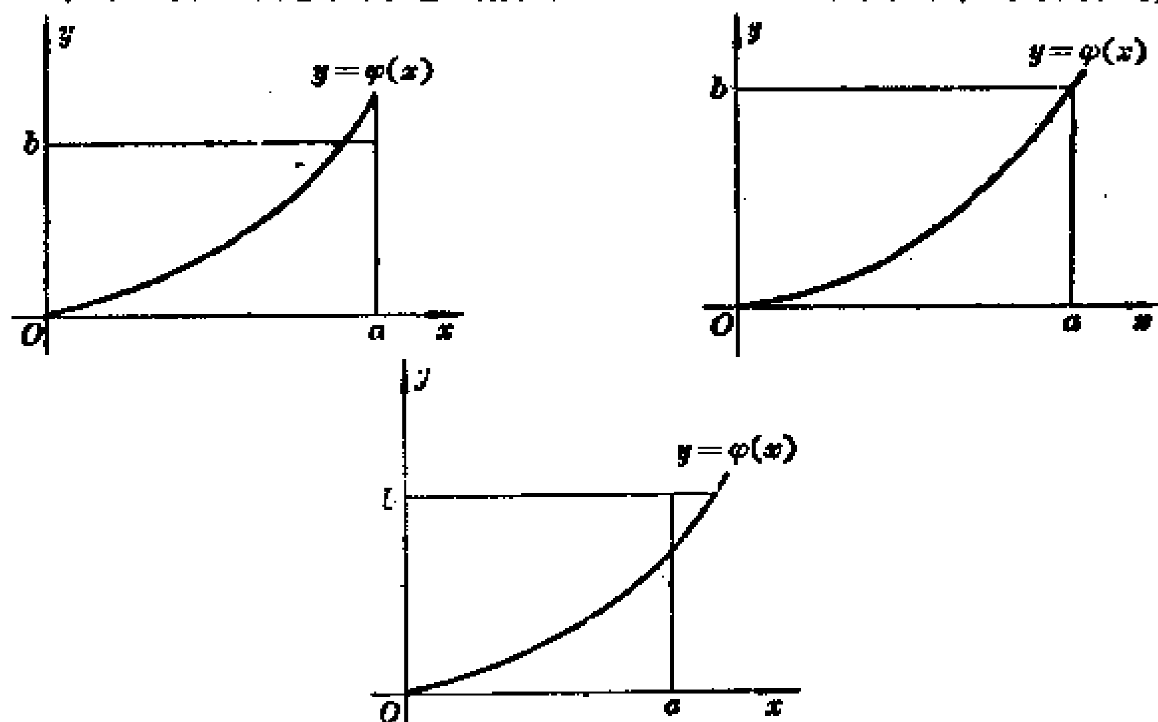


图 4.2

成立不等式

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx+\int_0^b \psi(y)\,dy\geqslant ab,\ a\geqslant 0,\ b\geqslant 0 \tag{3.7}$$

(这个不等式称做杨格(W. H. Young)不等式) 显然等号限于 $b=\varphi(a)$时成立.

于(3.7)中取$\varphi(x)=x^{p-1}$, $\psi(y)=y^{q-1}$, $a=A^{\frac{1}{p}}$, $b=B^{\frac{1}{q}}$就得到(3.6).

现在来证明 Hölder 不等式(3.4). 不妨设

$$\|f\|_p>0,\ \|g\|_q>0$$

(如果上述积分中有一个是 0, 即$\|f\|_p=0$ 或 $\|g\|_q=0$, 那末 $f(x)$或$g(x)$几乎处处为 0, 显然, 此时不等式(3.4)自然成立). 作函数

$$\varphi(x)=f(x)/\|f\|_p,\ \psi(x)=g(x)/\|g\|_q$$

令$A=|\varphi(x)|^p$, $B=|\psi(x)|^q$, 代入不等式(3.6)得到

$$|\varphi(x)\psi(x)|\leqslant\frac{|\varphi(x)|^p}{p}+\frac{|\psi(x)|^q}{q}$$

由于$|\varphi(x)|^p$, $|\psi(x)|^q\in L(E,\mu)$, 从上述不等式得知 $\varphi(x)\psi(x)\in L(E,\mu)$. 因此 $f(x)g(x)\in L(E,\mu)$, 并且从

$$\int_E|\varphi(x)\psi(x)|\,d\mu\leqslant\int_E\frac{|\varphi(x)|^p}{p}d\mu+\int_E\frac{|\psi(x)|^q}{q}d\mu=1$$

得到

$$\int_E|f(x)g(x)|\,d\mu\leqslant\left(\int_E|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|g(x)|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

这就是不等式(3.4). 证毕.

引理 2 (闵可夫斯基(Minkowski)不等式) 设 $p\geqslant 1$, $f(x)$、$g(x)\in L^p(E,\mu)$, 那末 $f(x)+g(x)\in L^p(E,\mu)$, 而且有

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p \tag{3.8}$$

证 当 $p=1$ 时, 不等式(3.8)显然成立. 如果$\|f+g\|_p=0$(即

$\int_E|f+g|^p d\mu=0$)，(3.8)也是显然的，所以不妨设$\int_E|f+g|^p d\mu\neq 0$，并且 $p>1$. 如果 $p>1$, f、$g\in L^p(E,\mu)$，那末 $f+g\in L^p(E,\mu)$. 取 $q>1$使得$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，那末$|f(x)+g(x)|^{p/q}\in L^q(E,\mu)$，而且由Hölder 不等式得到

$$\int_E|f(x)||f(x)+g(x)|^{p/q}d\mu$$
$$\leqslant\left(\int_E|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|f(x)+g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

又对于$\int_E|g(x)||f(x)+g(x)|^{p/q}d\mu$ 也有类似的不等式，从而

$$\int_E|f(x)+g(x)|^p d\mu=\int_E|f(x)+g(x)|^{1+\frac{p}{q}}d\mu$$
$$\leqslant\int_E(|f(x)|+|g(x)|)|f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}d\mu$$
$$\leqslant\left[\left(\int_E|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E|g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left[\int_E|f+g|^p d\mu\right]^{\frac{1}{q}}$$

两边除以$\left(\int_E|f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$便得到所要的不等式(3.8)：

$$\left(\int_E|f(x)+g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_E|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E|g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

证毕.

在 Hölder 不等式(3.4)中，等号成立的充要条件是：存在不全为零的非负实数 C_1、C_2，使得对几乎所有的 $x\in E$ 成立着

$$C_1|f(x)|^p=C_2|g(x)|^q.$$

换句话说，存在非负实数 λ，使得

$$|g(x)|\doteq\lambda|f(x)|^{\frac{p}{q}}$$

又在 Minkowski 不等式(3.8)中，等式成立的充要条件是：存在不全为零的非负实数 C_1、C_2，使得对于几乎所有的 $x\in E$，成立着 $C_1f(x)=C_2g(x)$. 换句话说，存在 $\lambda\geqslant0$，使得 $g(x)\doteq\lambda f(x)$.

这两件事留给读者证明.

引理 2 说明$\|\cdot\|_p$满足范数的条件(3). 由于把几乎处处等于零的函数 f 看成 $L^p(E,\mu)$中的零向量，所以$\|\cdot\|_p$满足范数的条件(4). 范数的其余两个条件：非负性和齐次性，$\|\cdot\|_p$显然是满足的. 所以，$\|\cdot\|_p$是 $L^p(E,\mu)(p\geqslant1)$上的范数.

定理 1 当 $p\geqslant1$ 时，$L^p(E,\mu)$按照范数

$$\|f\|_p=\left(\int_E|f(t)|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

成为赋范线性空间.

例 1 设$(\Omega,\ \boldsymbol{B},\ \mu)$是全 σ-有限测度空间，$k(s,t)\in L^2(\Omega\times\Omega,\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B},\mu\times\mu)$，$\varphi(t)\in L^2(\Omega,\boldsymbol{B},\mu)$. 那末

$$s\longmapsto\int_\Omega k(s,t)\varphi(t)d\mu(t)$$

是平方可积函数.

证 首先证$\int_\Omega k(s,t)\varphi(t)d\mu(t)$是$(\Omega,\boldsymbol{B},\mu)$上的可测函数. 事实上，当 $\mu(\Omega)<\infty$ 时，由于

$$|k(s,t)\varphi(t)|\leqslant\frac{1}{2}(|k(s,t)|^2+|\varphi(t)|^2)$$

再根据 $\varphi(t)\in L^2(\Omega,\boldsymbol{B},\mu)$以及 $\mu\times\mu(\Omega\times\Omega)<\infty$，由此可知

$$|k(s,t)|^2+|\varphi(t)|^2\in L(\Omega\times\Omega,\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B},\mu\times\mu),$$

从而 $k(s,t)\varphi(t)\in L(\Omega\times\Omega,\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B},\mu\times\mu)$. 由 Fubini 定理知 $\int_\Omega k(s,t)\varphi(t)d\mu(t)$ 是 $(\Omega,\boldsymbol{B},\mu)$ 上可测函数. 而对一般的测度空间，由于 σ-有限性，存在 $\{A_i\}\subset\boldsymbol{B}$，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，

$\mu(A_i)<\infty$, $i=1,2,\cdots$, 使得 $\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. 类似于 $\mu(\Omega)<\infty$ 情况的讨论，固定每对 i、j, 当把 $k(s,t)$、$\varphi(t)$ 视为 $(A_i\times A_j, \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}\cap A_i\times A_j, \mu\times\mu)$ 上函数时, $\int_{A_j}k(s,t)\varphi(t)d\mu(t)$ 是 $(A_i, \boldsymbol{B}\cap A_i, \mu)$ 上可测函数．由于 $\{A_i\}$ 是互不相交的，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$, 易知

$$\int_{A_j}k(s,t)\varphi(t)d\mu(t)$$

是 $\left(\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i,\ \boldsymbol{B},\mu\right)$ 上可测函数，因而

$$\int_{\Omega}k(s,t)\varphi(t)d\mu(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{A_j}k(s,t)\varphi(t)d\mu(t)$$

是 $(\Omega,\boldsymbol{B},\mu)$ 上可测函数．

再由 Cauchy 不等式(3.5)，有

$$\left|\int_{\Omega}k(s,t)\varphi(t)d\mu(t)\right|^2\leqslant\int_{\Omega}|k(s,t)|^2d\mu(t)$$
$$\times\int_{\Omega}|\varphi(t)|^2d\mu(t)$$

由于 $k(s,t)$ 是 $\Omega\times\Omega$ 上的平方可积函数，所以

$$\int_{\Omega}\left(\int_{\Omega}|k(s,t)|^2d\mu(t)\right)d\mu(s)<\infty$$

从而 $\int_{\Omega}k(s,t)\varphi(t)d\mu(t)$ 是平方可积的，并且有

$$\int_{\Omega}\left|\int_{\Omega}k(s,t)\varphi(t)d\mu(t)\right|^2d\mu(s)\leqslant$$
$$\iint\limits_{\Omega\times\Omega}|k(s,t)|^2d\mu\times d\mu\int_{P}|\varphi(t)|^2d\mu(t)$$

2. 平均收敛与依测度收敛的关系 在 $L^p(E,\mu)$ 中，设函数列 f_n 依范数 $\|\cdot\|_p$ 收敛于 f，即

$$\int_E |f_n(x)-f(x)|^p d\mu \to 0, n\to\infty$$

这种收敛在经典分析中称为$f_n(x)$在E上p方平均收敛于$f(x)$(有时也省略地说$f_n(x)$平均收敛于$f(x)$). 它和依测度收敛关系很密切.

定理2 设 $f_n(x)$, $n=1,2,\cdots$及 $f(x)$ 是 $L^p(E,\boldsymbol{B},\mu)$ 中的函数. 如果函数列 $\{f_n(x)\}$是 p 方平均收敛于 $f(x)$, 那末函数列$\{f_n(x)\}$必然在E上依测度收敛于 $f(x)$.

证 对于任何正数σ, 有

$$\begin{aligned}\int_E |f_n(x)-f(x)|^p d\mu &\geqslant \int_{E(|f_n-f|\geqslant\sigma)} |f_n(x)-f(x)|^p d\mu\\ &\geqslant \sigma^p \mu(E(|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma))\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 就有 $\mu(E(|f_n(x)-f(x)|)\geqslant\sigma)\to 0$. 证毕.

系 设函数列$\{f_n(x)\}$ 是 p 方平均收敛于函数 $f(x)$. 那末必有子函数列$\{f_{n_k}(x)\}$概收敛于 $f(x)$.

这由定理2和Riesz定理(第三章§2定理3)立即可得.

然而定理2的逆命题不正确. 即使函数列 $\{f_n(x)\}$ 在有限可测集E上处处收敛于 $f(x)$, 也不能保证$\{f_n(x)\}$平均收敛于 $f(x)$.

例2 我们作$[0,1]$区间上的函数列$\{f_n(x)\}$如下:

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0 \text{ 或} \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1\\ e^n, & \text{当 } 0<x<\frac{1}{n}\end{cases}$$

显然, $\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上处处收敛于零, 但是当 $n\to\infty$ 时, 对于任何的正数 p

$$\int_0^1 |f_n(x)|^p dx=\int_0^{\frac{1}{n}} e^{pn}dx=\frac{1}{n}e^{pn}\to\infty, \ (n\to\infty)$$

所以$\{f_n(x)\}$并不 p 方平均收敛于零.

3. 空间 $L^\infty(E,\mu)$ 设E是测度空间$(\Omega,\boldsymbol{B},\mu)$上一个可测集, $f(x)$ 是E上的可测函数. 如果 $f(x)$和E上的一个有界函数几乎处

处相等——换句话说，如果有E中(关于μ)的零集E_0，使得$f(x)$在$E-E_0$上是有界的——那末我们称$f(x)$是E上(关于μ)的**本性有界可测函数**. E上的本性有界可测函数全体记做$L^\infty(E,\mu)$. 显然，由于有限个零集的和集也是零集，所以任意有限个本性有界可测函数的线性组合是本性有界的，因此，$L^\infty(E,\mu)$按通常的线性运算是一线性空间.

设$f(x)$是E上的本性有界可测函数，令

$$\|f\|_\infty=\inf_{\substack{\mu(E_0)=0\\E_0\subset E}}(\sup_{E-E_0}|f(x)|) \tag{3.9}$$

这里下确界是对于E中所有使得$f(x)$在$E-E_0$上成为有界函数的零集E_0而取的，称为f的**本性最大模**，有时也记做

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E}|f(x)|$$

(3.9)中的下确界$\inf\limits_{E_0}$是可达的，就是说必有含于E的零集E_0使得$\|f\|_\infty$等于$|f(x)|$在$E-E_0$上的上确界. 这是因为，由inf的意义，对每个n，有$E_n\subset E$使得$\mu(E_n)=0$，并且

$$\sup_{x\in E-E_n}|f(x)|<\|f\|_\infty+\frac{1}{n}$$

作$E_0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，那末$\mu(E_0)=0$，并且

$$\|f\|_\infty\leqslant\sup_{E-E_0}|f(x)|\leqslant\sup_{E-E_n}|f(x)|<\|f\|_\infty+\frac{1}{n}$$

令$n\to\infty$，就得到$\|f\|_\infty=\sup\limits_{E-E_0}|f(x)|$. 还可以证明$\|f\|_\infty$是与$f(x)$几乎处处相等的各个有界函数的绝对值的上界的最小值.

我们用$\|f\|_\infty$作为线性空间$L^\infty(E,\mu)$上的向量f的范数(容易验证$\|\cdot\|_\infty$确实满足范数的条件)，那末，$L^\infty(E,\mu)$关于$\|\cdot\|_\infty$成为赋范线性空间. 现在来考察空间$L^\infty(E,\mu)$中点列$\{f_n\}$收敛的情况.

设f_n、$f\in L^\infty(E,\mu)$，$n=1,2,\cdots$，而且$\|f_n-f\|_\infty\to0$，那末有

$F_n \subset E$, $\mu(F_n)=0$, 使得

$$\|f_n-f\|_\infty=\sup_{E-F_n}|f_n(x)-f(x)|\to 0$$

取 $F_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, 那末, F_0 是一零集, 并且

$$\sup_{E-F_0}|f_n(x)-f(x)|\to 0 \tag{3.10}$$

由于 F_0 是 E 中的零集, (3.10)说明了$\{f_n(x)\}$在E上除去一个零集 F_0 后是均匀收敛于 $f(x)$的. 这时我们就说 $\{f_n(x)\}$ 在E上几乎匀敛于 $f(x)$. 显然, (3.10)也是使$\|f_n-f\|_\infty\to 0$ 的充分条件.

因此, 度量空间 $L^\infty(E,\mu)$ 中依距离收敛就是几乎匀敛.

如果 $\mu(E)<\infty$, 显然对一切正数 p, $L^\infty(E,\mu)\subset L^p(E,\mu)$. 现在来证明: 当 $\mu(E)<\infty$ 时

$$\|f\|_\infty=\lim_{p\to\infty}\|f\|_p \tag{3.11}$$

事实上, 只要考察 $\mu(E)>0$, $\|f\|_\infty\neq 0$ 的情况好了. 取E中的零集 E_0使得$\|f\|_\infty=\sup_{E-E_0}|f(x)|$, 于是

$$\int_E|f(x)|^p d\mu=\int_{E-E_0}|f(x)|^p d\mu\leqslant\|f\|_\infty^p\mu(E) \tag{3.12}$$

由于 $\mu(E)^{\frac{1}{p}}\to 1(p\to\infty)$, 从(3.12)立即得到

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\|f\|_p\leqslant\|f\|_\infty \tag{3.13}$$

另一方面, 任取一个正数 $e<\|f\|_\infty$, 集 $E_e=E(|f(x)|\geqslant\|f\|_\infty-e)$不会是零集. 因为如果这是零集的话, 在$E$中去掉这个集后, $|f(x)|$在剩下来的 $E-E_e$ 中的上确界不超过$\|f\|_\infty-e$, 这显然和$\|f\|_\infty$的定义冲突. 因此

$$\|f\|_p\geqslant\left(\int_{E_e}|f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\geqslant(\|f\|_\infty-e)[\mu(E_e)]^{\frac{1}{p}}$$

令 $p\to\infty$ 就得到

$$\varliminf_{p\to\infty}\|f\|_p\geq\|f\|_\infty-\varepsilon$$

再令 $\varepsilon\to0$，并且利用(3.13)就得到等式(3.11)。

极限关系(3.11)就是我们采用记号 $\|f\|_\infty$ 和 $L^\infty(E,\mu)$ 的理由。

4. 数列空间 l^p 记满足 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty(p\geq1)$ 的实（或复）数列 $x=\{x_k\}$ 全体为 l^p，在 l^p 中按照对每个坐标 x_k 的线性运算，易知它成为线性空间．对于数列，也有类似于引理 1、2 的不等式，也就是说，只要级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty$ 及 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|y_k|^q<\infty$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|z_k|^p<\infty$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$，那末就有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_k|\leq\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p}\cdot\sqrt[q]{\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^q}$$

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+z_k|^p}\leq\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p}+\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^p}$$

这两个不等式也依次称为 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式，也是应用不等式(3.6)来证明的，或直接作为引理 1、2 的推论①.

在 l^p 中规定

$$\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

由 Minkowski 不等式可以验证 $\|\cdot\|_p$ 是 l^p 上的范数，按此范数 l^p 成

① 令 N 表示自然数全体，$\mathbf{B}$ 是 N 的子集全体，μ 是 $(N,\mathbf{B})$ 上如下的测度：当 $M\in\mathbf{B}$ 时，$\mu(M)$ 是 M 中元素的个数（可以是无限的）．将每个数列 $\{x_k\}$ 看成 N 上的函数：$x(k)=x_k$，那末这时 l^p 就是 $L^p(N,\mathbf{B},\mu)$，因此这两个不等式分别成为 (3.4)、(3.6)的特殊情况．在别的问题中，把 l^p 看成这样的 $L^p(N,\mathbf{B},\mu)$ 也是有益的。

为赋范线性空间.

应该指出, 如果 $0<p<1$, Minkowski 不等式一般不成立. 这时 $\|\cdot\|_p$ 不是 $L^p(E,\mu)$(或 l^p) 上的范数. 例如 $p=\frac{1}{2}$, 在 l^p 中取 $x=(1,0,0,\cdots)$, $y=(0,1,0,0,\cdots)$, 显然,

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2=2^2>1+1=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

因而 $\|\cdot\|_p\left(p=\frac{1}{2}\right)$ 不是范数.

习　题

1. 证明 Hölder 和 Minkowski 不等式成为等式的充要条件分别是

$$c_1|f(x)|^p \doteq c_2|g(x)|^q, \quad c_1f(x)\doteq c_2g(x)$$

其中 c_1、c_2 是非负常数(这说明 L^p 是严格赋范空间, 参见 §2 习题 5).

2. 设 $R_1,\cdots,R_n,\cdots$ 是一列赋范线性空间. $x=\{x_n\}$ 是一列元素, 其中 $x_n\in R_n$, $n=1,2,\cdots$. 而且 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p<\infty$. 这种元素列的全体记做 R, 类似通常的数列的加法及数积运算, 在 R 中引入线性运算, 证明 R 是一线性空间. 如果又规定

$$\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ (p\geqslant 1)$$

证明 R 按范数 $\|\cdot\|$ 成为赋范线性空间; R 是严格赋范 (参见 §2 习题 5) 的充要条件是每个 R_n 都是严格赋范的.

3. 对于 $0<p<1$, 在 l^p 中, 规定

$$\|x\|_p=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p, \quad x=(x_1,x_2,\cdots)$$

证明 $\|\cdot\|_p$ 是 $l^p(0<p<1)$ 上的准范数(准范数定义见 §2 习题 6).

4. 设 $(\Omega,\mathbf{B},\mu)$ 是全有限测度空间, $1\leqslant p<p'$, 那末 $L^{p'}(\Omega,\mathbf{B},\mu)\subset$

$L^p(\Omega, \boldsymbol{B}, \mu)$. 当 $(\Omega, \boldsymbol{B}, \mu)$ 不是全有限时, 举例说明 $L^{p'}(\Omega, \boldsymbol{B}, \mu) \subset L^p(\Omega, \boldsymbol{B}, \mu)$ 未必成立。

§4 度量空间中的点集

我们现在回过来探讨一般的度量空间. 为了进一步研究度量空间中的极限, 度量空间上的连续函数等概念, 有必要研究度量空间中的点集. 在第一章中, 已经就直线上的开集和闭集等进行了研究. 在那里已经介绍了点集的极限点、导集、环境(邻域)、开集、闭集以及稠密性和疏朗集等概念, 现在把这些概念拓广到度量空间中来. 大多数定义的叙述和定理的证明, 几乎可以把以前的行文逐字逐句移植过来, 而无须进行多大的改变. 尽管如此, 但由于一般距离函数的广泛性, 仍然需要我们仔细对待这里的概念的拓广. 在需要的时候, 我们也将指出它们的差别.

1. 内点、开集 首先, 类似于直线上点集的内点, 引入如下的概念:

定义 设 A 是度量空间 R 中的点集, $x_0 \in A$. 如果 A 含有 x_0 的一个 a-环境 $(a>0)$, 便称 x_0 是 A 的**内点**.

设 A 是度量空间 R 中的点集. 如果点集 A 中每一点都是 A 的内点, 那末就称 A 是度量空间 R 中的**开集**. 规定空集也是开集.

度量空间中的球 $O(x_0, a)$ $(a>0)$ 就是开集. 因为, 如果 $z \in O(x_0, a)$, 那末 $\rho(z, x_0)<a$. 取正数 $\varepsilon<a-\rho(z, x_0)$, 那末当 $\rho(x, z)<\varepsilon$ 时 $\rho(x, x_0) \leqslant \rho(x, z)+\rho(z, x_0)<a$ 因此 $O(z, \varepsilon) \subset O(x_0, a)$ (见图 4.3). 因而 $O(x_0, a)$ 中每一点都是自己的内点, 所以球 $O(x_0, a)$ 是开集.

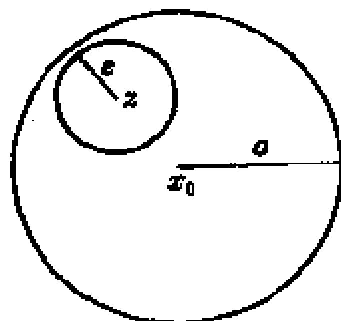


图 4.3

在一致离散的度量空间 R 中，每点 x_0 都有一个环境 $O(x_0, a)$ $(a\leqslant 1)$ 只含有 x_0 这一点，所以 R 的任何集中每点都是内点，因此 R 的一切子集都是开集.

象在实数直线中的情况一样，我们有下面的

定理 1 设 R 是度量空间，那末

(i) 空集和全空间是开集;

(ii) 任意个开集的和集是开集;

(iii) 有限个开集的通集是开集.

证 (i) 是显然的.

(ii) 设 $\{M_l \mid l\in I\}$ 是 R 中任意一族开集. 设 $x\in\bigcup_{l\in I} M_l = M$，那末有 $l\in I$，使 $x\in M_l$. M_l 是 R 中的开集，所以 x 是 M_l 的内点，于是必有含 x 的 a-环境 $O(x, a)\subset M_l \subset M$. 所以 x 是 M 的内点.

(iii) 设 M_1、$\cdots$、M_n 是有限个开集，任取 $x\in \bigcap_{\nu=1}^{n} M_\nu$，于是 x 在每个开集 M_1、$\cdots$、M_n 之中. 由于 x 是开集 M_ν 的内点，有正数 r_ν 使得 $O(x, r_\nu)\subset M_\nu$，$\nu=1, \cdots, n$. 取

$$r=\min_{1\leqslant\nu\leqslant n} r_\nu$$

那末 $r>0$，而且 x 的 r-环境 $O(x, r)$ 含在每个开集 M_ν 之中，$\nu=1, \cdots, n$. 这说明 $O(x, r)\subset \bigcap_{\nu=1}^{n} M_\nu$，所以 x 是通集 $\bigcap_{\nu=1}^{n} M_\nu$ 的内点，通集 $\bigcap_{\nu=1}^{n} M_\nu$ 是开集. 证毕.

定义 设 R 是度量空间，$x_0\in R$，称 R 中包含 x_0 的任何开集 G 为 x_0 的一个**环境**，也称作 x_0 的**邻域**.

由于 $O(x_0, a)$ 是开集，所以对于正数 a，x_0 的 a-环境 $O(x_0, a)$ 也是 x_0 的环境.

设 A 是度量空间 R 中的一个点集，那末 x_0 成为 A 的内点的充

要条件是 x_0 有一个环境包含在 A 中.

定义　设 A 是度量空间 R 中的点集. A 的内点全体所成的点集称为 A 的**核**，记做 $K(A)$.

对于度量空间中点集的核有下面的一些性质:

定理 2　度量空间中点集 A 的核 $K(A)$ 是开集.

证　任取 $x_0\in K(A)$，必有 $O(x_0,\varepsilon)\subset A$. 由于 $O(x_0,\varepsilon)$ 是开集，它也是 $O(x_0,\varepsilon)$ 中每点 z 的环境，因此 $O(x_0,\varepsilon)$ 中每点 z 是 A 的内点，$z\in K(A)$，这就是说 $O(x_0,\varepsilon)\subset K(A)$. 因此，$x_0$ 也是 $K(A)$ 的内点，$K(A)$ 是开集. 证毕.

点集 A 的核 $K(A)$ 是包含在 A 中的最大的开集. 换句话说，有

定理 3　对于点集 A 中的任何开子集 G 都有 $G\subset K(A)$.

证　因为 G 是开集，当 $x\in G$ 时必有 x 的环境 $O(x)\subset G\subset A$，所以 x 也是 A 的内点，因此 $x\in K(A)$. 这就得到 $G\subset K(A)$. 证毕.

定理 4　A 成为开集的充要条件是 $A=K(A)$.

证　当 $A=K(A)$ 时，由定理 2，A 自然是开集. 反过来，如果 A 是开集，那末由定理 3，$K(A)\supset A$，但是自然有 $K(A)\subset A$，所以 $A=K(A)$. 证毕.

例 1　在复数平面上(按照欧几里得距离)考察集 $A=\{z\,\|\,|z|<1$；或者 $1\leqslant|z|<2$，但 $z=x+iy$，x 是有理数$\}$. 容易明白，只有在单位圆 $|z|<1$ 内的点是 A 的内点，而圆环 $\{z\,|\,1\leqslant|z|<2\}$ 中属于 A 的点都不是 A 的内点.

我们注意，本节中所述的内点以及后面的各种概念，都是相对于某个空间而言. 例如开区间 (a,b)，作为一维空间中的点集，其中每点都是内点；但如果把它放在二维平面中考察，那其中每点又都不是内点了. 因为随着空间的改变，环境的含义也改变了.

我们可以用环境的概念把收敛点列的概念改述如下:

引理 1 设 R 是度量空间，$\{x_n\}$ 是 R 中的点列，又设 $x_0\in R$. 那末点列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x_0 的充要条件是对于 x_0 的任何环境 $O(x_0)$，存在自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时 $x_n\in O(x_0)$.

证 必要性：设 $x_n\to x_0$，任取 x_0 的一个环境 $O(x_0)$，由于 x_0 是 $O(x_0)$ 的内点，所以有正数 a，使 $O(x_0,a)\subset O(x_0)$. 对于 a，有自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，$\rho(x_n,x_0)<a$，因而

$$x_n\in O(x_0,a)\subset O(x_0)$$

充分性：设 $\{x_n\}$ 具有如下的性质：对于 x_0 的任意一个环境——例如 $O(x_0,\varepsilon)$——有自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，$x_n\in O(x_0,\varepsilon)$，那末当 $n\geqslant N$ 时

$$\rho(x_n,x_0)<\varepsilon$$

因此 $x_n\to x_0$. 证毕.

显然，在引理 1 中可以改一般的"环境"为特殊的"a-环境".

2. 极限点、闭集

定义 设 R 是度量空间，A 是 R 中的集. 对于 $x_0\in R$，如果 x_0 的每个 a-环境中都含有 A 中无限个点，那末称 x_0 是点集 A 的**极限点**.

引理 2 设 A 是度量空间 R 中的点集，$x_0\in R$. 那末下面四件事是彼此等价的.

(i) x_0 是集 A 的极限点.

(ii) x_0 的任何一个环境 $O(x_0)$ 中必含有 A 中异于 x_0 的点，即 $(O(x_0)-\{x_0\})\cap A\neq\varnothing$.

(iii) 在集 A 中存在一列点 $\{x_n\}$，适合 $x_n\neq x_0$ 而且 $x_n\to x_0$.

(iv) 在集 A 中必有一列互不相同的点 $\{x_n\}$，而且 $x_n\neq x_0$，使得 $x_n\to x_0$.

引理 2 的证明完全和直线上的情形相仿，我们把它略去.

和极限点的概念相对立的是孤立点. 设 A 是度量空间中的点

集，$x_0\in A$．如果 x_0 有一个环境 $O(x_0)$，在其中除 x_0 外不含有 A 的点，就称 x_0 是 A 的**孤立点**．如果度量空间 R 中每一点都是孤立点，称 R 是**离散**的度量空间．

例 2　$R=\left\{\frac{1}{n}\right\}(n=1,2,\cdots)$，$R$ 上距离就是普通实数间的距离．这时 R 就是离散的度量空间．注意，R 不是一致离散的．

显然，在离散度量空间中，每个单点集 $\{x_0\}$ 是开集因而一切子集都是开集．

和在直线上一样，在度量空间中点集 A 的极限点不能是孤立点，而孤立点也不可能是 A 的极限点．点集 A 中的点除孤立点外就是极限点．但是，在一般度量空间中，点集的内点可以是孤立点，例如在离散的度量空间中就是如此．

定义　设 A 是度量空间 R 中的点集．A 的极限点全体所成的集称做 A 的**导集**，记做 A'．称 $\bar{A}=A\cup A'$ 是 A 的**闭包**．

(1) 如果 $A'\subset A$，就称 A 是**闭集**；

(2) 如果 $A\cap A'=\varnothing$，称 A 是**孤立点集**；

(3) 如果 $A\subset A'$，称 A 是**自密集**；

(4) 如果 $A=A'$，称 A 是**完全集**．

引理 3　设 A 是度量空间 R 中的点集，$x\in R$，那末下列三件事彼此等价．

(i) $x\in\bar{A}$．

(ii) x 的每个环境 $O(x)$ 中有 A 的点．

(iii) 有点列 $\{x_n\}\subset A$ 使得 $x_n\to x$．

证　(i)→(ii)：设 $x\in\bar{A}$，如果 $x\in A$，那末 $O(x)$ 中当然有 A 的点，例如 x．如果 $x\in A'$，但 $x\bar{\in}A$，显然 $(O(x)-\{x\})\cap A\neq\varnothing$，$O(x)$ 中当然也有 A 的点．

(ii)→(iii)：设 x 的每个环境 $O\left(x,\frac{1}{n}\right)$ 中有 A 的点 x_n，那末点

列$\{x_n\}\subset A$, $\rho(x_n, x)<\frac{1}{n}$, 所以 $x_n\to x$.

(iii)→(i): 设$\{x_n\}\subset A$, 且 $x_n\to x$. 如果 $x\in A$, 自然有 $x\in\bar{A}$. 如果 $x\overline{\in}A$, 那末由于$\{x_n\}\subset A$, 所以 $x_n\neq x$, 因此由 $x_n\to x$ 得到 $x\in A'$. 总之, $x\in\bar{A}$. 证毕.

在离散的度量空间中, 任一点集都没有极限点. 因而每个点集都是闭集, 同时还是开集. 由此可见, 在有的度量空间中, 既开又闭的集可能很多.

定理 5 度量空间中的点集 A 为闭集的充要条件是: A 中任何一个收敛点列必收敛于 A 中的一点.

定理 6 度量空间中的点集 A 成为闭集的充要条件是: 它的余集 $A^c=R-A$ 是开集.

定理 7 在度量空间中下列命题成立.

(i) 空集及全空间是闭集;

(ii) 任意个闭集的通集是闭集;

(iii) 有限个闭集的和集是闭集.

定理 8 闭集减开集的差集是闭集, 而开集减闭集的差集是开集.

这四个定理的证明与直线上的情形相仿, 作为练习, 留给读者自证.

关于点集的导集和闭包, 有下面的性质:

定理 9 集 A 的导集 A' 和闭包 $\bar{A}$ 都是闭集.

证 设 x_0 是 A' (或 $\bar{A}$)的极限点. 任取正数 a, 那末必有

$$y\in(O(x_0, a)-\{x_0\})\cap A' \text{ (相应地 } y\in(O(x_0, a)-\{x_0\}\cap\bar{A}).$$

取 $\varepsilon=\min(a-\rho(x_0, y),\ \rho(x_0, y))$, 那末 $\varepsilon>0$, 而且 $O(y, \varepsilon)\subset O(x_0, a)$, 但 $x_0\overline{\in}O(y, \varepsilon)$. 由于 $y\in A'$ (相应地 $y\in\bar{A}$), 在 $O(y, \varepsilon)$ 中必有 $x\in A$(见图 4.4). 因此, $x\in O(x_0, a)$, 但是 $x\neq x_0$(这是因为 x_0

$\overline{\in} O(y,\varepsilon))$，所以$(O(x_0,a)-\{x_0\})\cap A\neq\varnothing$. 因此 x_0 是A的极限点，所以 $x_0\in A'$（也就有 $x_0\in\bar{A}$）. 因而A'（同样地$\bar{A}$）是闭集. 证毕.

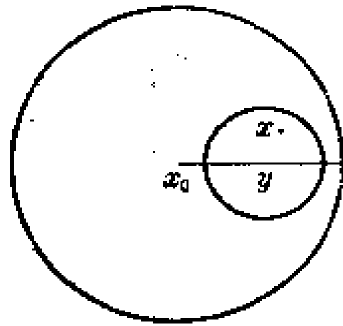


图 4.1

我们之所以把$\bar{A}$称为A的闭包，这是因为$\bar{A}$是包含着A的最小闭集. 换句话说，有下述

定理 10　在度量空间R中，如果闭集F含有集A，那末$F\supset\bar{A}$.

证　从极限点的定义和$A\subset F$可以直接推出$A'\subset F'$. 由于假设F是闭集，$F'\subset F$，所以$A'\subset F$. 因此$\bar{A}=A\cup A'\subset F$. 证毕.

不难由此得到结论：A的闭包就是R中所有包含A的闭集的通集：

$$\bar{A}=\bigcap_{F\supset A}F\ (F\subset R\text{ 并且 }F'\subset F)$$

定理 11　A成为闭集的充要条件是$A=\bar{A}$.

例 3　设L是赋范线性空间R中的线性子空间，那末$\overline{L}$是R中包含L的最小的、闭的线性子空间.

证　由定理 9，$\overline{L}$是闭集. 今证$\overline{L}$是线性子空间. 设x、$y\in\overline{L}$，根据引理 3，必有$\{x_n\}$、$\{y_n\}\subset L$，而且$x_n\to x$，$y_n\to y$，因此$x_n+y_n\to x+y$. 但是$x_n+y_n\in L$，所以$x+y\in\overline{L}$. 同样可以证明，当α是数时，$\alpha x\in\overline{L}$，因此$\overline{L}$是线性子空间. 由定理 10 得知$\overline{L}$是包含L的最小的闭集. 因而$\overline{L}$是包含L的最小的闭的线性子空间. 证毕.

闭的线性子空间也简称为**闭线性子空间**，或**线性闭子空间**.

后面有时要用到下面的概念：

定义　设A是赋范线性空间R中的子集，记$L(A)$（或 span $\{A\}$）为A中向量的线性组合全体所成的线性子空间，称$\overline{(L(A))}$

(或 $\overline{\text{span}\{A\}}$)是由 A 张成的线性闭子空间.

例 4 设 $B[a, b]$ 是区间 $[a, b]$ 上有界函数 $x=x(t)$ 全体按通常的线性运算和范数 $\|x\|=\sup\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$ 所成的赋范线性空间. 令 A 是区间 $[a, \xi]$ $(a\leqslant\xi\leqslant b)$ 的特征函数 $\chi_{[a,\xi]}$ 全体, 显然 $A\subset B[a, b]$. 那末 A 所张成的线性闭子空间 $\overline{L(A)}\supset C[a, b]$.

证 任取 $x\in C[a, b]$, 作 $\xi_k^{(n)}=a+\dfrac{k}{n}(b-a)$, 作函数

$$x_n(t)=\sum_{k=1}^{n}x(\xi_k^{(n)})(\chi_{[a,\xi_k^{(n)}]}(t)-\chi_{[a,\xi_{k-1}^{(n)}]}(t))$$

那末 $x_n\in L(A)$. 今证 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$. 事实上, 由于当 $t\in(\xi_{k-1}^{(n)}, \xi_k^{(n)})$ 时 $x_n(t)=x(\xi_k^{(n)})$, 所以

$$\begin{aligned}\|x_n-x\|&=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sup_{\xi_{k-1}^{(n)}<t\leqslant\xi_k^{(n)}}|x(t)-x(\xi_k^{(n)})|\\&\leqslant\max_{|t-t'|\leqslant\frac{b-a}{n}}|x(t)-x(t')|\end{aligned}$$

由函数 $x(\cdot)$ 在 $[a, b]$ 上的一致连续性立即可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$. 因此, 由引理 3, $x\in\overline{L(A)}$. 证毕.

这个例子在第五章 §2 中要用到.

例 5 设 R 是赋范线性空间, A 是 R 中的凸集, 那末 A 的闭包 $\bar{A}$ 也是凸集. (这个事实在本章 §9 引理 2 的系中用到.)

定义 设 A 是度量空间 R 中的点集, 称 $\bar{A}\cap\overline{(R-A)}$ 是 A 的**境界**, 记做 $\Gamma(A)$. A 的境界中的点称作 A 的**境界点**. 而 $R-\bar{A}$ 中的点称为 A 的**外点**.

显然, 任意点集 A 的境界是闭集. A 的境界 $\Gamma(A)$ 同时也是 A 的余集 $R-A$ 的境界, 即 $\Gamma(A)=\Gamma(R-A)$.

从引理 3 知道, 境界点的特征是它的任何一个 a- 环境中既有 A 中的点, 也有不在 A 中的点. A 的境界点可以属于 A 也可以不

属于 A. 点集 A 的闭包 $\bar{A}$ 减去它的核 $K(A)$ 就是 A 的境界. 事实上

$$\bar{A}-K(A)=\bar{A}\cap(R-K(A))=\bar{A}\cap\overline{(R-A)}=\Gamma(A)$$

此外容易明白，点集 A 的外点和 A 的余集 $R-A$ 的内点这两者是一致的.

3. 子空间的开集和闭集 应特别注意，内点、极限点、开集、闭集等概念都是相对于一定空间而言. 我们以开集和闭集两个概念为例详细阐述这一点如下:

设 R 是实数直线(按照通常的距离) E^1 的子空间 $[0, 1)$. 任取 $a\in(0, 1)$, 我们容易看出 $[0, a)$ 及 $[a, 1)$ 分别是 R 中的开集及闭集; 然而它们在度量空间 E^1 中就都是既不开、又不闭的点集. 又如 E^1 的子集 $(0, \infty)$ 看成子空间时也是度量空间，因而 $(0, \infty)$ 是子空间 $(0, \infty)$ 中的闭集, 但不是 E^1 中的闭集.

现在来讨论子空间中的开集和闭集的结构.

定理 12 设 R 是度量空间, A 是 R 的子空间. 那末，集 B 是 A 中的闭集的充要条件是存在 R 中的闭集 C 使得 $B=A\cap C$.

证 先证必要性: 设 B' 是 B 在 R 中的导集, 即 B 在 R 中的极限点全体, 那末 B 在 A 中的极限点全体就是 $B'\cap A$, 因而 B 是 A 中的闭集的充要条件是 $(B'\cap A)\subset B$, 即 $\bar{B}\cap A=B$. 因此可以取 $C=\bar{B}$, 这里 $\bar{B}$ 指的是 B 在 R 中的闭包.

再证充分性: 如果 $B=A\cap C$, 显然 $C\supset B$. 因为 C 是闭集, 所以 $C\supset\bar{B}$, 从而 $B=A\cap C\cap\bar{B}=A\cap\bar{B}$, 即 B 的极限点如果在 A 中必在 B 自身中, 即 B 是子空间 A 的闭集. 证毕.

定理 13 设 R 是度量空间, A 为 R 的子空间, 那末 B 是 A 中的开集的充要条件是有 R 中的开集 O, 使 $B=A\cap O$.

证 在子空间 A 中, B 是开集的充要条件是 $A-B$ 是 A 中的闭集, 即有 R 中的闭集 C, 使得 $A\cap C=A-B$, 也就是

$$B=A-(A\cap C)$$

但是 $A-(A\cap C)=(R-C)\cap A$，而 $R-C=O$ 是 R 中的开集．证毕．

这两个定理说明：全空间中的开集、闭集和子空间作通得到的集，是子空间中的开集和闭集，而且子空间中的开集和闭集都是可以这样得到的．特别，全空间的某开集或闭集，如果含在某一子空间中，那末必是这一子空间中的开集和闭集．但是反过来则不尽然．然而，如果子空间是全空间中的开(闭)集，那末子空间中的一切开(闭)集都是全空间中的开(闭)集．

设 R 是度量空间，A 是 R 的子空间，称度量空间 A 中的开集(闭集)是度量空间 R 中**相对于A的开集(闭集)**．

关于相对开集、相对闭集的概念还有一种提法是，设 B 是 R 中子集(不必是子空间 A 的子集)如果 $B\cap A$ 是 A 的开或闭子集，就称 B 是相对于 A 的开集或闭集．显然，对于这种相对开、闭概念，我们也有完全类似定理 12、13 的结果：B 相对于 A 为开(或闭)的充要条件是存在 R 中开集 O(或闭集 C)，使得 $B\cap A=A\cap O$ (或 $B\cap A=A\cap C$)．

4. 联络点集、区域 我们知道，在直线上既是开集又是闭集的非空点集，只有全空间$(-\infty,\infty)$．但是一般的度量空间(如离散的度量空间)，却未必具有这个性质．

例如将点集 $R=[0,1]+[2,3]$ 视为直线 E^1 的子空间，那末 $[0,1]$ 和 $[2,3]$ 是度量空间 R 中既开又闭的点集，但 $[0,1]$ 和 $[2,3]$ 既非空集也不是全空间 R．显然，一个空间如果能够分解成两个不相交的非空闭集之和，那末这两个闭子集都是开集(因为闭集的余集是开集)．这时我们说这个度量空间是**不联络**的．反过来有

定义 如果度量空间 R 不能被分解为两个都不空的互不相交的闭集 R_1 及 R_2 的和，那末称 R 是联络的空间

这里的“闭集”也可以换成“开集”，因为 R_1 与 R_2 互为余集. 因此，与上述定义等价，可以说度量空间 R 是联络空间的充要条件为空间 R 中非空的既开又闭的点集只有全空间 R.

对于度量空间 R 中的点集 A，如果视 A 为 R 的子空间而成为联络的度量空间，那末称 A 是 R 中的**联络点集**. 联络的开集称为**区域**. 至少含有两点的联络闭集叫做**连续点集**.

所含不止一点的联络点集 A 不能含有孤立点(相对于 A 的孤立点). 事实上，如果 A 有孤立点 x_0，那末 $\{x_0\}$ 是 A 中的闭集；由于 x_0 是孤立点，所以 x_0 不可能是 $A-\{x_0\}$ 的极限点，因此，$A-\{x_0\}$ 也是非空的闭子集，这和 A 是联络点集的假设冲突. 因此，不止含有一点的联络点集是自密集. 连续点集是完全集.

例 6　每个区间都是直线上的联络点集.

证　以闭区间为例，其它三种区间 (a,b)、$[a,b)$ 及 $(a,b]$ 可以类似地证明. 如果闭区间 $[a,b]$ 不是联络的，设 $[a,b]=A_1\cup A_2$，这里 A_1、A_2 是 $[a,b]$ 中互不相交的非空的闭集. 由于 A_1 与 A_2 在 $[a,b]$ 中互为余集，所以它们又都是 $[a,b]$ 中的开集. 设端点 $a\in A_1$，作

$$\lambda_0=\sup_{[a,\lambda]\subset A_1}\lambda$$

那末必有点列 $\lambda_n\to\lambda_0$，使得 $[a,\lambda_n]\subset A_1$，$n=1,2,\cdots$. 由于 A_1 是闭集，所以 $\lambda_0\in A_1$，而且 $[a,\lambda_0]\subset A_1$. 但是 A_2 并非空集，所以 $\lambda_0<b$. 又由于 A_1 是 $[a,b]$ 中的开集，A_1 中的点 λ_0 应是 A_1 的内点，所以必有正数 ε，使得

$$[\lambda_0,\lambda_0+e)\subset A_1$$

这样一来，当 $\lambda_0<\lambda<\lambda_0+\varepsilon$ 时

$$[a,\lambda]=[a,\lambda_0]+[\lambda_0,\lambda]\subset A_1$$

这和 λ_0 是上确界冲突. 因此，$[a,b]$ 是联络点集. 证毕.

例 7　赋范线性空间是联络空间.

证　如果赋范线性空间 $X=\{0\}$，显然 X 是联络的. 所以不妨

设$X\neq\{0\}$. 假设A是X的既开又闭集, 并且$0\in A$, 今证必有$A=X$. 事实上, 因为A是开的, 所以有$r_0>0$, 使得$O(0,r_0)\subset A$. 如果有$x_0\overline{\in}A$, 记$\alpha_0=\inf\{\alpha|\alpha x_0\overline{\in}A,\ r_0\leqslant\alpha\leqslant1\}$, 那末易知$\alpha_0x_0\in\bar{A}\cap\overline{X-A}$. 但$A$、$X-A$都是既开又闭集, 所以$\alpha_0x_0\in A\cap(X-A)$, 显然这不可能. 所以$A=X$. 证毕.

5. 点集间的距离

定义 设E和F是度量空间R中的点集. 称

$$\inf_{x\in E,\,y\in F}\rho(x,y)$$

是E与F间的距离, 记做$\rho(E,\ F)$. 特别当E中只有一点x_0时, 称$\{x_0\}$与F的距离是点x_0与F间的距离, 记为

$$\rho(x_0,F)=\inf_{y\in F}\rho(x_0,y)$$

例如, R是$C[a,\ b]$, F是阶数不超过n的多项式$P_n(t)$全体, $x(t)\in C[a,b]$, 那末

$$\inf_{P_n(t)\in F}\rho(x,P_n)=\inf_{P_n(t)\in F}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-P_n(t)|$$

它就是用n阶多项式均匀逼近$x(t)$的最佳值.

$x\in\bar{F}$的充要条件是$\rho(x,F)=0$

事实上, 如果$x\in\bar{F}$, 那末必有$\{x_n\}\subset F$, 使得$\rho(x_n,x)\to0$. 由$\rho(x,F)\leqslant\rho(x,x_n)$得到$\rho(x,F)=0$.

反过来, 如果$\rho(x,F)=0$, 必有$\{x_n\}\subset F$使得$\rho(x_n,x)\to\rho(x,F)=0$, 因此$x_n\to x$, 所以有$x\in\bar{F}$. 证毕.

6. n维欧几里得空间中的Borel集 我们再来补充讨论一下在n维欧几里得空间E^n中研究Lebesgue测度或Lebesgue-Stieltjes测度时常用的集类.

我们仍然用$\boldsymbol{R}_0$表示E^n中形如

$$C(\{a_i\},\{b_i\})=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,a_i<x_i\leqslant b_i,\ i=1,\cdots,n\}$$

(其中$-\infty<a_i\leqslant b_i<\infty$)的半开半闭室全体所张成的环.

定义　称由 $\boldsymbol{R}_0$ 张成的 E^n 中的最小 σ-环 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0)$(其实，还是 σ-代数)中的集是 E^n 中的 Borel 集，这种集的全体记做 $\boldsymbol{B}$.

定理 14　E^n 中的开集、闭集都是 Borel 集，而且 E^n 中开集全体(或者闭集全体)所张成的 σ-环就是 $\boldsymbol{B}$.

证　设 O 是 E^n 中的非空开集，我们考察含在 O 中而且 a_i、b_i 都是有理数的室 $C(\{a_i\},\{b_i\})$ 的全体 $\hat{O}$，它共有可列个，今证

$$O=\bigcup_{C(\{a_i\},\{b_i\})\in\hat{O}} C(\{a_i\},\{b_i\}) \tag{4.1}$$

对每个 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in O$，由于 O 是开集，必有正数 ε 使得 $O(x,\varepsilon)\subset O$. 取有理数 a_i、b_i 使得

$$x_i-\frac{\varepsilon}{n}<a_i<x_i<b_i<x_i+\frac{\varepsilon}{n}$$

那末显然 $x\in C(\{a_i\},\{b_i\})\subset O(x,\varepsilon)\subset O$，这时 $x\in C(\{a_i\},\{b_i\})\in\hat{O}$. 因此(4.1)成立. 由于 $C(\{a_i\},\{b_i\})\in\boldsymbol{R}_0$，而且 $\hat{O}$ 为可列集，所以 $O\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0)$.

令 U 是 E^n 中开集全体所成的集类，那末 $\boldsymbol{S}(U)\subset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0)$. 反过来

$$C(\{a_i\},\{b_i\})=\bigcap_{m=1}^{\infty}\left\{(x_1,\cdots,x_n)\,\middle|\, a_i<x_i<b_i+\frac{1}{m},\ i=1,2,\cdots,n\right\}$$

上式右边是可列个开集的通集，当然属于 $\boldsymbol{S}(U)$，因此，$\boldsymbol{R}_0\subset\boldsymbol{S}(U)$，所以 $\boldsymbol{S}(U)=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0)$(或从 $S(\boldsymbol{R}_0)$ 是代数及 $S(U)=S(\boldsymbol{R}_0)$ 可得). 同样可证闭集的全体所张成的 σ-环也是 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0)$. 证毕.

7. 赋范线性空间中的商空间　在§2 中，我们介紹了线性空间的商空间概念. 现在利用度量空间中闭集概念来讨论赋范线性空间中的商空间.

假设 E 是赋范线性空间 R 中闭的线性子空间，做出商空间

R/E. 对于 $\tilde{x}\in R/E$, 令

$$\|\tilde{x}\|=\inf_{y\in\tilde{x}}\|y\|$$

容易验证 $\|a\tilde{x}\|=\|\widetilde{ax}\|$, $\|\tilde{x}\|\geqslant 0$. 如果 $\|\tilde{x}\|=0$, 必有 $y_n\in\tilde{x}$, 使得 $\|y_n\|\to 0$, 但 $z_n=y_n-x\in E$, 由于 E 是闭集, 所以 $x=\lim\limits_{n\to\infty}z_n\in E$, 因此 $\tilde{x}=E=\tilde{0}$. 再证

$$\|\tilde{x}+\tilde{y}\|\leqslant\|\tilde{x}\|+\|\tilde{y}\|$$

由 $\|\tilde{x}\|$ 的定义, 有 $x_n\in\tilde{x}$ 及 $y_n\in\tilde{y}$, 使得

$$\|x_n\|\leqslant\|\tilde{x}\|+\frac{1}{n},\ \|y_n\|\leqslant\|\tilde{y}\|+\frac{1}{n}$$

因为, $x_n+y_n\in\tilde{x}+\tilde{y}$, 从而

$$\|\tilde{x}+\tilde{y}\|\leqslant\|x_n+y_n\|\leqslant\|\tilde{x}\|+\frac{1}{n}+\|\tilde{y}\|+\frac{1}{n}$$

令 $n\to\infty$ 便得到 $\|\tilde{x}+\tilde{y}\|\leqslant\|\tilde{x}\|+\|\tilde{y}\|$. 于是 R/E 成为赋范线性空间. 今后对于赋范线性空间 R, 在商空间 R/E 中都是如上地引入范数(这个范数称为原来范数的诱导(出的)范数), 使 R/E 成为赋范线性空间.

例如, 设 N 是 Ω 的可测子集, 令 $E=\{f\,|\,f\in L^p(\Omega,\mathbf{B},\mu)$, 当 $x\in N$ 时 $f(x)=0\}$, 那末 E 是 $L^p(\Omega,\mathbf{B},\mu)$ 中的闭线性子空间, 而且当 $f,g\in L^p(\Omega,\mathbf{B},\mu)$ 时, $f-g\in E$ 的充要条件是 f 和 g 在 N 上几乎处处相等. 这时

$$\|\tilde{f}\|=\inf_{g\in E}\|g+f\|_p$$

我们取

$$g(x)=\begin{cases}-f(x), & x\overline{\in}N\\ 0, & x\in N\end{cases}$$

那末 $g\in E$, 而且

$$\|f+g\|_p=\left(\int_N|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

但另一方面容易证明

$$\|\tilde{f}\| \geq \left(\int_N |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

所以

$$\|\tilde{f}\| = \left(\int_N |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

因此，如果我们作映照 $u: L^p(\Omega, \mu)/E \to L^p(N, \mu)$ 如下：

$$\tilde{f} \in L^p(\Omega, \mu)/E \longmapsto f|_N$$

其中 $f|_N$ 是 f 在 N 上的限制，那末 u 是保持范数不变的一一对应。因此可以把 $L^p(\Omega, B, \mu)/E$ 与 $L^p(N, B, \mu)$ 视为同一。

习　题

1. 设 B 是度量空间中的闭集，证明必有一列开集 O_1、O_2、…、O_n、…包含 B 而且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = B$.

2. 设 F 是度量空间中的点集，$a>0$. 证明

$$O(F, a) = \{x \mid \rho(x, F) < a\}$$

是开集. 问 $\{x \mid \rho(x, F) \leq a\}$ 是否闭集？

3. 设 $B \subset [a, b]$，证明度量空间 $C[a, b]$ 中的集

$$\{x \mid 当\ t \in B\ 时\ x(t) = 0\}$$

是 $C[a, b]$ 中的闭集，而

$$\{x \mid 当\ t \in B\ 时 |x(t)| < a\}, \quad (a>0)$$

为开集的充要条件是：B 为闭集.

4. 设 $\{A_{\alpha} \mid \alpha \in A\}$ 是度量空间的一族集，证明

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} A_{\alpha}\right)' \subset \bigcap_{\alpha \in A} A'_{\alpha}$$

又证：对于任何有限个集 A_1、…、A_n，有

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)' = A'_1 \cup A'_2 \cup \cdots \cup A'_n$$

5. 证明定理 11：A 为闭集的充要条件是 $A = \bar{A}$.

6. 设集 A 是复平面 E^2 中适合如下条件的点 z 的全体：或是 $|z|<1$，或是 $1<|z|<2$ 但 $\arg z$ 是有理数. 求出 A 的闭包、核、境界和所有的外点.

7. 设 A 是度量空间 R 中的点集, 证明: $K(A)=R-\overline{(R-\overline{A})}$.

8. 设 E 及 F 是度量空间中的两个集并且 $\rho(E, F)>0$. 证明必有不相交的开集 O 及 G 分别包含 E 及 F.

9. 对于度量空间 R 中的点集 E 上的实函数 $f(x)$, 如果对于每点 $x_0\in E$ 有

$$\lim_{r\to 0}\sup_{x\in O(x_0,r)\cap E} f(x)\leqslant f(x_0)$$

称 $f(x)$ 在 x_0 是上半连续的. 试证: 当 $f(x)$ 是 E 上的上半连续函数(即 f 在 E 的每点都上半连续)时, 对任何常数 a, 集

$$E(f(x)\geqslant a)=\{x\,|\,f(x)\geqslant a\}$$

是闭集. 反之也真.

10. 证明: 子空间的联络集必为全空间的联络集. 其逆真否?

11. 设 R 是度量空间, A 是 R 中的点集. 如果对于 A 中的任何两点 x、y, 有 A 的联络子集包含这两点, 那末 A 是联络点集.

12. 设 E 是赋范线性空间 R 的线性子空间, 在 R/E 上, 令

$$p(\tilde{x})=\inf_{y\in\tilde{x}}\|y\|$$

证明 p 是 R/E 上拟范数(半范数), 并指出使 $p(\tilde{x})=0$ 的 $\tilde{x}$ 全体.

13. 设 F 是度量空间 R 上有界闭集, $x_0\bar{\in}F$, 问是否存在 $y_0\in F$, 使得

$$\rho(x_0, y_0)=\rho(x_0, F)$$

为什么?

14. 设 g_1、g_2, …, g_n 是赋范线性空间 R 上 n 个线性无关的元素, $x\in R$. 如果存在 λ_1, λ_2, …, λ_n, 使得

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i\right\|=\inf_{\mu_1,\cdots,\mu_n}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\mu_i g_i\right\|$$

其中 μ_1、…、μ_n 是任意 n 个数. 称向量 $x_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i$ 为 x 在子空间 span$\{g_1$, …, $g_n\}$ 上的最佳逼近 (这种最佳逼近的存在性可见本章 § 9 习题 14). 证明: 在 R 是严格赋范时, 对于 x 的最佳逼近是唯一的.

15. 设 R 是赋准范线性空间, E 是闭线性子空间, 仿本节第七小节, 证明 R/E 也是赋准范线性空间.

16. C 是欧几里得空间 E^2 上单位圆周: $C=\{e^{i\theta}\,|\,0<\theta\leqslant 2\pi\}$. 称集 $\gamma=\{e^{i\theta}\,|\,0<\alpha<\theta<\beta\leqslant 2\pi\}$ 为 C 中开弧. 证明: (i) 开弧必是 E^2 的子空间,

C 中开集;

(ii) C 中任何开集必可表示成最多可列个互不相交的开弧的和，并且这种表示是唯一的.

17. $\mathbf{B}^n$ 表示 n 维欧几里得空间 E^n 上 Borel 集类，$C\in\mathbf{B}^n$，称集类 $\mathbf{B}^n\cap C$ 为 C 上 Borel 集类(实际上就是 C 中一切 Borel 子集全体)．当 C 为 E^2 中单位圆周时，记 $\mathbf{G}$ 为 C 中开弧全体(C 本身也算作开弧)．证明 $\mathbf{B}^2\cap C=S(\mathbf{G})$.

18. C 是 E^2 上单位圆周．T 是 $(0,\ 2\pi]\rightarrow C$ 的映照，$T: x\longmapsto e^{ix}$．证明 $\mathbf{B}^2\cap C=T(\mathbf{B}\cap(0,2\pi])$

§5 连续映照

1. 连续映照和开映照　仿照函数的连续性，在度量空间中可以引入映照的连续性的概念.

在数学分析中，函数的连续性是这样定义的：设 f 是区间 $[a, b]$ 上的函数，$x_0\in[a,b]$，如果对任何正数 ε，有正数 δ，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，那末就称 f 在 x_0 点连续．如果改用环境的语言来叙述，这就是说，对于 $f(x_0)$ 的任何 ε-环境 $O(f(x_0),\varepsilon)=(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$，必有 x_0 的一个 δ-环境 $O(x_0, \delta)=(x_0-\delta, x_0+\delta)$，使得当 $x\in O(x_0,\delta)$ 时 $f(x)\in O(f(x_0),\varepsilon)$，就称 f 在 x_0 是连续的．这个概念可以推广到一般度量空间，而且环境也不一定用 $O(x_0,\delta)$ 的形式，可改用一般的环境.

定义　设 R 和 K 是度量空间，f 是 $A\subset R$ 到 K 中的映照（映射）．设 $x_0\in A$．假如对于 $f(x_0)$ 的任何环境 $O(f(x_0))(\subset K)$，必有 x_0 在 R 中的一个环境 $O(x_0)$，使得 $f(O(x_0)\cap A)\subset O(f(x_0))$（就是说当 $x\in O(x_0)\cap A$ 时，$f(x)\in O(f(x_0))$），就称映照 f 在点 x_0 是连续的.

假如映照 f 在 A 的每一点都连续，就称 f 是 A 上的连续映照．特别地，当象空间 K 是实数直线 E^1 或复数平面时，称 $f(x)$ 为连续函数.

对于 f 是多变元的映照，也有连续的概念．例如 f 是二元映照时，如果对任何 $f(x_0, y_0)$ 的环境 $O(f(x_0, y_0))(\subset K)$，必有 x_0、y_0 的环境 $O(x_0)$、$O(y_0)$，使得

$$f(O(x_0)\cap A, O(y_0)\cap B)\subset O(f(x_0, y_0))$$

其中 A、B 为第一、二变元的定义域，称 f 在点 (x_0, y_0) 连续．类似也有连续函数概念．但我们只讨论一个变元的情况．

定理1 设 f 是度量空间 R 的子集 A 到度量空间 K 中的映照，那末下面三件事情等价．

(1) 映照 $f(x)$ 在点 x_0 是连续的．

(2) 对于 $f(x_0)$ 的任一 ε-环境 $O(f(x_0), \varepsilon)$，必有 x_0 在 R 中的 δ-环境使得 $f(O(x_0, \delta)\cap A)\subset O(f(x_0), \varepsilon)$．

(3) 对于 A 中任意一列收敛于 x_0 的点 $\{x_n\}$，成立着

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$$

证 从(1)推(2)：设 f 在 $x_0\in A$ 处连续，那末由连续的定义，对于 $f(x_0)$ 的 ε-环境 $O(f(x_0), \varepsilon)$，必有 x_0 的环境 $O(x_0)$，使得 $f(O(x_0)\cap A)\subset O(f(x_0), \varepsilon)$，因为 x_0 是 $O(x_0)$ 的内点，必有正数 δ，使开球 $O(x_0, \delta)\subset O(x_0)$．因此 $f(O(x_0, \delta)\cap A)\subset f(O(x_0)\cap A)\subset O(f(x_0), \varepsilon)$．这就是(2)．

从(2)推(3)：设映照 f 在点 x_0 适合条件 (2)．任取 $\{x_n\}\subset A$，$x_n\to x_0$，必有自然数 N 使得当 $n\geq N$ 时 $\rho(x_n, x_0)<\delta$，根据(2)，所以此时 $f(x_n)\in O(f(x_0), \varepsilon)$，即当 $n\geq N$ 时有

$$\rho(f(x_n), f(x_0))<\varepsilon$$

即得(3)．

从(3)推(1)：用反证法．设映照 f 在 $x_0\in A$ 适合条件(3)，而 f 在 x_0 点不连续．那末必有 $f(x_0)$ 的环境 $O(f(x_0))$，使得对于 x_0 的任何环境 $O(x_0)$，$f(O(x_0)\cap A)$ 不全包含在环境 $O(f(x_0))$ 之中，特

别地，对于球 $O\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$有 $x_n \in O\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \cap A$，$f(x_n) \overline{\in} O(f(x_0))$．因此 $x_n \in A$，$\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$，但是由于条件(3)应有 $f(x_n) \to f(x_0)$（由收敛的定义）．因此对 $f(x_0)$ 的环境 $O(f(x_0))$，又应有 N 使当 $n \geqslant N$ 时 $f(x_n) \in O(f(x_0))$，这是矛盾．所以 $f(x)$ 在 x_0 处必连续．证毕．

显然，R 中的孤立点是任何映照的连续点．又例如赋范线性空间 R 中的下面两个映照

$$x \longmapsto \alpha x \quad (\alpha\text{ 是固定的数})$$

$$(x, y) \longmapsto x + y$$

（这也就是线性运算）是连续映照（其中第二个映照是二元连续映照）．

定理 2 设 R、K 是度量空间，映照 $f: R \to K$．那末映照 f 在 R 上连续的充要条件是：象空间 K 中的任一开集 H 的原象 $G = \{x \mid f(x) \in H\}$（常常记为 $f^{-1}(H)$，甚至简记为 $f^{-1}H$）是 R 中的开集．

证 设 f 是 R 到 K 的连续映照，任取 K 中的开集 H．如果 $f^{-1}(H)$ 是空集，那末它自然是开集．如果 $G = f^{-1}(H)$ 不是空集，任取一点 $x_0 \in G$，那末 $y_0 = f(x_0) \in H$，H 就是 y_0 的一个环境，由 f 的连续性，在 R 中必有 x_0 的一个环境 $O(x_0)$，它的象 $f(O(x_0)) \subset H$．因此，$O(x_0) \subset G$，所以 x_0 是 G 的内点，因此 G 是 R 中的开集．

反过来，假如任何开集 $H \subset K$ 关于 f 的原象 G 是开集，那末，R 中每一点 x_0 的象 $f(x_0) = y_0$ 的任一环境 $O(f(x_0))$ 的原象 U 也是开集．显然 $x_0 \in U$，故 U 可看成 x_0 的环境．于是 $f(U) \subset O(f(x_0))$．从而 $f(x)$ 在 x_0 处是连续的．证毕．

定义 当一个映照 B 把定义域 $\mathscr{D}(B)$ 中的每个开集映照成值域 $\mathscr{R}(B)$ 中的开集时，就称 B 是**开映照**．

因此，由定理 2 可以得到开映照与连续映照的关系如下：

系1 设 f 是度量空间 R 到 K 上的可逆映照，那末 f 成为连续映照的充要条件是 f^{-1} 成为开映照.

定理 2 中的开集可以换成闭集.

系2 设 R 和 K 是度量空间，f 是 R 到 K 中的映照. 那末 f 在 R 上连续的充要条件是象空间 K 中任一闭集 F 的原象 $f^{-1}(F)$ 是 R 中的闭集.

定义 设 f 是度量空间 R 的子集 A 到度量空间 K 的子集 B 上的一一对应，并且 f 以及它的逆映照 f^{-1} 都是连续的，那末称 f 是 A 到 B 上的拓扑映照. 这时称 A 和 B 是**拓扑同构**或**同胚**的.

假如两个空间 R 和 K 是拓扑同构(或同胚)，根据 f、f^{-1} 都连续，由定理 2 可知，不仅 R、K 之间点可以一一对应，而且 R、K 中开集全体之间也一一对应，即 R、K 中所有邻域之间也是一一对应的. 然而当我们只讨论连续性时，由于连续性的概念只依赖于邻域的概念. 因此在只讨论仅与连续性有关问题时，我们可以把两个拓扑同构的空间看成是一个. 拓扑同构是拓扑空间理论中很重要的概念.

我们把子集 A 和 B 都分别看成度量空间，由上述定理 2 可知，A 到 B 上的一一对应 f 成为拓扑映照的充要条件是：A 中任何开(闭)集的象是 B 中的开(闭)集，并且 B 中的开(闭)集必是 A 中某一开(闭)集的象.

2. 闭映照

(这一段在初学时可以暂时不读，待到读第五章闭图象定理时再回过来读. 或者连同闭图象定理一起都可以暂时不读，直至读到第六章 §9 中无界自共轭算子时再读.)

我们仿照函数图象的概念可以引进映照的图象. 设 X 和 Y 是两个集，T 是 $\mathscr{D}(T)(\subset X)$ 到 Y 中的映照(算子). 我们作 X 和 Y 的乘积集 $X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X, y\in Y\}$，称 $X\times Y$ 的子集

$$G(T)=\{(x, Tx) \mid x\in \mathscr{D}(T)\}$$

为映照(算子)T的**图象**. 当X和Y是实数直线, T是通常的函数时, 这里的图象就是通常的函数图象.

特别当(X, ρ)、(Y, ρ)①是两个度量空间时我们可以自然地在$X\times Y$上引进距离如下

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2))=\sqrt{\rho(x_1, x_2)^2+\rho(y_1, y_2)^2}$$

这样得到一个乘积度量空间$(X\times Y, \rho)$. 如果(X, ρ)、(Y, ρ)分别是n维和m维的欧几里得空间, 那末$(X\times Y, \rho)$是$n+m$维的欧几里得空间.

定义 设(X, ρ)、(Y, ρ)是两个度量空间, T是$\mathscr{D}(T)(\subset X)$到$Y$中的算子, 如果$T$的图象

$$G(T)=\{(x, Tx) \mid x\in \mathscr{D}(T)\}$$

是乘积度量空间$(X\times Y, \rho)$中的闭集, 那末称T是**闭算子**或是**闭映照**.

引理1 设(X, ρ)、(Y, ρ)是两个度量空间, T是$\mathscr{D}(T)\subset X$到Y中的算子, 那末T成为闭算子的充要条件是对任何点列$\{x_n\}\subset \mathscr{D}(T)$, 当$x_n\to x_0$, $Tx_n\to y_0$时, $x_0\in \mathscr{D}(T)$, 而且$y_0=Tx_0$.

证 条件的必要性: 如果T是闭算子, 那末当$\{x_n\}\subset \mathscr{D}(T)$, $x_n\to x_0$, $Tx_n\to y_0$时, 显然$\{(x_n, Tx_n)\}\subset G(T)$, 而且在乘积度量空间$(X\times Y, \rho)$中, $(x_n, Tx_n)\to (x_0, y_0)$. 由于假设$G(T)$是闭的, 所以$(x_0, y_0)\in G(T)$, 这就是$x_0\in \mathscr{D}(T)$, $y_0=Tx_0$.

反过来, 如果条件满足, 任取$\{(x_n, Tx_n)\}\subset G(T)$, 而且$(x_n, Tx_n)\to (x_0, y_0)$, 那末显然$\{x_n\}\subset \mathscr{D}(T)$, $x_n\to x_0$, $Tx_n\to y_0$. 由条件$x_0\in \mathscr{D}(T)$, $y_0=Tx_0$, 即得到$(x_0, y_0)\in G(T)$. 因此$G(T)$中每个收敛点列的极限在$G(T)$中, 所以$G(T)$是闭集. 证毕.

① 显然(X, ρ)、(Y, ρ)以及下面的$(X\times Y, \rho)$中的三个ρ是有区别的, 但我们为了简便都形式地写成一个ρ. 这是应该注意的.

这个引理的充要条件也往往作为闭算子的另一个等价定义.

现在我们要研究连续映照和闭映照的关系.

引理 2 定义域是闭集的连续算子必是闭算子.

证 设(X,ρ)、(Y,ρ)是两个度量空间, T 是 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 到 Y 中的连续算子, $\mathscr{D}(T)$是闭集, 那末当$\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$, $x_n\to x_0$, $Tx_n\to y_0$时, 由$\mathscr{D}(T)$ 的闭性得到 $x_0\in\mathscr{D}(T)$, 又因为 T 是连续的, $y_0=\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n=Tx_0$. 根据引理 1, T 是闭算子.

一般说来闭算子不一定是连续算子.

例 1 我们考察度量空间$C[a,b]$ 的一个子集 $\mathscr{D}=\{x\mid x\in C[a,b]$, x 有连续导函数$\}$. 我们作 $\mathscr{D}\to C[a,b]$的求导算子 T 如下: 当 $x\in\mathscr{D}$ 时

$$Tx(t)=\frac{d}{dt}x(t)$$

如果$\{x_n\}\subset\mathscr{D}$, 而且 $x_n\to x_0$, $\frac{d}{dt}x_n\to y_0$, 这就是说$\{x_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于函数 x_0, 而且$\left\{\frac{dx_n}{dt}\right\}$在$[a,b]$上也一致收敛, 根据数学分析中熟知的定理, 极限函数 x_0 也是可以求导的, 而且求导和极限运算可以交换, 即

$$\frac{d}{dt}x_0(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dt}x_n(t)=y_0(t)$$

这样一来, $x_0\in\mathscr{D}$, $y_0=Tx_0$, 所以T是闭的. 从我们这里的观点来看,刚才引用的数学分析中的这个定理实际上就是等价于“$C[a,b]$中求导算子$\frac{d}{dt}$是闭算子.” 显然 T 不是 $\mathscr{D}(T)\to C[a,b]$ 的连续算子, 因此闭算子不一定连续.

在第五章 §3 中我们将讨论闭算子何时成为连续算子.

利用算子的图象研究一些“不连续”的算子是 von Neumann

引进的一种有效的方法，它常用来讨论闭算子. 泛函分析中对闭算子讨论得比较多的是线性闭算子理论. 在例 1 我们看到的微分算子不是连续算子而仅是闭算子. 其实，更一般地，在微分方程理论中所出现的线性微分算子，绝大部分在常见的度量空间上容易验证它是闭算子. 这就是我们要讨论闭算子的理由之一.

3. 连续曲线

定义 设 $y=f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 到度量空间 R 的一个连续映照，那末称 $y=f(x)$ 为 R 中的连续曲线，也称点集 $f([a, b])$ 是 R 中的连续曲线.

例如设 R 是欧几里得平面 E^2, $\varphi(t)$、$\psi(t)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数，由方程

$$x=\varphi(t), y=\psi(t) \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

或 $(x, y)=z(t)=(\varphi(t), \psi(t))$ 所确定的 $[a, b]$ 到 E^2 中的映照，就是平面上的连续曲线.

定理 3 设 B 是度量空间 R 中的联络点集，f 是 B 上的连续映照，那末 B 的象 $f(B)$ 也是联络点集.

证 用反证法. 如果 $A=f(B)$ 不是联络的，那末必有非空的不相交的闭集 A_1、A_2 使得 $A=A_1\cup A_2$，由定理 2 的系，$f^{-1}(A_1)$ 及 $f^{-1}(A_2)$ 都是闭集，两者都不是空集而且不相交，显然 $B=f^{-1}(A_1)\cup f^{-1}(A_2)$，这样一来，$B$ 就不是联络的了. 这是矛盾. 所以 A 是联络的. 证毕.

因为区间 $[a, b]$ 是联络点集，所以由定理 3 就得到

系 1 连续曲线是联络点集.

系 2 如果对于度量空间 R 的任意两点 x、y，必有连续曲线通过它们(即 x、y 属于某一连续曲线)，则 R 必是联络的.

容易证明，欧几里得空间 E^n 中的开集 A 成为区域的充要条件是 A 中任意两点必有 A 中的连续曲线通过它们. 通常在复变函数

论教程中所使用的平面上区域的概念正是这样定义的.

习　题

1. 设 R 为赋范线性空间, $R\times R$ 为形如

$$(x, y),\quad x, y\in R$$

的向量组全体. 按照线性运算及范数

$$\alpha(x, y)+\alpha'(x', y')=(\alpha x+\alpha' x', \alpha y+\alpha' y')$$

$$\|(x, y)\|=\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}$$

所成的赋范线性空间. 证明 $R\times R$ 到 R 的映照 $(x, y)\mapsto x-y$ 是连续的.

2. 设 R 是赋范线性空间, 在 $R\times R$ 上赋以范数 $\|\cdot\|$ 如习题 1, 又在 $R\times R$ 上赋以范数 $\|\cdot\|_1$:

$$\|(x, y)\|_1=\max(\|x\|, \|y\|),$$

设 f 是 $(R\times R, \|\cdot\|)$ 到 $(R\times R, \|\cdot\|_1)$ 上映照

$$f((x, y))=(x, y)$$

证明 f 是拓扑映照.

3. 设 R 是赋范线性空间. 在 $R\times R$ 上赋以如习题 2 中的两个范数 $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$, f 是 $(R\times R, \|\cdot\|)$ 到 $(R\times R, \|\cdot\|_1)$ 上映照

$$f:\ (x, y)\to(x_1, y_1),\ 而\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

即 $x_1=ax+by$, $y_1=cx+dy$, 而数字阵 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 是非奇的. 证明 f 是拓扑映照.

4. 设 R 为赋范线性空间, R' 为形如

$$(\alpha, x),\quad x\in R,\ \alpha\ 为数$$

的元素全体, 按照线性运算及范数

$$\lambda(\alpha, x)+\mu(\beta, y)=(\lambda\alpha+\mu\beta, \lambda x+\mu y)$$

$$\|(\alpha, x)\|=|\alpha|+\|x\|$$

所成的赋范线性空间. 证明 R' 到 R 的映照 $(\alpha, x)\longmapsto\alpha x$ 是连续的.

5. 设 (X, ρ)、(Y, ρ)、(Z, ρ) 为距离空间, f 是 $(X, \rho)\to(Y, \rho)$ 的连续映照, g 是 $(Y, \rho)\to(Z, \rho)$ 的连续映照, 证明 $g(f)$ 是 $(X, \rho)\to(Z, \rho)$ 的连续映照.

6. 设 R 是度量空间, A 是 R 的子空间, f 是 $A\to R$ 的映照. 如果 x_0 为 A 的孤立点, 那末 x_0 是 f 的连续点.

7. 欧几里得空间 E^n 中的开集 A 成为联络点集的充要条件是 A 中任意两点都有 A 中的连续曲线通过它们.

8. 设 R 是度量空间, A 是 R 的子空间, f 是 A 上的实函数. 证明 f 成为连续函数的充要条件是对每个实数 c, 集 $A(f(x)\leqslant c)$ 与集 $A(f(x)\geqslant c)$ 是子空间 A 中闭集.

9. 证明 $[a,b]$ 上有界实函数 f 是连续的充要条件是集 $G_f=\{(x,f(x))\mid x\in[a,b]\}$ 是 E^2 上闭集.

10. 举例说明在一般度量空间中, 即使定义域是闭集的闭映照也未必是连续的.

11. 设 G_1、G_2 是度量空间 R 中两个子集, 并且

$$d(G_1,G_2)=\inf_{x\in G_1,y\in G_2}\rho(x,y)>0$$

证明必有 R 上连续函数 f, 使得 $0\leqslant f\leqslant 1$, 而且

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in G_1\\ 1, & x\in G_2\end{cases}$$

§6 稠密性

1. 稠密性的概念 第一章里我们已经讨论过欧几里得空间中点集的稠密性概念, 不难把它拓广到一般度量空间的点集, 并且成为度量空间(特别是赋范线性空间)理论中重要概念之一.

定义 设 R 是度量空间, A 及 E 是 R 中的点集. 如果 E 中任何一点 x 的任何环境中都含有集 A 中的点, 就称 A 在 E 中稠密.

显然, 从§4引理3立即得到下述的

定理 1 (i) A 在 E 中稠密的充要条件是 $\bar{A}\supset E$.

(ii) A 在 E 中稠密的充要条件是对任一 $x\in E$, 有 A 中的点列 $\{x_n\}$, $x_n\to x(n\to\infty)$.

由定理1的(ii)看出, 稠密性概念有这样的用处: 当我们考察点集 E 是否具有某些性质时, 我们有时可以先对其中的稠密子集加以考察, 然后利用极限过程推出整个 E 的相应的结论.

定理 2 设 R 是度量空间, A、B 和 C 是 R 中的点集. 如果 B

在 A 中稠密，C 在 B 中稠密，那末 C 在 A 中稠密.

证　由定理 1 的(i)，我们有 $\bar{B}\supset A$，$\bar{C}\supset B$，但 $\bar{B}$ 是包含 B 的最小闭集，既然 $\bar{C}$ 是闭集而且含有 B，所以 $\bar{C}\supset\bar{B}$，因此 $\bar{C}\supset A$，即 C 在 A 中稠密. 证毕.

在数学分析中已经证明了 Weierstrass 的逼近定理（参看[9]或[10]），就是说对区间 $[a, b]$ 上的任何一个连续函数 $f(x)$，必存在一列多项式 $P_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上均匀收敛于 $f(x)$. 记 P 为多项式全体所成的线性空间，我们把它看成度量空间 $C[a, b]$ 的子集，那末上述 Weierstrass 定理可用度量空间的稠密性改述如下.

定理 3　P 在 $C[a, b]$ 中是稠密的.

定理 4　设 E 是 μ 可测集，$L^p(E, \mu)$ 中的有界可测函数全体 $B(E)$ 是 $L^p(E, \mu)$ $(\infty>p\geqslant 1)$ 的稠密子集.

证　设 $f(x)\in L^p(E, \mu)$，对每个自然数 n，造函数

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & |f(x)|\leqslant n\\ 0, & |f(x)|>n\end{cases}$$

那末 $f_n(x)$ 是 $L^p(E, \mu)$ 中的有界可测函数，而且

$$\int_E \left|f_n(x)-f(x)\right|^p d\mu=\int_{E(|f|>n)}\left|f(x)\right|^p d\mu$$

由于 $|f|^p\in L(E, \mu)$，由积分的全连续性，对任一 $\varepsilon>0$，必有 $\delta>0$，使得当 $e\subset E$，$\mu(e)<\delta$ 时成立着

$$\int_e |f|^p d\mu<\varepsilon^p$$

因为

$$n^p\mu(E(|f|>n))\leqslant\int_{E(|f|>n)}|f(x)|^p d\mu\leqslant\int_E |f|^p d\mu$$

所以有正数 N，使当 $n>N$ 时 $\mu(E(|f|>n))<\delta$，因而

$$\|f_n-f\|_p=\left(\int_{E(|f|>n)}|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$$

所以 E 上的有界可测函数全体 $B(E)$ 在 $L^p(E,\mu)$ 中稠密．证毕．

定理 5　对于直线上任一勒贝格可测集 E，当 $1\leqslant p<\infty$ 时，$L^p(E)$ 中的有界连续函数全体在 $L^p(E)$ 中是稠密的．

证　我们只就 $m(E)<\infty$ 来证明(其余读者完成)．记 $L^p(E)$ 中有界连续函数全体为 M，由定理 2 和定理 4 可知，只要证明：按 $L^p(E)$ 的距离，M 在 $B(E)$($B(E)$是 E 上有界可测函数全体)中稠密．

任取 $f\in B(E)$，设 $|f(x)|\leqslant K$，$x\in E$．显然，只要证明：对任何正数 ε，必存在 M 中的点 g，使得 $g\in O(f,\varepsilon)$．事实上，对任何 $\varepsilon>0$，由鲁津定理，对于正数 $\delta=\left(\frac{\varepsilon}{2K}\right)^p$，存在 E 上的连续函数 $g(x)$，使得集 $E_1=E(f(x)\neq g(x))$ 满足

$$m(E_1)<\delta$$

不妨设 $|g(x)|\leqslant K$．如果不对的话，把 $g(x)$ 换成连续函数 $\max(\min(g(x),K),-K)$ 就行了．于是

$$\begin{aligned}&\int_E|f(x)-g(x)|^p dx\\ =&\int_{E_1}|f(x)-g(x)|^p dx+\int_{E-E_1}|f(x)-g(x)|^p dx\end{aligned}$$

由于在 $E-E_1$ 上，$f(x)=g(x)$，所以上式右边第二个积分是零，而第一个积分显然不超过 $(2K)^p m(E_1)<\varepsilon^p$，于是 $\|f-g\|_p<\varepsilon$，即 $O(f,\varepsilon)$ 中有 M 的点 g．因此由定义，M 在 B 中稠密．证毕．

系　设 $[a,b]$ 是有限区间，$p\geqslant 1$，那末 P 和 $C[a,b]$ 在 $L^p([a,b])$ 中稠密．

2. 可析点集　设 R 是度量空间，A 是 R 中的子集．如果存在有限集或可列集 $\{x_k\}\subset R$ 在 A 中稠密，就称 A 是**可析点集**．可析点集，形象地说，是可以用最多可列个点子就能被近似地描述的集．从定义来看，虽然这可列个点子 $\{x_k\}$ 可以不是 A 中的点，但我们能做到：如果 A 是可析集，那末必有 A 中

的有限个或可列个点在 A 中稠密. 事实上, 由于集 $\{x_k\}$ 在 A 中稠密. 对任何自然数 n, 当 $A\cap O\left(x_k, \frac{1}{n}\right)$ 不空时, 任取其中的一点 y_{kn}, 如果 $A\cap O\left(x_k, \frac{1}{n}\right)$ 空时, 不取点. 易知, A 中的这些点 y_{kn}, $k, n=1, 2, \cdots$ 的全体就在 A 中稠密.

当空间 R 本身是可析点集时称 R 是**可析空间**.

在数学的一些分支, 如微分方程、概率论、函数论以及经典数学物理和量子物理学中最常见到的一些度量空间往往是 p 方可积函数空间、连续函数空间、解析函数空间等等, 它们都常常是在给定的距离下成为可析空间.

由于可析空间有在其中稠密的可列集, 研究起来就比较容易. 当我们讨论有关这类空间的某些问题时, 往往可以从空间中挑选出对那个问题最适宜的一个可列的稠密集, 在这个稠密集上来进行考察, 然后再利用稠密性推广到整个空间上去. 例如在第五章 §2 中研究可析空间上连续线性泛函的表示式时, 就是先挑选适当的稠密集, 考察线性泛函在这个稠密集上的表示, 然后再得到全空间上的表示. 又如, 可以在某些线性的可析空间上适当地引进某种维数的概念, 使它成为可列维的, 又可以用线性可析空间中一列有限维的子空间逼近原来的可析空间, 这显然对所讨论的问题有不少好处, 例如在第六章中我们将能看到这一点.

例 1 n 维欧几里得空间 E^n 按通常的距离是可析空间. 因为坐标为有理数的点全体是可列集, 并且在 E^n 中稠密.

例 2 当 $1\leqslant p<\infty$ 时, 空间 l^p 是可析的. 因为形如 $y=\{y_1, y_2, \cdots y_m, 0, \cdots\}$. 而 y_1、y_2、$\cdots$、y_m 是有理数的点的全体 A 是可列集, 它在 l^p 中稠密. 事实上, 任取 $x=\{x_\nu\}$, 设 $x\in l^p$, 今证 $x\in\overline{A}$. 由于 $\sum\limits_{\nu}|x_\nu|^p<\infty$, 对任意的正数 ε, 必有 m 使得 $\sum\limits_{\nu=m+1}^{\infty}|x_\nu|^p<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$,

再取有理数 y_1、…、y_m 使得 $\sum_{\nu=1}^{m}|x_\nu-y_\nu|^p<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$，因此 A 中的点 $y=\{y_1, \cdots, y_m, 0, \cdots\}$ 与 x 的距离 $\|y-x\|_p<\varepsilon$, 即 $y\in O(x, \varepsilon)\cap A$, 所以 $x\in\bar{A}$. 证毕.

例 3 $C[a, b]$ 和 $L^p[a, b](\infty>p\geqslant1)$ 是可析空间. 因为对任意的多项式 $P(x)$, 总有以有理数为系数的多项式 $p(x)$ 适合

$$\|P-p\|=\max_x|P(x)-p(x)|<\varepsilon$$

由定理 3 和定理 5 的系就知道所述为真.

例 4 有界数列全体组成的空间 l^∞ 是不可析的.

证 l^∞ 中形如 $\{x_i\}$, $x_i=0$ 或 1 的点, 其全体记为 K, 则 K 是不可列集(见第一章 § 2 定理12), 对于 K 中任意的相异两点 x、y, 必有 $\rho(x, y)=1$, 即 l^∞ 中有一个不可列的集 K, 其中每两点之间的距离都是1. 如果 l^∞ 是可析的, 那末有可列集 $\{y_k\}$ 在 l^∞ 中稠密, 空间 l^∞ 中以 K 中点为中心, $\frac{1}{3}$ 为半径的每一球内至少有一个 y_k, 因为这种球有不可列个, 但是 $\{y_k\}$ 中只有可列个点, 所以至少有一个 y_k, 同时属于两个不同的球, 例如属于 $O\left(x^{(1)}, \frac{1}{3}\right)$、$O\left(x^{(2)}, \frac{1}{3}\right)$, 其中 $x^{(1)}$、$x^{(2)}\in K$. 这样一来

$$1=\rho(x^{(1)}, x^{(2)})\leqslant\rho(x^{(1)}, y_{k_0})+\rho(x^{(2)}, y_{k_0})\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

这是矛盾. 所以空间 l^∞ 是不可析的. 证毕.

3. 疏朗集 和实数直线上的疏朗集一样, 可以在度量空间中定义疏朗集.

定义 设 R 是度量空间, A 是 R 的子集. 如果 A 不在 R 的任何一个非空的开集中稠密, 那末 A 称做**疏朗集**.

显然, 这个定义中的非空开集可以换成半径不为零的开球.

我们用 $S(a, \rho)$ 表示闭球 $\{x|\rho(x, a)\leqslant\rho\}$, 那末 A 在度量空间

R 中疏朗的充要条件是任何闭球 $S(a, \rho)$ $(\rho>0)$ 中必有闭球 $S(b, r)(r>0)$ 与 A 不交.

事实上, 如果 A 是疏朗的, 那末 A 不在开球 $O(a, \rho)\subset S(a, \rho)$ 中稠密, 所以必有 $b\in O(a, \rho)$ 以及 b 的 ε-环境 $O(b, \varepsilon)$ (不妨设 $O(b, \varepsilon)\subset S(a, \rho)$) 使得 $O(b, \varepsilon)$ 和 A 不交. 取 $0<r<\varepsilon$, 那末 $S(b, r)\subset O(b, \varepsilon)\subset S(a, \rho)$, 而且 $S(b, r)$ 与 A 不交. 条件的充分性是显然的.

在度量空间中的点集 A 如果能表示成为最多可列个疏朗集 $M_\nu(\nu=1, 2, \cdots)$ 的和, 就称 A 是**第一类型**的集. 度量空间中的不是第一类型的集称做**第二类型**的集. 第一、二类型集又分别称为第一、二纲集.

由于单元素集显然在欧氏空间中是疏朗集. 所以欧几里得空间中任一可列集都是第一类型的集. 至于第二类型的集我们将在下一节中给出.

习　题

1. 设 $f(x)$ 为全直线上的函数, 但在一有限区间外为零, 称 $f(x)$ 是具有有界支集的. 以 $B^{(0)}(-\infty, \infty)$ 表示直线上具有有界支集的有界可测函数全体, $J_0(-\infty, \infty)$ 表示直线上具有有界支集的阶梯函数全体, $C_0^{(0)}(-\infty, \infty)$ 是直线上具有有界支集的连续函数全体. 证明 $B^{(0)}(-\infty, \infty)$、$C_0^{(0)}(-\infty, \infty)$ 和 $J_0(-\infty, \infty)$ 在 $L^p(-\infty, \infty)$ $(\infty>p\geqslant1)$ 中稠密, 但都不在 $L^\infty(-\infty, \infty)$ 中稠密.

2. 设 A 是度量空间中的可析点集, 那末 A 的势不超过 $\aleph$.

3. $L^p(\Omega, \mathbf{B}, \mu)$ 是不是可析空间? 为什么? 证明 $L^p(-\infty, \infty)$ $(1\leqslant p<\infty)$ 是可析空间.

4. 如果平面上的实值函数 $f(x, y)$ 适合如下条件: 全平面能分解成有限个或可列个互不相交的有限开矩形 $\{I_\nu\}$, $(I_\nu=(\alpha_\nu, \beta_\nu)\times(\gamma_\nu, \delta_\nu))$, 使得 $f(x, y)$ 在每个矩形 I_ν 上等于常数 k_ν. 那末称 $f(x, y)$ 是平面上的阶梯函数. 平面上的阶梯函数全体记为 J. 证明: J 在 $L^p(E^2)$ $(\infty>p\geqslant1)$ 中是稠密的,

但不在 $L^\infty(E^1)$ 中稠密.

5. 设 $C_{2\pi}$ 表示周期为 2π 的连续函数全体按通常的线性运算所成的线性空间，并按范数 $\|x\|=\max\limits_{0\leq t\leq 2\pi}|x(t)|$ 成一赋范空间. 证明三角多项式全体 $T_{2\pi}$ 在 $C_{2\pi}$ 中稠密.

6. 证明：$C_{2\pi}$ 在 $L^p[0,2\pi](\infty>p\geq 1)$ 中稠密，但不在 $L^\infty[0,2\pi]$ 中稠密.

7. 将 $C_{2\pi}$ 中函数视为 $[0,4\pi]$ 上连续函数. 证明 $C_{2\pi}$ 在 $L^p[0,4\pi]\ (p\geq 1)$ 中不稠密.

8. $C(-\infty,\infty)$ 表示 $(-\infty,\infty)$ 上有界连续函数全体，在 $C(-\infty,\infty)$ 上规定 $\|x(t)\|=\sup\limits_t|x(t)|$. 证明 $C(-\infty,\infty)$ 是赋范线性空间，但不是可析的.

9. $C_0(-\infty,\infty)$ 表示 $(-\infty,\infty)$ 上连续，并且 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}x(t)=0$ 的函数 $x(t)$ 的全体. 规定 $\|x(t)\|=\sup\limits_t|x(t)|$. 证明 $C_0(-\infty,\infty)$ 是赋范线性空间，并且是可析的.

10. $\widetilde{C}(-\infty,\infty)$ 表示 $(-\infty,\infty)$ 上连续，并且 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}x(t)$ 存在的函数 $x(t)$ 的全体，规定 $\|x(t)\|=\sup\limits_t|x(t)|$. 证明 $\widetilde{C}(-\infty,\infty)$ 是赋范线性空间，并且是可析的.

11. 证明在有限区间 $(a,b]$（或 $[a,b]$）上有限个互不相交的左开右闭区间（在 $[a,b]$ 情况下，须补充单点区间 $[a,a]$）上取常数的函数的全体必在 $L^p((a,b],\boldsymbol{B},g)$（或 $L^p([a,b],\boldsymbol{B},g)$）上稠密，这里 $\infty>p\geq 1$，g 是定义在 Borel 集 $\boldsymbol{B}$ 上的勒贝格-斯蒂阶测度.

12. $C_0^{(\infty)}(-\infty,\infty)$ 表示 $(-\infty,\infty)$ 上具有有界支集的无限次可微函数全体，证明 $C_0^{(\infty)}(-\infty,\infty)$ 在 $L^p(-\infty,\infty)\,(\infty>p\geq 1)$ 中稠密（其实，$C_0^{(\infty)}(-\infty,\infty)$ 也在 $C_0(-\infty,\infty)$（见习题 9）中稠密）.

§7　完　备　性

1. 完备性的概念　研究数列极限时，常常应用 Cauchy 收敛条件. 现在把这一概念移植于度量空间.

定义　设 (R,ρ) 是度量空间，$\{x_n\}$ 是 R 中的点列. 如果对于任一正数 ε，存在正数 $N(\varepsilon)$，使得当自然数 $n,m\geq N(\varepsilon)$ 时

$$\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$$

就称$\{x_n\}$是R中**基本点列**，或称为 **Cauchy 点列**.

和实数空间一样，有下列命题.

引理 1 (i) 度量空间R中收敛点列必是基本点列. (ii) 设$\{x_n\}$是度量空间R中基本点列，如果$\{x_n\}$有子点列$\{x_{n_k}\}$收敛于R中的点x，那末$\{x_n\}$也收敛于x.

证 (i) 如果$\{x_n\}$收敛于x，那末由

$$\rho(x_n, x_m)\leqslant\rho(x_n, x)+\rho(x_m, x)$$

立即可知$\{x_n\}$是R中基本点列.

(ii) 因为$\{x_n\}$是基本点列，所以对任何$\varepsilon>0$，有自然数N，当$n, m\geqslant N$时，

$$\rho(x_n, x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$$

又因为子点列$\{x_{n_k}\}$收敛于x，所以存在$N'>N$，当$n_k\geqslant N'$时，$\rho(x_{n_k}, x)<\frac{\varepsilon}{2}$. 由此可知，当$n\geqslant N$时，任取$n_k\geqslant N'$，我们有

$$\rho(x_n, x)\leqslant\rho(x_n, x_{n_k})+\rho(x_{n_k}, x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

即$\{x_n\}$收敛于x. 证毕.

在实(或复)数空间中，基本数列必收敛. 对于一般度量空间，基本点列却未必收敛. 例如R_0表示有理数全体，距离由

$$\rho(r_1, r_2)=|r_1-r_2|,\quad r_1、r_2\in R_0$$

来规定. 显然(R_0, ρ)是度量空间，而有理数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}(n=1, 2, \cdots)$就是$R_0$中基本点列，但它在$R_0$却不收敛（根据实数理论，$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$的极限是$e$，但$e$不是有理数，所以$e$不在度量空间$R_0$中）.

定义 如果度量空间R中每个基本点列都收敛，称R是**完备**

(度量)空间. 完备赋范线性空间又称为**巴拿赫**(Banach)空间. 如果R是度量空间, A是R的子空间, 当A作为度量空间是完备的, 那末称A是R的**完备子空间**.

注意, 一个不完备的度量空间可以有完备的子空间.

容易证明: 完备度量空间的闭子集必是完备子空间; 任何度量空间的完备子空间必是闭子集.

例1 一致离散的度量空间是完备的. 事实上, 如果$\{x_n\}$是基本点列, 那末由一致离散性可知必存在N, 当$n\geq N$时, $x_N=x_{N+1}=\cdots=x_{N+k}=\cdots$, 因而$\{x_n\}$收敛于$x_N$, 从而空间是完备的.

例2 n维欧几里得空间E^n是完备的.

证 设$\{x_m|x_m=(x_1^{(m)},\cdots,x_n^{(m)}),\ m=1,2,\cdots\}$是$E^n$中的一个点列. 由于

$$|x_i^{(m)}-x_i^{(k)}|\leq\|x_m-x_k\|=\left(\sum_{j=1}^n|x_j^{(m)}-x_j^{(k)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\sqrt{n}\max_{1\leq j\leq n}|x_j^{(m)}-x_j^{(k)}|,\quad i=1,2,\cdots,n$$

所以当$\{x_m\}$是E^n中基本点列时, 从上式左边的不等式立即得到对每个i, $\{x_i^{(m)}\}$是基本数列. 由数列的 Cauchy 收敛原理, 它有极限$x_i^{(0)}$. 记$x_0=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$, $x_0\in E^n$. 因为$\lim\limits_{m\to\infty}x_j^{(m)}=x_j^{(0)}$ $(j=1,2,\cdots,n)$, 因而对任何$\varepsilon>0$, 必有N, 当$m\geq N$时, $|x_j^{(m)}-x_j^{(0)}|<\sqrt{\frac{1}{n}}\varepsilon$ $(j=1,2,\cdots,n)$, 即当$m\geq N$时,

$$\|x_m-x_0\|\leq\sqrt{n}\max_{1\leq j\leq n}|x_j^{(m)}-x_j^{(0)}|<\varepsilon$$

这就是说$\{x_m\}$在E^n中收敛于x_0, 从而E^n是完备的.

在数学分析中, 我们知道讨论数列的收敛和讨论级数收敛是等价的. 在赋范线性空间中也有类似的事实. 设X是赋范线性空间, $a_\nu\in X$, $\nu=1,2,\cdots$. 如果存在$a\in X$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu-a\right\|=0$$

那末称 X 中的级数 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 收敛，并称 a 是级数 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 的和.

显然，在赋范线性空间 X 中，点列 $\{x_m\}$ 收敛的充要条件是级数 $\sum_{m=2}^{\infty}(x_m-x_{m-1})$ 在 X 中收敛，并且当 $\{x_m\}$ 收敛时，有

$$\lim_{m\to\infty}x_m=x_1+\sum_{m=2}^{\infty}(x_m-x_{m-1})$$

由此可知，当 X 是 Banach 空间时，X 中的级数 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 收敛的充要条件是对任何正数 ε，必有 N，当 $n>m\geqslant N$ 时，

$$\left\|\sum_{\nu=m+1}^{n}a_\nu\right\|<\varepsilon$$

由此又得到：如果 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\|a_\nu\|<\infty$，那末Banach 空间中的级数 $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu$ 收敛 $\left(\text{因为}\left\|\sum_{\nu=m+1}^{n}a_\nu\right\|\leqslant\sum_{\nu=m+1}^{n}\|a_\nu\|\right)$.

2. 某些完备空间

例 3 $C[a,b]$ 是一个 Banach 空间.

证 在空间 $C[a,b]$ 中按范数收敛的点列 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上均匀收敛，而在数学分析中已经证明均匀收敛的连续函数列的极限函数是连续的. 因此，只须证明 $C[a,b]$ 中的基本点列 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上的均匀收敛函数列. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $C[a,b]$ 中的基本点列，即对任何正数 ε，存在 $N(\varepsilon)>0$，使得当 $n,m\geqslant N(\varepsilon)$ 时

$$\|f_n-f_m\|=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

从而对于任何 $x\in[a, b]$, 只要 $n, m\geqslant N(\varepsilon)$ 必有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

由数列的 Cauchy 收敛条件, $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上收敛于一函数 $f(x)$, 再在上式中令 $m\to\infty$ 得到 $|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$. 因此 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上均匀收敛于 $f(x)$.

例 4 如果在连续函数族 $C[a, b](-\infty<a<b<\infty)$ 上, 定义范数为

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|dt$$

就是把 $C[a, b]$ 看成 $L[a, b]$ 的子空间, 那末 $(C[a, b], \|\cdot\|_1)$ 是不完备的空间. 事实上, 由 §6 定理 5, $C[a, b]$ 在 $L[a, b]$ 中稠密. 又 $C[a, b]\neq L[a, b]$, 因此 $C[a, b]$ 不可能完备. 我们也可以直接地作出 $C[a, b]$ 中按 $\|\cdot\|_1$ 基本点列 $\{f_n\}$, 它不收敛于 $C[a, b]$ 中任何一点: 任取 $c, a<c<b$, 如图 4.5 作函数列 $f_n(x)$(n 充分大)如下:

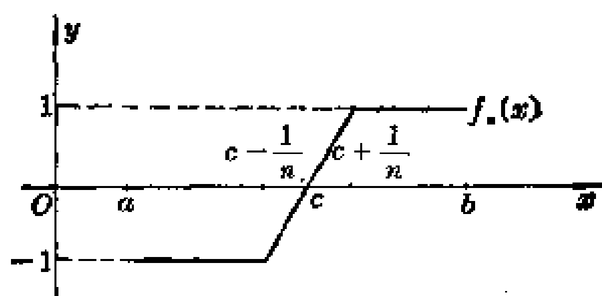


图 4.5

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & c+\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant b\\ \text{线性}, & c-\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant c+\frac{1}{n}\\ -1, & a\leqslant x\leqslant c-\frac{1}{n}\end{cases}$$

那末 $f_n(x)\in C[a, b]$, 不难证明, 在 $[a, b]$ 上每一点 x, $f_n(x)$ 收敛于函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & c<x\leqslant b\\ 0, & x=c\\ -1, & a\leqslant x<c\end{cases}$$

显然，$f(x)\in L[a,b]$，通过直接计算就知道

$$\|f_n-f_m\|_1\leqslant\frac{2}{n}+\frac{2}{m}\to 0\quad(n,\ m\to\infty)$$

所以$\{f_n\}$是空间$(C[a,b],\|\cdot\|_1)$中的基本点列，但$\{f_n\}$在$(C[a,b],\|\cdot\|_1)$中并不收敛．因为如果有$g\in C[a,b]$使得$\|f_n-g\|_1\to 0$，则由勒贝格积分的控制收敛定理得到$\|f-g\|_1=\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-g\|_1=0$，所以$f(x)\doteq g(x)$．但是容易看出，$f(x)$不可能在$[a,b]$上几乎处处等于$[a,b]$上的一个连续函数，所以$(C[a,b],\|\cdot\|_1)$是不完备的赋范线性空间．

但是有下述重要事实．

定理 1 空间$L^p(E,\mu)$ $(p\geqslant 1)$是完备的．

这就是说：$L^p(E,\mu)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$是 **Banach** 空间．

证 先证$1\leqslant p<\infty$的情况．

设$\{f_n\}$是$L^p(E,\mu)$中的基本点列，因此，对任何$\sigma>0$

$$\begin{aligned}\mu(E(|f_n-f_m|>\sigma))&\leqslant\frac{1}{\sigma}\left(\int_{E(|f_n-f_m|>\sigma)}|f_n-f_m|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\frac{1}{\sigma}\|f_n-f_m\|_p\end{aligned}$$

即$\{f_n\}$也是依测度μ的基本序列．由第三章§2的定理5，必有（几乎处处）收敛子序列$\{f_{n_\nu}\}$，记极限函数为f，$f_{n_\nu}\dot{\to}f(\nu\to\infty)$，从而对任何自然数$n$，$|f_{n_\nu}-f_n|\to|f-f_n|(\nu\to\infty)$．另一方面，又因$\{f_n\}$是按$\|\cdot\|_p$基本的，所以对任何$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n,\ m\geqslant N$时，

$$\|f_n-f_m\|_p<\varepsilon$$

取$m=n_\nu$，从上式（固定n）以及 Fatou 引理就有

$$\varepsilon \geq \lim_{\nu\to\infty} \|f_{n_\nu} - f_n\|_p = \lim_{\nu\to\infty}\left(\int_E |f_{n_\nu} - f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\left(\lim_{\nu\to\infty}\int_E |f_{n_\nu} - f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\geq\left(\int_E |f_n - f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{7.1}$$

从(7.1)可知 $f_n - f \in L^p(E, \mu)$. 但 $L^p(E, \mu)$ 是线性空间，所以 $f=(f-f_n)+f_n \in L^p(E, \mu)$. (7.1)还表明当 $n\geq N$ 时,

$$\|f-f_n\|_p \leq \varepsilon \tag{7.2}$$

即 $L^p(E, \mu)$中基本点列$\{f_n\}$必按$\|\cdot\|_p$收敛于 f，即 $L^p(E, \mu)$是完备的.

再证 $p=\infty$ 的情况. 因为

$$\|f\|_\infty = \inf_{\substack{E_0\subset E\\ \mu(E_0)=0}} \sup_{E-E_0} |f(t)|$$

正如本章§3 的第三小节所指出，本性最大模是可达的，从而存在 $E_n \subset E$, $\mu(E_n)=0$, 使得

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{E-E_n}|f_n(t)|$$

又存在 $E_{n,m}\subset E$, $\mu(E_{n,m})=0$, 使得

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{E-E_{n,m}}|f_n(t)-f_m(t)|$$

记 $E_0 =\left(\bigcup_{n,m=1}^{\infty} E_{n,m}\right)\bigcup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$，显然 $\mu(E_0)=0$，并且对一切 $n, m=1, 2, \cdots$,

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{E-E_{n,m}} |f_n(t)-f_m(t)| \geq \sup_{E-E_0} |f_n(t)-f_m(t)|$$
$$\geq \|f_n - f_m\|_\infty \tag{7.3}$$

上面第一不等式的成立是因为 $E-E_0\subset E-E_{n,m}$, 所以上确界不增大, 第二个不等式成立是由$\|f_n - f_m\|_\infty$的定义所得.

如果$\{f_n\}$是$\|\cdot\|_\infty$的基本序列(从而$\{\|f_n\|_\infty\}$是有界序列). 从

(7.3)立即得到:

$$\|f_n-f_m\|_\infty=\sup_{E-E_0}|f_n(t)-f_m(t)|\to 0\quad(n,m\to\infty)$$

即$\{f_n\}$在$E-E_0$上按一致收敛是基本序列, 因而存在E上函数f(在E_0上补充定义为0), 使得

$$\sup_{E-E_0}|f(t)-f_m(t)|\to 0\quad(m\to\infty)$$

又因为$\sup\limits_{E-E_0}|f_n(t)|\leqslant\sup\limits_{E-E_n}|f_n(t)|=\|f_n\|_\infty$, 而$\{\|f_n\|_\infty\}$是有界的, 所以$\{f_n(t)\}$是在$E-E_0$上一致有界的函数序列, 因而$f$是$E-E_0$(或$E$)上有界函数, 即$f\in L^\infty(E,\mu)$, 并且

$$\|f_m-f\|_\infty\leqslant\sup_{E-E_0}|f(t)-f_m(t)|\to 0\quad(m\to\infty)$$

证毕.

定理的特殊情况是:

系 $l^p(p\geqslant 1)$是Banach空间.

证 令N是自然数全体, $\boldsymbol{B}$是N的子集全体, μ是$\boldsymbol{B}$上如下的测度: 当$M\in\boldsymbol{B}$时, $\mu(M)=M$中元素的个数. 当$\{x_n\}\in l^p$时, 把它看成函数$x(n)=x_n$, 那末l^p就可以看成$l^p(N,\boldsymbol{B},\mu)$. 由定理1就知道$l^p$是完备的. 证毕.

3. 完备空间的重要性质 在完备的度量空间中成立着闭球套定理, 它类似于直线上的区间套定理, 证明方法也是相似的.

引理2(闭球套定理) 设R是完备的度量空间, 又设$S_\nu=\{x|\rho(x,x_\nu)\leqslant\varepsilon_\nu\}$是$R$中的一套闭球:

$$S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_n\supset\cdots$$

如果球的半径$\varepsilon_n\to 0$, 则必有唯一的点$x\in\bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty}S_\nu$.

证 球心所组成的点列$\{x_\nu\}$是基本点列. 这是因为当$\mu\geqslant\nu$时, 由$x_\mu\in S_\mu\subset S_\nu$得到

$$\rho(x_\mu,x_\nu)\leqslant\varepsilon_\nu\tag{7.4}$$

对于任一正数 ε, 取 N, 使当 $\nu\geqslant N$ 时, $\varepsilon_\nu<\varepsilon$, 于是当 μ, $\nu\geqslant N$ 时

$$\rho(x_\mu, x_\nu)<\varepsilon$$

所以$\{x_\nu\}$是基本点列. 由于空间 R 是完备的, 点列$\{x_\nu\}$收敛于 R 中的一点 x. 再在(7.4)中令 $\mu\to\infty$, 根据距离的连续性得到

$$\rho(x, x_\nu)\leqslant\varepsilon_\nu,\quad \nu=1, 2, \cdots$$

即 $x\in S_\nu$, $\nu=1, 2, \cdots$. 因此 $x\in \bigcap_{\nu=1}^{\infty} S_\nu$.

如果又有 R 中的点 $y\in \bigcap_{\nu=1}^{\infty} S_\nu$, 那末

$$\rho(y, x_\nu)\leqslant\varepsilon_\nu$$

令 $\nu\to\infty$即得 $\rho(y, x)=\lim_{\nu\to\infty}\rho(y, x_\nu)=0$, 所以 $y=x$, 即 $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} S_\nu$ 中只有一点. 证毕.

我们留意, 如果引理中条件 $\varepsilon_\nu\to 0$ 不满足, 那末 $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} S_\nu$ 可能是空的.

例5 考虑 l^2 的子空间 R, 它是由所有形如

$$x_n=\left\{0, 0, \cdots, 0, \frac{n+1}{n}, 0, \cdots\right\}$$

(其中除第 n 个坐标外其余坐标为零) 的点组成. 于是当 $n\neq m$ 时

$$\rho(x_n, x_m)=\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2+\left(\frac{m+1}{m}\right)^2}\geqslant\sqrt{2}$$

因此 R 中没有基本点列, 当然 R 就成为完备的度量空间了. 取 $\varepsilon_n=\sqrt{2}\,\frac{n+1}{n}$, 在 R 中作闭球

$$S_n=\{x\,|\,\rho(x, x_n)\leqslant\varepsilon_n\}, n=1, 2, \cdots$$

那末 S_n 中仅含点 x_n, x_{n+1}, $\cdots$, 所以 $S_1\supset S_2\supset\cdots$. 但是, 通集 $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} S_\nu$ 是空集.

其实，闭球套定理是与度量空间的完备性等价的，即有如下相反命题.

引理3. 设 R 是度量空间，如果在 R 上闭球套定理成立，那末 R 必是完备的.

证 设$\{x_n\}$是 R 中的基本序列，由于$\{x_n\}$是基本的，所以存在 $n_1<n_2\cdots<n_k<\cdots$，当 $n, m\geq n_k$ 时，

$$\rho(x_n, x_m)<\frac{1}{2^{k+1}}$$

在 R 中作一列闭球 $S\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^k}\right)$，$k=1, 2, \cdots$，当 $y\in S\left(x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}}\right)$ 时，由于

$$\rho(x_{n_k}, y)\leqslant\rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})+\rho(x_{n_{k+1}}, y)<\frac{1}{2^k}$$

立即知道 $S\left(x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}}\right)\subset S\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^k}\right)$，$k=1, 2, \cdots$.

另一方面，$S\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^k}\right)$的半径$\frac{1}{2^k}\to 0$ $(k\to\infty)$. 因而存在唯一一点 $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^k}\right)$，并且 $\rho(x, x_{n_k})\to 0(k\to\infty)$. 因为$\{x_n\}$是基本的，所以 $\rho(x, x_n)\to 0$. 证毕.

现在我们来证明完备度量空间的另一个重要性质，即

定理 2 (Baire) 完备度量空间必是第二类型的集.

证 我们用反证法. 设 R 是完备的度量空间，而且是第一类型的. 下面我们要从这里推出矛盾.

设 $R=\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$，其中每个子集$M_\nu$都是疏朗集. 任取一个球 $S(a, 1)$，由于 M_1 是疏朗的，必有 R 中的非空闭球 $S(a_1, \rho_1)\subset S(a, 1)$，使得 $S(a_1, \rho_1)$ 中不含有 M_1 的点；由于 M_2 是疏朗

的，必有 $S(a_2, \rho_2)\subset S(a_1, \rho_1)$——不妨取 $0<\rho_2<\frac{1}{2}$——使得 $S(a_2, \rho_2)\cap M_2=\varnothing$，如此可以选得一套非空闭球：

$$S(a_1, \rho_1)\supset S(a_2, \rho_2)\supset\cdots,\quad S(a_\nu, \rho_\nu)\cap M_\nu=\varnothing$$

而且 $0<\rho_\nu<\frac{1}{\nu}$. 由引理 2，通集 $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} S(a_\nu, \rho_\nu)$ 中存在一点 x_0. 因为 $S(a_\nu, \rho_\nu)$ 和 M_ν 不相交，所以 x_0 不在每个 M_ν 之中，$\nu=1, 2, \cdots$，因此 $x_0\overline{\in}\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$，但是 $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu=R$. 这是矛盾. 所以 R 不是第一类型的. 证毕.

把闭区间 $[0, 1]$ 看作完备空间 E^1 的闭子集是一完备子空间. 利用 Baire 定理可以给出区间 $[0, 1]$ 是不可列集的另一个证明. 因为每个单元素集 $\{x\}$ 显然是 $[0, 1]$ 中的疏朗集. 由于 $[0, 1]=\bigcup_{0\leqslant x\leqslant 1}\{x\}$. 因为 $[0, 1]$ 是完备空间，所以 $\bigcup_{0\leqslant x\leqslant 1}\{x\}$ 不可能是可列和，所以 $[0, 1]$ 是不可列的.

4. 度量空间的完备化　由有理数的柯西序列构造实数是从不完备的度量空间扩张为完备空间的典型方法. 一般的度量空间，如果不是完备的，往往在应用起来有困难. 例如在不完备的空间中解方程，即使近似解的序列是基本的，也不能保证这个序列有极限，从而有可能不存在准确解. 但是我们可以把柯西序列作为一个新的点增加到原有空间中去而成为新的空间，在补充了这些新"点"之后，就得到完备的度量空间了.

定义　设 R 是度量空间，如果有完备的度量空间 R_1，使 R 保距同构于 R_1 的稠密子空间，则称 R_1 是 R 的**完备化空间**.

定理 3　对于任一度量空间必存在完备化空间.

证　我们逐步作出定理的证明如下：

(1) 设 R 是度量空间，R 中的基本点列 $\xi=\{x_n\}$ 的全体记做

$\tilde{R}$. 如果 R 中的两个基本点列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 适合

$$\rho(x_n, y_n) \to 0$$

则称 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 相等，记为 $\{y_n\} = \{x_n\}$. 相等的基本点列作为 $\tilde{R}$ 的同一元素①，而且规定：对于任意的 $\{x_n\}$、$\{y_n\} \in \tilde{R}$

$$\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) \tag{7.5}$$

我们要证明 $\rho(\{x_n\}, \{y_n\})$ 在 $\tilde{R}$ 上有确定的意义，而且是 $\tilde{R}$ 上的距离.

事实上，由于 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 是基本点列，所以对任一正数 ε，必有 N 使得当 $n, m \geq N$ 时，$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, 因此

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) < \varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$ 存在. 如果 $\{z_n\} = \{x_n\}$, $\{w_n\} = \{y_n\}$, 那末

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(z_n, w_n)| \leq \rho(x_n, z_n) + \rho(y_n, w_n) \to 0$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(z_n, w_n)$, 即

$$\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \rho(\{z_n\}, \{w_n\})$$

这就是说，对于 ξ、$\eta \in \tilde{R}$, $\rho(\xi, \eta)$ 与用来表示 ξ、η 的具体点列是 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 还是 $\{z_n\}$、$\{w_n\}$ 无关. 所以 $\rho(\xi, \eta)$ 在 $\tilde{R}$ 上有确定的意义.

显然，$\rho(\xi, \eta) \geq 0$, 而且 $\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = 0$ 的充要条件是 $\rho(x_n, y_n) \to 0$, 即 $\{x_n\} = \{y_n\}$. 又若 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\} \in \tilde{R}$, 则

$$\begin{aligned}
\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) &= \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) + \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, z_n) \\
&= \rho(\{x_n\}, \{z_n\}) + \rho(\{y_n\}, \{z_n\})
\end{aligned}$$

因此 $\tilde{R}$ 按 $\rho(\xi, \eta)$ 成一度量空间.

---

① R 中基本点列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的相等关系是 $\tilde{R}$ 中等价关系. 因此这时的 $\tilde{R}$ 实际上是最初的 $\tilde{R}$ 关于相等关系的商集.

(2) 对于 $x\in R$, 点列$\{x, x, x, \cdots\}$显然在 R 中是基本的, 把它记成 $\tilde{x}$, 所以$\tilde{x}\in\tilde{R}$. 作 $\tilde{R}$ 的子集

$$\tilde{R}_0=\{\tilde{x}\,|\,x\in R\}$$

容易看出, 当 x、$y\in R$ 时, $\rho(\tilde{x}, \tilde{y})=\rho(x, y)$. 我们来证明: 子空间 $\tilde{R}_0$ 在 $\tilde{R}$ 中稠密.

事实上, 任取 $\xi=\{x_n\}\in\tilde{R}$, 考虑 $\tilde{R}_0$ 中的点列

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n\cdots$$

则由定义知道

$$\rho(\tilde{x}_k, \xi)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_k, x_n), \quad k=1, 2, \cdots$$

因为$\{x_n\}$是 R 中的基本点列, 对于任一正数 ε, 必有 N, 使得对于 $k, n\geqslant N$, 有 $\rho(x_k, x_n)<\varepsilon$. 因此当 $k\geqslant N$ 时有

$$\rho(\tilde{x}_k, \{x_n\})\leqslant\varepsilon$$

从而

$$\lim_{k\to\infty}\rho(\tilde{x}_k, \{x_n\})=0 \tag{7.6}$$

所以对于 $\xi\in\tilde{R}$, 有 $\tilde{R}_0$ 中的点列$\{\tilde{x}_k\}$收敛于 ξ, 这就证明了 $\tilde{R}_0$ 在 $\tilde{R}$ 中稠密.

(3) 再证明 $\tilde{R}$ 是完备的. 设 ξ_1、ξ_2、$\cdots$是 $\tilde{R}$ 中的基本点列, 由于 $\tilde{R}_0$ 在 $\tilde{R}$ 中稠密, 取 $\tilde{x}_n\in\tilde{R}_0\cap O\left(\xi_n, \frac{1}{n}\right)$, 则

$$\rho(\tilde{x}_n, \xi_n)<\frac{1}{n} \tag{7.7}$$

对任一正数 ε, 取 $N\left(>\frac{3}{\varepsilon}\right)$, 使得当 n、$m\geqslant N$ 时 $\rho(\xi_n, \xi_m)<\frac{\varepsilon}{3}$, 于是

$$\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m)\leqslant\rho(\tilde{x}_n, \xi_n)+\rho(\tilde{x}_m, \xi_m)+\rho(\xi_n, \xi_m)<\varepsilon$$

所以 $\rho(x_m, x_n)<\varepsilon$, 即$\{x_n\}$是 R 的基本点列, 记 $\xi=\{x_n\}$, 则 $\xi\in\tilde{R}$, 由(7.6)知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(\tilde{x}_n, \xi)=0$, 又由(7.7)得到

$$\rho(\xi_n,\xi)\leqslant\rho(\xi_n,\tilde{x}_n)+\rho(\tilde{x}_n,\xi)\to 0,\ (n\to\infty)$$

即$\xi_n\to\xi$，这就证明了 $\tilde{R}$ 是完备空间.

(4) 由于当 x、$y\in R$ 时，$\rho(x,y)=\rho(\tilde{x},\tilde{y})$，在 $\tilde{R}$ 中把子空间 $\tilde{R}_0$ 的元素 $\tilde{x}$ 换成 x，而不改变 $\tilde{R}-\tilde{R}_0$ 中的元素，这样并不改变 $\tilde{R}$ 中的距离. 因此可以把 R 看成 $\tilde{R}$ 的子空间，从(2)知道 R 在 $\tilde{R}$ 中稠密. 证毕.

同样地，对于赋范线性空间，由于线性运算和范数的连续性，读者容易证明：任何赋范线性空间可以完备化成一 Banach 空间. 这里我们就不仔细地讨论了.

下面证明度量空间 R 的完备化空间是唯一的.

定理 4 设 $\tilde{R}$、R' 是度量空间 R 的两个完备化空间，那末必有 $\tilde{R}$ 到 R' 的等距同构映照 φ，使得对一切 $x\in R$，$\varphi(x)=x$，因此，度量空间的完备化空间在等距同构的意义下是唯一的.

证 由于 R 在 $\tilde{R}$ 中稠密，对于每个 $\xi\in\tilde{R}$，必有一列$\{x_n\}\subset R$使得在 $\tilde{R}$ 中 $x_n\to\xi$. 这个$\{x_n\}$也是 R' 中的基本点列，必有 $x'\in R'$ 使得在 R' 中 $x_n\to x'$，我们作映照 φ 如下

$$\varphi(\xi)=x'$$

读者可以证明，这个映照有确定的意义，而且满足定理中的要求，证毕.

从赋范空间完备化观点来看，由于$C[a,b]$是在 $L[a,b]$中稠密(当然，稠密是按 $L[a,b]$中距离来说的)的子空间，而$L[a,b]$是完备空间，但 $C[a,b]$关于范数$\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|dt$并不完备，所以 $L[a,b]$不过是$C[a,b]$按$\|\cdot\|_1$的完备化空间.

度量空间的完备化(以及后来进一步发展起来的具有一致结构的拓扑空间的完备化)，可以毫不夸张地说是整个分析数学的一个重要而基本的思想和方法. 由有理数产生实数是这个思想的

最早的体现．由黎曼积分扩充为勒贝格积分，实质上与由连续函数空间完备化为勒贝格可积函数空间是一回事．同时，把测度由环延拓到 σ-环上去，可以利用简单函数空间完备化为 σ-环上的可测函数空间而得到(当然，这里要先经过积分扩张的过程)．在偏微分方程的理论中，也常需要把由性质较好的光滑函数组成的空间，按某种距离加以完备化得到新的空间，使它含有所研究的方程的“弱解”．在某些场合(例如椭圆型方程)，还可以从所得的弱解返回到经典解．象在本书第七章中所介绍的广义函数空间，也可以看成性质很好的基本函数空间的完备化，它就是为上述研究偏微分方程定解时所用．至于一些具体定理的论证中需要对空间完备化，那是自不待说的事．

习　题

1．证明基本点列是有界的．

2．证明完备空间的闭子集是一个完备的子空间，而任一度量空间中完备子空间是闭的子集．

3．证明，c 及 $V[a,b]$ 为完备的度量空间(显然，还是 Banach 空间)．

4．在§3 习题 2 中，若 $\{R_n\}$ 皆为 Banach 空间，则空间 R 也是 Banach 空间．

5．设 R 是完备的度量空间，$O_n(n=1,2,\cdots)$ 是 R 中一列稠密的开集，证明 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} O_n$ 也是稠密集．

6．设 H 为直线上关于勒贝格测度平方可积，而且导函数也是平方可积的全连续函数 f 全体，按通常的线性运算及范数

$$\|f\|=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt+\int_{-\infty}^{\infty}|f'(t)|^2dt}$$

H 成为赋范线性空间．证明 H 是 Banach 空间．

7．设 $\{F_n\}$，$n=1,2,\cdots$是完备度量空间 R 中一列单调下降闭集，且 F_n 的直径 $d_n=\sup\limits_{x,y\in F_n}\rho(x,y)\to 0$，则 $\bigcap\limits_{n} F_n$ 不空．

8. 设X是 Banach 空间, E是X的闭线性子空间, 作赋范的商空间X/E(见§4), 证明它是完备的.

9. 证明任何赋范线性空间必可完备化成 Banach 空间.

10. 完备的赋准范线性空间称为 Fréchet 空间. 证明S、s、$\mathscr{A}$等是 Fréchet 空间.

11. 证明: 任何赋准范线性空间必可完备化成 Fréchet 空间.

12. 设X是 Fréchet 空间, E是闭子空间, 作赋准范的商空间X/E(见§4 习题15), 证明它也是 Fréchet 空间.

§8 不动点定理

1. 压缩映照原理 把一些方程的求解问题化为求映照的不动点, 以及用逐次逼近法来求不动点, 这是代数方程、微分方程、积分方程、泛函方程以及计算数学中的一个很重要的方法. 这个方法起源很早, 一直可以追溯到牛顿求代数方程根时所用的切线法, 后来 Picard 用逐次逼近法求解常微分方程. 嗣后这个方法在不同的领域中都有应用. 1922 年 Banach 把这个方法的基本点提炼出来, 用度量空间以及其中的压缩算子的一些概念更一般地描述了这个方法, 这就是本节中要着重介绍的内容. 这种利用泛函分析来研究方程的解的近似方法以及关于算子的不动点的存在性的研究, 自 Banach 以后又取得了不少的重要进展, 甚至成为非线性泛函分析的主要内容. 本书中我们只能对应用较广的 Schauder 不动点原理做一个陈述(没有证明)(见§9, §10), 但是却介绍它的一个最新的应用(见第五章§6), 说明不动点原理远不止用于解通常的方程, 还会有许多其它意想不到的应用.

下面我们就以常微分方程求解问题为例来阐明逐次逼近法以及把求解化为求映照的不动点.

我们先回顾一下证明常微分方程解的存在定理所用的逐次逼近法. 利用度量空间的概念可以把这个方法叙述如下.

假设 $f(x, y)$ 是平面上某单连通区域 $\mathscr{D}$ 上的二元连续函数，我们考虑一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{8.1}$$

求这一方程适合初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的解，就等价于求解积分方程：

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt$$

对于上述积分方程，可以运用局部求解的方法。为此，进一步假设 $f(x, y)$ 在矩形 $D(\subset\mathscr{D})$：$|x-x_0|\leqslant h$，$|y-y_0|\leqslant\lambda$ 上对 y 满足李普希兹(Lipschitz)条件，即存在常数 $L>0$，使得当 $(x, y_i)\in D$，$i=1, 2$，时，

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|$$

记 $M=\sup\limits_{(x, y)\in D}|f(x, y)|$，并记 C_D 是连续函数空间 $C[x_0-h, x_0+h]$ 中满足 $(x, \varphi(x))\in D$ 且 $\varphi(x_0)=y_0$ 的函数 $\varphi(x)$ 全体，那末 C_D 是 $C[x_0-h, x_0+h]$ 的子空间，而且显然是闭子空间，因此也是完备的。作映照

$$A:\ \varphi\longmapsto y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt \tag{8.2}$$

我们来证明，当 $h<\min\left(\dfrac{\lambda}{M}, \dfrac{1}{L}\right)$ 时，由(8.2)所确定的映照 A 具有下述性质：

(i) 当 $\varphi\in C_D$ 时，$\psi=A\varphi\in C_D$；

(ii) 当 $\varphi_1, \varphi_2\in C_D$ 时，$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2)\leqslant\alpha\rho(\varphi_1, \varphi_2)$，而 $\alpha=Lh<1$.

事实上，显然 $\psi(x_0)=y_0$. 当 $|x-x_0|\leqslant h$ 时，$\psi(x)$ 为连续函数，而且

$$|\psi(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt\right|\leqslant hM<\lambda$$

所以 $\psi(x)\in C_I$，即(i)成立.

当 $\varphi_1, \varphi_2\in C_D$ 时

$$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2)=\max_{|x-x_0|\leqslant h}\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,\varphi_1(t))-f(t,\varphi_2(t))]dt\right|$$
$$\leqslant L\max_{|x-x_0|\leqslant h}\int_{x_0}^{x}|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|dt$$
$$\leqslant Lh\rho(\varphi_1, \varphi_2)$$

令 $\alpha=Lh$，那末 $\alpha<1$，(ii)成立.

如果在 C_D 中任意取一点 φ_0，依次地作函数

$$\varphi_1=A\varphi_0, \varphi_2=A\varphi_1, \cdots, \varphi_{n+1}=A\varphi_n, \cdots$$

由(ii)，容易证明函数列 $\{\varphi_n, n=1, 2, \cdots\}$ 是空间 C_D 中的基本点列，由度量空间 C_D 的完备性知道它有极限点 φ，而且 φ 适合方程

$$A\varphi=\varphi$$

这一论断是证明映照 A 确有不动点(也就是积分方程 $A\varphi=\varphi$ 的解)的关键. 把上述过程一般化，就得到完备度量空间中的一个"不动点原理"，它概括了用逐次逼近法所证明的许多方程解的存在性和唯一性定理. (只要在一适当的度量空间中造一个映照就行了.)

定义 设 R 是度量空间，A 是 R 到它自身的一个映照. 如果存在数 α，$0\leqslant\alpha<1$ 使得对一切 $x, y\in R$ 成立着

$$\rho(Ax, Ay)\leqslant\alpha\rho(x, y) \tag{8.3}$$

那末就称 A 是 R 上的一个**压缩映照**(对于线性空间，往往又称之为压缩算子).

一个点集经压缩映照后，集中任意两点的距离经映照后被缩短了，至多等于原象距离的 $\alpha(\alpha<1)$ 倍.

压缩映照是连续的，即对任何收敛点列 $x_n\to x_0$，必有 $Ax_n\to Ax_0$. 事实上

$$\rho(Ax_n, Ax_0)\leqslant\alpha\rho(x_n, x_0)$$

当 $n\to\infty$ 时，由 $\rho(x_n, x_0)\to 0$ 就得到 $\rho(Ax_n, Ax_0)\to 0$.

设 R 为一集, A 是 R 到自身的映照. 如果 $x^*\in R$, 使得 $Ax^*=x^*$, 那末称 x^* 为映照 A 的一个**不动点**.

在不同的场合有各种"不动点定理", 下面介绍一个最简单的定理, 有时称作"压缩映照原理".

设 B 是 R 到 R 自身的映照, B^2 表示 $x\mapsto BBx$, 为此可以逐次定义映照 B^n, $n=2, 3, \cdots$.

定理 1 (Banach, 1922) 在完备的度量空间中的压缩映照必然有唯一的不动点.

证 设度量空间 R 是完备的, A 是 R 到它自身中的压缩映照. 先证明 A 存在不动点.

在 R 中任取一点 x_0, 从 x_0 开始, 作一迭代程序: 令

$$x_1=Ax_0,\ x_2=Ax_1=A^2x_0,\ \cdots,\ x_n=Ax_{n-1}=\cdots=A^nx_0,\ n=1, 2, \cdots$$

这样得到 R 中的一列点 $\{x_n\}$. 只要我们证明了 $\{x_n\}$ 是基本点列, 那末它在完备空间 R 中存在唯一的极限 x^*: $x_n\to x^*$. 因为由压缩映照的连续性, 又有 $Ax_n\to Ax^*$. 但是 $Ax_n=x_{n+1}\to x^*$, 又因为收敛点列 Ax_n 的极限是唯一的, 必然有 $Ax^*=x^*$, 那末 x^* 就是 A 的不动点了.

现在证明 $\{x_n\}$ 是基本点列. 由于 A 是压缩映照, 我们有

$$\rho(x_{n+1}, x_n)=\rho(Ax_n, Ax_{n-1})\leqslant\alpha\rho(x_n, x_{n-1})\quad (n\geqslant 1)\tag{8.4}$$

反复应用此式, 不难由归纳法得到

$$\rho(x_{n+1}, x_n)\leqslant\alpha^n\rho(x_1, x_0)\quad (n\geqslant 1)\tag{8.5}$$

于是, 对于任意正整数 p, 由三点不等式及(8.5)得到

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+p}, x_n)&\leqslant\rho(x_{n+p}, x_{n+p-1})+\rho(x_{n+p-1}, x_{n+p-2})+\cdots\\&\quad+\rho(x_{n+1}, x_n)\\&\leqslant(\alpha^{n+p-1}+\alpha^{n+p-2}+\cdots+\alpha^n)\rho(x_1, x_0)\end{aligned}$$

$$=\frac{\alpha^n-\alpha^{n+p}}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0)$$

$$<\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0) \tag{8.6}$$

由于 $0\leqslant\alpha<1$，所以$\{x_n\}$是 R 中的基本点列。

我们再证明不动点的唯一性。设 x'也是A 的不动点，$x'=Ax'$。于是必有

$$\rho(x^*, x')=\rho(Ax^*, Ax')\leqslant\alpha\rho(x^*, x')$$

但是 $0\leqslant\alpha<1$，欲要上式成立，必须 $\rho(x^*, x')=0$，所以 $x'=x^*$。证毕。

我们应注意到，空间 R 的完备性条件，只是为了保证映照 A 的不动点存在，至于不动点的唯一性是直接从映照的压缩性来的，并不要假设空间是完备的。

不动点定理非但(i)证明了压缩映照的不动点的存在性和唯一性，同时(ii)它提供了求不动点的方法——迭代法。就是说，在完备度量空间中，从任取的"初值"x_0 出发，逐次作点列 $x_n=A^nx_0$，$n=1, 2, \cdots$，它必收敛到方程 $Ax=x$ 的解。这种方法称为**逐次逼近法**。(iii)在(8.6)中令 $p\to\infty$，得到

$$\rho(x^*, x_n)\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0),\ n=1, 2, \cdots \tag{8.7}$$

上式不仅告诉我们"近似解"x_n 与所求准确解 x^* 的逼近程度(这个估计式在近似计算中很有用)，而且还告诉我们方程 $Ax=x$ 的解可能座落的范围，例如当 $n=0$ 时，由(8.7)得到

$$\rho(x^*, x_0)\leqslant\frac{1}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0)$$

应该注意，上述定理 1 中，空间 R 的完备性条件不能除去。例如考察 E^1 的子空间$(0, \infty)$到它自身的映照

$$Ax=\alpha x$$

此地 α 是小于 1 的一个正数. 它显然是压缩映照, 但是它在 $(0, \infty)$ 中没有不动点.

又条件 $0\leqslant\alpha<1$ 不能减轻为 $0\leqslant\alpha\leqslant1$. 事实上, 即使 R 为完备的度量空间, 而且对于所有的 $x, y\in R$, 当 $x\neq y$ 时, 成立着

$$\rho(Ax, Ay)<\rho(x, y) \tag{8.8}$$

映照 A 也可能没有不动点. 例如在 E^1 的闭子空间 $[0, \infty)$ 中

$$Ax=x+\frac{1}{1+x}$$

容易验证映照 A 适合条件(8.8), 但 A 在 $[0, \infty)$ 中没有不动点.

下面是压缩映照原理在研究隐函数存在方面的应用.

例 1　隐函数存在定理　设函数 $f(x, y)$ 在条形闭区域

$$a\leqslant x\leqslant b, \quad -\infty<y<\infty$$

上处处连续, 关于 y 的偏导数 $f'_y(x, y)$, 有常数 $m<M$ 使得在上述条形区域中

$$0<m\leqslant f'_y(x, y)\leqslant M$$

那末方程 $f(x, y)=0$ 在闭区间 $[a, b]$ 上必有唯一的连续解 $y=\varphi(x)$.

证　在完备空间 $C[a, b]$ 中作映照

$$A\varphi=\varphi-\frac{1}{M}f(x, \varphi)$$

这是 $C[a, b]$ 到自身的压缩映照. 事实上, 对于 $\varphi_1, \varphi_2\in C[a, b]$, 由微分中值定理有 $0<\theta<1$ 使得

$$\begin{aligned}\left|(A\varphi_2)(x)-(A\varphi_1)(x)\right| &= \Big|\varphi_2(x)-\frac{1}{M}f(x, \varphi_2)-\varphi_1(x)+ \\ &\qquad +\frac{1}{M}f(x, \varphi_1)\Big| \\ &= \Big|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)-\frac{1}{M}f'_y[x, \varphi_1(x)+\end{aligned}$$

$$\theta(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))](\varphi_2(x)-\varphi_1(x))$$

$$\leqslant|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\left(1-\frac{m}{M}\right)$$

由于$0<\frac{m}{M}<1$，所以$0<1-\frac{m}{M}<1$，令$\alpha=1-\frac{m}{M}$，便有

$$|(A\varphi_2)(x)-(A\varphi_1)(x)|\leqslant\alpha|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|$$

所以

$$\|A\varphi_2-A\varphi_1\|\leqslant\alpha\|\varphi_2-\varphi_1\|$$

这就说明A是$C[a,b]$中的压缩算子. 由定理 1，有唯一的$\varphi\in C[a,b]$使得

$$A\varphi=\varphi$$

这就是说

$$f(x,\varphi(x))\equiv 0,\ a\leqslant x\leqslant b$$

证毕.

压缩映照原理有许许多多有用的推广，本书中不可能作很多的介绍. 下面仅介绍一个较常见的一种推广形式.

定理 2 设度量空间R是完备的，B是R到R的映照. 如果存在一个自然数n使得B^n是R上的一个压缩映照，那末映照B在R中必有唯一的不动点.

当$n=1$时，定理 2 就是定理 1.

证 令$A=B^n$，则A是R上的压缩映照，由定理 1，A有不动点x^*：$x^*=Ax^*$. 我们证明x^*是B的不动点好了. 事实上，映照

$$AB=B^{n+1}=BA$$

所以$A(Bx^*)=B(Ax^*)=Bx^*$，因此Bx^*也是A的不动点. 由于压缩映照A只有一个不动点，所以必然成立着$Bx^*=x^*$.

设x'是B的任一不动点，由于$Bx'=x'$则

$$B^nx'=B^{n-1}x'=\cdots=x'$$

因此，x'也是$A=B^n$的不动点. 又由于A的不动点只有一个x^*，所

以 $x'=x^*$. 就是说 B 的不动点也只有一个. 证毕.

2. **应用** 现在应用上述不动点原理证明几类微分方程和积分方程解的存在性和唯一性定理.

(1) 当研究常微分方程(8.1)解的存在性和唯一性问题时, 由定理 1 立即可知有 $\varphi_0\in C_D$, 使得

$$\varphi_0(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_0(t))\,dt \tag{8.9}$$

由此, $\varphi_0(x)$ 具有连续的一阶导函数, 而且由(8.9)

$$\frac{d\varphi_0(x)}{dx}=f(x,\varphi_0(x))$$

即 $y=\varphi_0(x)$ 是方程(8.1)在区间 $[x_0-h,\ x_0+h]$ 上适合初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的解, 并且这解是唯一的.

(2) 还可以应用不动点原理于积分方程.

定理 3 设 $f(s)$ 为 $a\leqslant s\leqslant b$ 上的连续函数, $K(s,t)$ 为正方形 $a\leqslant s\leqslant b$, $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数, 且有常数 M 使得

$$\int_a^b |K(s,t)|\,dt\leqslant M<\infty \quad (a\leqslant s\leqslant b)$$

那末, 当 $|\lambda|<\frac{1}{M}$ 时, 必有唯一的 $\varphi\in C[a,b]$ 适合方程

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt \tag{8.10}$$

证 在连续函数空间 $C[a,b]$ 上定义映照

$$K\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt$$

记 $\alpha=M|\lambda|$, 那末 $\alpha<1$, 对于任意的 $\varphi,\psi\in C[a,b]$, 有

$$\|K\varphi-K\psi\|=|\lambda|\left\|\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt-\int_a^b K(s,t)\psi(t)\,dt\right\|$$

$$\leqslant|\lambda|\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)|\,|\varphi(t)-\psi(t)|\,dt$$

$$\leqslant|\lambda|M\max_{a\leqslant t\leqslant b}|\varphi(t)-\psi(t)|=\alpha\|\varphi-\psi\|$$

应用 Banach 不动点定理便知道积分方程(8.10)有唯一的连续解 $\varphi(t)$.

作为定理 2 的一个应用，我们考察积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy$$

这里 λ 是一常数．这种类型的方程称为伏特拉(Volterra)型积分方程．某些数学物理问题和某些变分问题均可以归结为解这种积分方程的问题．近来在二阶椭圆型偏微分方程的研究中，伏特拉积分方程也有应用.

我们来证明下面的定理.

定理 4 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，$K(x,y)$ 是三角形 $\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant y\leqslant x\}$ 上的连续函数，而且设 $|K(x,y)|\leqslant M$，那末对于任何常数 λ，方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy \tag{8.11}$$

在 $[a,b]$ 上有唯一的连续函数解 $\varphi(x)$.

证 考察 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的映照：$\varphi\longmapsto B\varphi$

$$B\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)\,dy$$

对于 $C[a,b]$ 中任意两个函数 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$，当 $x\in[a,b]$ 时

$$|B\varphi_1(x)-B\varphi_2(x)|=\left|\lambda\int_a^x K(x,y)(\varphi_1(y)-\varphi_2(y))\,dy\right|$$

$$\leqslant|\lambda|M(x-a)\|\varphi_1-\varphi_2\| \tag{8.12}$$

今用归纳法证明：当 $x\in[a,b]$ 时

$$|B^n\varphi_1(x)-B^n\varphi_2(x)|\leqslant|\lambda|^n M^n\frac{(x-a)^n}{n!}\|\varphi_1-\varphi_2\| \tag{8.13}$$

当 $n=1$ 时已证好了．设(8.13)对于 n 成立，现在来推出对于

$n+1$. (8.13)也成立. 事实上

$$|B^{n+1}\varphi_1(x)-B^{n+1}\varphi_2(x)|$$

$$=\left|\lambda\int_a^x K(x,y)(B^n\varphi_1(y)-B^n\varphi_2(y))dy\right|$$

$$\leqslant\frac{|\lambda|^n M^{n+1}}{n!}\left|\lambda\int_a^x (y-a)^n dy\right|\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

$$=\frac{|\lambda|^{n+1}M^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

于是(8.13)得以证明. 取自然数 n, 使得

$$\alpha=|\lambda|^n M^n(b-a)^n/n!<1$$

那末

$$\|B^n\varphi_1-B^n\varphi_2\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|B^n\varphi_1(x)-B^n\varphi_2(x)|\leqslant\alpha\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

利用定理 2 就知道, 方程(8.11)在 $C[a,b]$ 中有唯一的解. 证毕.

下面我们写出利用定理 1 中的逐次逼近法求解积分方程(8.10)的过程.

取 $x_0=\varphi_0(s)\equiv 0$, 作 $\varphi_n=K^n\varphi_0(s)$, 容易算出

$$\varphi_1(s)=f(s)$$

$$\varphi_2(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)f(t)\,dt$$

$$\varphi_3(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)f(t)\,dt$$

$$+\lambda^2\int_a^b K(s,t)\left[\int_a^b K(t,t_1)f(t_1)\,dt_1\right]dt$$

置 $K_2(s,t_1)=\int_a^b K(s,t)K(t,t_1)\,dt$, 则

$$\varphi_3(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)f(t)\,dt+\lambda^2\int_a^b K_2(s,t)f(t)\,dt$$

一般地有

$$\varphi_{n+1}(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)f(t)dt+\lambda^2\int_a^b K_2(s,t)f(t)dt$$

$$+\cdots+\lambda^n\int_a^b K_n(s,t)f(t)dt$$

这里的$K_n(s,t)$由下面的递推关系确定：

$$K_1(s,t)=K(s,t),\ K_n(s,t)=\int_a^b K(s,u)K_{n-1}(u,t)du$$

这一列函数$\{\varphi_n(s)\}$是$[a,b]$上的连续函数，并且在$[a,b]$上均匀收敛于解$\varphi^*(s)$．又对于给定的正数e，只要取n使得

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|\varphi_1-\varphi_0\|=\frac{[|\lambda|M]^n}{1-|\lambda|M}\max_{a\leqslant s\leqslant b}|f(s)|<e$$

就可以由(8.7)得到

$$\|\varphi_n-\varphi^*\|=\max_{a\leqslant s\leqslant b}|\varphi_n(s)-\varphi^*(s)|<e$$

即积分方程的第n次逼近解φ_n的误差小于e．

习　题

1．设F是n维欧几里得空间E^n中的有界闭集，A是F到自身中的映照并且适合如下条件：对于任何x、$y\in F$，有

$$\rho(Ax,Ay)<\rho(x,y)$$

求证：映照A在F中存在唯一的不动点．对于不闭的有界集这个事实能否成立？

2．设R为完备度量空间，A是R到R中的映照，记

$$\alpha_n=\sup_{x\neq x'}\frac{\rho(A^nx,A^nx')}{\rho(x,x')}$$

(i)　若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n<\infty$，则对任何一个初值$x_0$，迭代程序$\{A^nx_0\}$必收敛于映照$A$的唯一不动点，并求出第$n$次近似解与准确解$Ax=x$的逼近程度．

(ii)　若$\inf_n\alpha_n<1$，则A有唯一的不动点．并给出一种收敛于准确解$Ax=x$的迭代程序以及n次近似解与准确解的逼近度．

3．设a_{jk}，j、$k=1,2,\cdots,n$为一组实数，适合条件

$$\sum_{j,k=1}^{n}(\alpha_{jk}-\delta_{jk})^2<1$$

其中 δ_{jk} 当 $j=k$ 时为 1，否则为 0．那末代数方程组

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

对任何一组固定的 b_1、b_2、…，b_n，必有唯一的解 x_1、…、x_n．给出迭代程序以及 n 次近似解与准确解的逼近度．

4．写出，并且利用不动点原理证明，关于方程组

$$\frac{dy_\nu}{dx}=f_\nu(x, y_1, \cdots, y_n), \nu=1, 2, \cdots, n$$

的解的存在性与唯一性定理．

5．在定理 3 的假设下，证明方程(8.10)的解为

$$\varphi(s)=f(s)+\int_a^b K_\lambda(s, t)f(t)dt$$

这里 $K_\lambda(s, t)$ 为如下的连续函数：

$$K_\lambda(s, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_a^b\cdots\int_a^b K(s, t_1)K(t_1, t_2)\cdots K(t_{n-1}, t)dt_1\cdots dt_{n-1}$$

6．设 $f(x)$ 为 $0<x<\infty$ 上的连续函数，用定理 4 证明方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^x e^{x-s}\varphi(s)ds+f(x)$$

具有唯一的连续函数解：

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x e^{(\lambda+1)(x-s)}f(s)ds$$

7．设函数 $K(x,s)$ 为

$$K(x, s)=\begin{cases}x & (0\leqslant x\leqslant s)\\ s & (s\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}$$

求出方程

$$\varphi(x)-\frac{1}{10}\int_0^1 K(x, s)\varphi(s)ds=1$$

的近似的连续函数解，其误差要不超过 10^{-4}．

8．证明：对于定理 2 的 B 及 n 以及在 R 中任一点 x_0 有

$$\rho(x^*, B^m x_0) \leqslant c\frac{\alpha^{\left[\frac{m}{n}\right]}}{1-\alpha}$$

这里 $c=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}\rho(B^k x_0, B^{n+k}x_0)$，$\left[\frac{m}{n}\right]$表示$\frac{m}{n}$的整数部分.

9. 设从完备度量空间R到R的映照T满足如下条件：在开球$O(x_0, r)$ $(r>0)$内适合

$$\rho(Tx, Tx')<\theta\rho(x, x'), 0<\theta<1$$

并且

$$\rho(x_0, Tx_0)\leqslant\alpha r$$

证明(i)当$\alpha<1-\theta$时，T在$O(x_0, r)$内必有不动点，并且唯一. (ii)当$\alpha\leqslant1-\theta$时，如果T在闭球$S(x_0, r)$上连续，则T在$S(x_0, r)$内必有不动点，并且唯一.

§9 致 密 集

1. 致密集的概念 第一章中曾在实数直线上证明过 Weierstrass 定理：任一有界点列必有收敛子列. 数学分析中一些重要定理(例如$[a, b]$上连续函数必可取到最大值、最小值以及最大值和最小值之间的一切值)的证明要用到它. 然而对于一般的度量空间，有界点列却未必含有收敛的子列.

例1 在闭区间$[0, 1]$上作连续函数列$A=\{f_n(x)\}$，$n=1, 2, \cdots$，其中

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x\geqslant\frac{1}{n}\\ 1-nx, & x\leqslant\frac{1}{n}\end{cases}$$

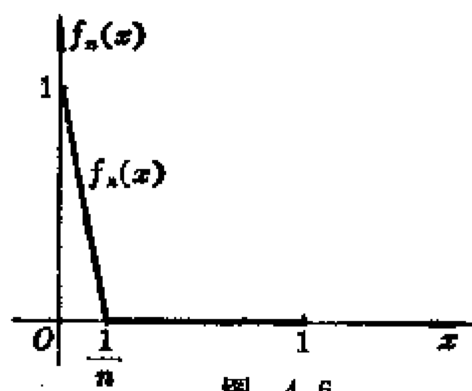


图 4.6

显然，作为度量空间$C[0, 1]$中的序列，因为

$$\|f_n\|=\max_{0\leqslant x\leqslant1}|f_n(x)|\leqslant1, \quad n=1, 2, \cdots$$

所以$\{f_n\}$是$C[0, 1]$中有界序列，但不可能有子序列在$C[0, 1]$中收

敛．事实上，如果$\{f_{n_k}(x)\}$在$C[0,1]$中按范数收敛于$f(x)$，应有

$$f(x)=\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)=\begin{cases}1, & x=0\\0, & x\neq 0\end{cases}$$

这和$f(x)$应在$x=0$具有连续性矛盾（这也顺便证明了A是闭集，因为它没有极限点）．所以 Weierstrass 定理在度量空间$C[0,1]$中不成立．

因此，在一般的度量空间中，不是每一个有界点列都有收敛子点列．这就有必要引入下述致密集的概念．

定义 设R是度量空间，A是R中的集．如果A中的任何点列必有在R中收敛的子点列，就称A是（R中的）**致密集**（或称做**列紧集**）．如果R自身是致密集，就称R是**致密空间**（或**列紧空间**）．

容易看出致密集有下面的几点性质：

1° 有限点集是致密集．

2° 有限个致密集的和集是致密集．

3° 致密集的任何子集是致密集，因此，任意一族致密集的交集是致密集．

4° 致密集的闭包是致密集．

事实上，设A是致密集，任意取一列$\{x_n\}\subset\bar{A}$，那末对每个n，有$y_n\in A$使得$\rho(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$．因为$A$是致密的，有点$y\in R$及子列$\{y_{n_k}\}$，使得$y_{n_k}\to y(k\to\infty)$．所以$x_{n_k}\to y$．因此$\bar{A}$是致密的．

5° 致密集中的基本点列必然收敛，致密的度量空间是完备的．

事实上，如果$\{x_n\}$是致密集A中的基本点列，那末必有子点列$\{x_{n_k}\}$收敛于度量空间R中的一点x_0．根据§7引理1之(ii)，有$x_n\to x_0$．

现在我们先在n维欧几里得空间E^n中证明 Weierstrass 定理，它是直线上相应的定理的拓广．

定理1 n维欧几里得空间E^n中的有界集必是致密集.

证 设$\{x_n\}$是A的任一点列，如$\{x_n\}$作为点集是有限集，显然，$\{x_n\}$必有收敛子序列. 因此不妨设$\{x_n\}$作为一个集，它是无限集，记为A_1. 如能证明"E^n中任一有界无限集必有极限点". 那末立即就可得到：必有$x_0\in A'_1$. 从而根据§4引理2，存在A_1中一列点$\{y_k\}$收敛于x_0，记$y_k=x_{n_k}$，显然可以做到$n_k<n_{k+1}$，(必要时，用$\{y_k\}$的子序列代替$\{y_k\}$即可)，即子序列$\{x_{n_k}\}$是收敛的. 因之我们只要证：E^n中任一有界无限点集至少有一个极限点.

为此，我们称E^n中的点集

$$I=\left\{x\,\Big|\,|x^i-x_0^i|\leqslant\frac{a}{2},\ i=1,2,\cdots,n,\ a>0\right\}$$

为n维立方体，这里$x=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$，$x_0=(x_0^1,\cdots,x_0^n)$. 点x_0称为立方体I的中心，a是它的边长. 立方体I是E^n中的闭集. 容易看到，任一有界集A必含在某个(n维)立方体I中，即有$I\supset A$.

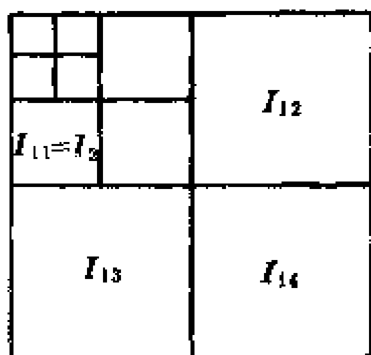


图 4.7

设有界无限点集A含在边长为a的n维立方体I_1之内. 将I_1等分为$m=2^n$个n维立方体I_{11}、I_{12}、$\cdots$、I_{1m}，图4.7是二维的情况. 由于A是无限集，必有某个I_{1k}与A的通集$A\cap I_{1k}$是无限集. 记这个I_{1k}为I_2. 同样等分I_2为m个n维立方体I_{21}、I_{22}、$\cdots$、I_{2m}，同样有一个$I_{2k}=I_3$与A的通有无限多个点. 如此继续下去，得到一列n维立方体：

$$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_k\supset\cdots\cdots$$

每个I_k与A的通集中含有无限多个点，而且包含在一个半径为$\frac{\sqrt{n}\,a}{2^{k+1}}$的闭球中. 当$k\to\infty$时，半径趋于零. 因此，交集

$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$（这是一个闭集）中必含有一点 x_0，而且只有这一点（见§7 引理2）. 对于 x_0 的任何 ε-环境 $O(x_0, \varepsilon)$，只要 k 充分大，便有 $I_k \subset O(x_0, \varepsilon)$. 又由于 $A \cap I_k \subset A \cap O(x_0, \varepsilon)$，所以 $A \cap O(x_0, \varepsilon)$ 中含有无限多个点，即 x_0 是 A 的极限点. 证毕.

2. 致密集和完全有界集

E^n 中有界集 A 为什么成为致密的？定理1的证明过程清楚地表明主要依靠下列两点：(i)对任何 $\varepsilon_n > 0$，A 总是分布在有限个半径不超过 ε_n 的小正方体中；(ii)选出一串一个包含一个正方体序列（半径趋于零）后，再用 E^n 的完备性就得到收敛（完备性保证极限存在）子序列. 在一般度量空间中讨论致密性时，如果暂时撇开空间的完备性，那末由(i)启发我们有必要引入如下概念.

定义　设 A 是度量空间 R 中点集，B 是 A 的子集. 如果有正数 ε，使得以 B 中各点为心，以 ε 为半径的开球全体覆盖 A，即

$$\bigcup_{x \in B} O(x, \varepsilon) \supset A$$

那末称 B 是 A 的 **ε-网**. 如果对任何 $\varepsilon > 0$，集 A 总有有限的 ε-网 $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset A$（点的个数 n 可以随 ε 而变），那末称 A 是**完全有界的集**

显然，度量空间中集 A 的有限 ε-网概念正是定理1中有限个半径不超过 ε_n 的正方体复盖 A 的抽象. 由定理1就启发我们得到如下的度量空间中的定理.

定理2　集 A 是度量空间 R 中完全有界集的充要条件是 A 中任何一个点列 $\{x_n\}$ 必有一个基本的子点列.

证　必要性　设 $\{y_\nu\} \subset A$，因为 A 完全有界，所以存在 A 的有限的 $\frac{1}{n}$-网 $\{x_1^{(n)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)}\}$，$n = 1, 2, \cdots$. 因为 $\bigcup_{\nu} O(x_\nu^{(1)}, 1) \supset \{y_\nu\}$，

从而

$$O(x_1^{(1)}, 1), \cdots, O(x_{l_1}^{(1)}, 1)$$

之中的一个球——设为 $O(x_{m_1}^{(1)}, 1)$——含有$\{y_\nu\}$中的无限多项. 又因为

$$\bigcup_\nu O\left(x_\nu^{(2)}, \frac{1}{2}\right) \supset \{y_\nu\}$$

所以

$$O(x_{m_1}^{(1)}, 1) \cap \bigcup_\nu O\left(x_\nu^{(2)}, \frac{1}{2}\right)$$

中包含$\{y_\nu\}$中的无限多项. 因此, 有限个通集

$$O(x_{m_1}^{(1)}, 1) \cap O\left(x_\nu^{(2)}, \frac{1}{2}\right), \ \nu = 1, 2, \cdots, k_2$$

之中必有一个——设为 $O(x_{m_1}^{(1)}, 1) \cap O\left(x_{m_2}^{(2)}, \frac{1}{2}\right)$——含有$\{y_\nu\}$中的无限项. 这样继续下去, 对每个自然数 n, 有集

$$\bigcap_{\mu=1}^{n} O\left(x_{m_\mu}^{(\mu)}, \frac{1}{\mu}\right)$$

含有$\{y_\nu\}$中的无限项. 所以可以取子列$\{y_{k_n}\}$, 使得

$$y_{k_n} \in \bigcap_{\mu=1}^{n} O\left(x_{m_\mu}^{(\mu)}, \frac{1}{\mu}\right)$$

并且 $k_n < k_{n+1}$, 那末当 $\mu \leqslant n$ 时

$$\rho(y_{k_n}, x_{m_\mu}^{(\mu)}) < \frac{1}{\mu}$$

因此, 当 $\mu \leqslant n$ 时

$$\rho(y_{k_\mu}, y_{k_n}) \leqslant \rho(y_{k_\mu}, x_{m_\mu}^{(\mu)}) + \rho(y_{k_n}, x_{m_\mu}^{(\mu)}) < \frac{2}{\mu}$$

所以$\{y_{k_n}\}$是 R 中的基本的子点列.

充分性 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 从 A 中取一点 x_1, 如果 $O(x_1, \varepsilon)$

$\supset A$，那末定理已证得．如果不对，就有 $x_2 \in A-O(x_1, \varepsilon)$，因而 $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$．如果 $O(x_1, \varepsilon) \cup O(x_2, \varepsilon) \supset A$，也就不需要再做什么了．不然，就应有 $x_3 \in A-(O(x_1, \varepsilon) \cup O(x_2, \varepsilon))$，并且 $\min(\rho(x_1, x_3), \rho(x_2, x_3)) \geqslant \varepsilon$．如此继续下去，若进行了 n 次，得到 x_1、$\cdots$、x_n，它们适合 $\min\limits_{1 \leqslant \nu < \mu \leqslant n} \rho(x_\nu, x_\mu) \geqslant \varepsilon$，并且

$$\bigcup_{k=1}^{n} O(x_k, \varepsilon) \supset A$$

那末定理已经证得．不然一直进行下去，就从 A 中找到无限点列 $\{x_n\}$，适合

$$\rho(x_\nu, x_\mu) \geqslant \varepsilon, \quad \nu \neq \mu$$

这种点列显然不能含有基本子点列，这和假设相冲突．因此，对任何 $\varepsilon > 0$，A 必有有限 ε-网，即 A 是完全有界的．证毕．

下面是完全有界集和致密集关系的定理．

定理 3 (Hausdorff)　(i) 度量空间中致密集必是完全有界集；(ii) 在完备度量空间中，完全有界集必是致密集．

证　(i) 如果 A 是度量空间 R 中致密集，根据致密集的定义，任何点列 $\{x_n\} \subset A$，必有收敛子点列，自然必有基本的子点列，所以 A 是完全有界的．

(ii) 设 A 是度量空间 R 中完全有界集，对任何点列 $\{x_n\} \subset R$，根据定理 2，必有子点列 $\{x_{n_k}\}$ 是基本的，但 R 是完备的，所以 $\{x_{n_k}\}$ 是收敛的子点列，因而 A 是致密集．证毕．

系　完全有界集必是有界集，因而致密集必是有界集．

证　取 $\varepsilon=1$，设 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 是完全有界集 A 的有限 1-网，那末 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} O(x_k, 1) \supset A$．因此，对每个 $x \in A$，必有 x_ν，使得 $\rho(x, x_\nu) < 1$．所以对一切 x，

$$\rho(x, x_1) \leqslant \rho(x, x_\nu) + \rho(x_\nu, x_1) \leqslant 1 + \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \rho(x_\nu, x_1)$$

因此 A 是有界集. 根据定理 3 的(i), 致密集必是有界集. 证毕.

本节的例 1 也说明度量空间中有界集并不就是完全有界集. 一般说来, 完全有界性强于有界性.

另外, 定理 3 中的(ii)的完备性条件是不能除去的, 不但如此, 而且更进一步有

定理 4 设 R 是度量空间, 如果 R 中每个完全有界集都是致密集, 那末 R 必是完备的.

证 设 $\{x_n\}$ 是 R 中基本点列, 于是对任何 $\varepsilon>0$, 必有自然数 N, 使得 $n, m \geqslant N$ 时, $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. 因此 $\{x_1, \cdots, x_N\}$ 就组成集 $\{x_\nu | \nu = 1, 2, \cdots\}$ 的有限 ε-网, 即作为集 $\{x_n\}$ 是完全有界的. 由假设 $\{x_n\}$ 是致密集, 从致密集的性质 5°, $\{x_n\}$ 是收敛的基本点列, 即存在 $x_0 \in R$, 使得 $x_n \to x_0$. 证毕.

定理 5 完全有界集是可析的, 即其中含有有限的或可列的稠密子集.

证 设 A 是完全有界集, 令 $\{x_1^{(n)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)}\}$ 是 A 的有限 $\frac{1}{n}$- 网 $(n = 1, 2, \cdots)$, 那末集

$$B = \{x_\nu^{(n)}, \nu = 1, 2, \cdots, k_n, n = 1, 2, \cdots\}$$

是有限集或可列集. 只要证明 B 在 A 中稠密好了. 事实上, 对于 A 中任何一点 x, 及任一正数 ε, 取 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 由于 $A \subset \bigcup_{\nu=1}^{k_n} O\left(x_\nu^{(n)}, \frac{1}{n}\right)$, 必有 ν 使得 $x \in O\left(x_\nu^{(n)}, \frac{1}{n}\right)$ 即 $\rho(x, x_\nu^{(n)}) < \frac{1}{n} < \varepsilon$. 因此 $x_\nu^{(n)} \in B \cap O(x, \varepsilon)$. 所以 B 在 A 中稠密. 证毕.

由于致密集是完全有界的, 我们得到下述推论:

系 致密集是可析的.

3. 某些具体空间中致密点集的特征　从定理 3 知道，在完备的度量空间中致密性与完全有界性是一致的. 下面我们就在某些具体的完备空间中给出点集是完全有界集的充要条件. 我们总是设法把问题引导到有限维欧几里得空间. 因为在有限维空间中完全有界和有界性是一致的，而有界的条件较易掌握. 我们只以 $C[a,b]$ 及 l^p 为例来说明处理这类问题的基本方法，其余的空间如 l^∞、c 空间中点集是致密集的条件都可以类似地给出.

设 A 是 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的一族连续函数，$A\subset C[a,b]$. 若对任何一个正数 ε，有 $\delta>0$，使得对于区间 $[a,b]$ 中任何两点 $x,x'\in[a,b]$，当 $|x-x'|<\delta$ 时，对 A 中每个函数 f 都成立着

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

(即 δ 不依赖于 A 中个别的 f)，那末称 A 是**等度连续的**函数族.

"等度"的意思是族 A 中各个函数的连续程度是同等的.

例如，设 L 和 α 是两个正数，A 是在 $[a,b]$ 上适合 Hölder 连续性条件:

$$|f(x)-f(x')|\leqslant L|x-x'|^\alpha,\quad x,x'\in[a,b]$$

的函数 f 所成的函数族时，A 是等度连续的函数族.

前已指出，度量空间 $C[a,b]$ 中点集的有界性不足以推出致密性，但是，只要再加上等度连续性的条件就行了.

定理 6 (Arzela-Ascoli)　$C[a,b]$ 中有界的等度连续函数族必是致密集.

证　设 A 是 $C[a,b]$ 中的有界点集同时又是等度连续的，因为 $C[a,b]$ 是完备空间，由定理 3，只须证明 A 是完全有界的. 对任意给定的正数 ε，由 A 的等度连续性，有正数 δ，使得当 $[a,b]$ 中的点 x、x' 适合 $|x-x'|<\delta$ 时，A 中每个 f 必适合

$$|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{3}\tag{9.1}$$

利用这个 δ，任意取定$[a, b]$中的有限个分点

$$a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

使得 $|x_\nu-x_{\nu-1}|<\delta$. 因为 A 是有界集，有常数 $K>0$ 使得对每个 $f\in A$，$\|f\|=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\leqslant K$，因此，点集

$$\tilde{A}=\{(f(x_1),\cdots,f(x_n))\,|\,f\in A\}$$

组成 n 维欧几里得空间 E^n 中的有界集$\left(\sqrt{\sum\limits_{\nu=1}^{n}|f(x_\nu)|^2}\leqslant nK\right)$.

由定理 1 和定理 3，$\tilde{A}$ 是完全有界的，所以有 f_1、f_2、$\cdots$、$f_k\in A$，使得 k 个点

$$(f_\nu(x_1),f_\nu(x_2),\cdots,f_\nu(x_n)),\ \nu=1,\cdots,k$$

组成 $\tilde{A}$ 中的 $\frac{\varepsilon}{3}$-网. 现在来证明$\{f_1,f_2,\cdots,f_k\}$是 A 的 ε-网就行了. 事实上，任取 $f\in A$，由$(f(x_1),\cdots,f(x_n))\in\tilde{A}$，所以有 $1,2,\cdots,k$ 中的 ν 使

$$\sqrt{\sum_{\mu=1}^{n}|f_\nu(x_\mu)-f(x_\mu)|^2}<\frac{\varepsilon}{3}$$

所以$|f(x_\mu)-f_\nu(x_\mu)|<\frac{\varepsilon}{3}$，$\mu=1,2,\cdots,n$. 对于$[a,b]$中的点 x，设 x 落在子区间$[x_r,x_{r+1}]$上，由不等式(9.1)得到

$$\begin{aligned}|f(x)-f_\nu(x)|\leqslant&|f(x)-f(x_r)|+|f(x_r)-f_\nu(x_r)|\\&+|f_\nu(x_r)-f_\nu(x)|<\varepsilon\end{aligned}$$

因此，$\rho(f,f_\nu)=\|f-f_\nu\|<\varepsilon$，即 $f\in O(f_\nu,\varepsilon)$. 证毕.

如果用函数列的均匀收敛的概念来叙述，定理 6 就是说：$[a,b]$上一致有界而且具有等度连续性的连续函数族 A 中，任一无限序列必有在$[a,b]$上均匀收敛的子序列.

定理 6 中所加的“等度连续性”的条件是必要的，即定理 6 的逆也成定理.

定理 7 $C[a,b]$中的致密集必是等度连续的有界集.

证 设$A\subset C[a,b]$是致密集. 致密集是有界的. 现在只须证明A是等度连续的. 对任意的$\varepsilon>0$,必有A的有限$\frac{\varepsilon}{3}$-网f_1、f_2、$\cdots$、f_k. 因为每个$f_\nu(x)$在$[a,b]$上连续, 所以有正数$\delta_\nu(\nu=1,2,\cdots,k)$使得$[a,b]$上的$x,x'$,当$|x-x'|<\delta_\nu$时, $|f_\nu(x)-f_\nu(x')|<\frac{\varepsilon}{3}$,取$\delta=\min\{\delta_1,\cdots,\delta_k\}$. 我们证明:对每个$f\in A$,只要$[a,b]$中的两点$x$、$x'$适合$|x-x'|<\delta$,便有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

事实上,对于$f\in A$, 有ν, $1\leqslant\nu\leqslant k$, 使得$\rho(f,f_\nu)<\frac{\varepsilon}{3}$,因此

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x')|\leqslant&|f(x)-f_\nu(x)|+|f_\nu(x)-f_\nu(x')|\\&+|f_\nu(x')-f(x')|<\varepsilon\end{aligned}$$

即A是等度连续的. 证毕.

再来考察空间$l^p(p\geqslant1)$作为数列空间的例.

定理 8 空间l^p中的集A成为致密集的充要条件是A为有界集而且对任何正数ε,有自然数n_ε,使得对一切$x=\{x_\nu\}\in A$成立着

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon+1}^{\infty}|x_\nu|^p<\varepsilon \tag{9.2}$$

证 因l^p是完备空间, 设A是有界集而且适合条件(9.2), 只要证明A是完全有界的. 对任一$\eta>0$, 取$\varepsilon=\min\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\eta}{2}\right)^p,1\right)$, 那末有$N=n_\varepsilon>0$使(9.2)成立. 作

$$\tilde{A}=\{(x_1,\cdots,x_N)\,|\,x=\{x_1,\cdots,x_n,\cdots\}\in A\}$$

由于A是有界集,有K使得当$x\in A$时,$\|x\|_p^p=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu|^p\leqslant K^p$.因此

$|x_\nu|\leqslant K$，所以 $\sqrt{\sum_{\nu=1}^{N}|x_\nu|^2}\leqslant NK$. 因此 $\tilde{A}$ 是 N 维欧几里得空间 E^N 中的有界集，因而是致密的. 于是有 $x^{(k)}\in A$，$k=1,2,\cdots,l$ 使得

$$(x_1^{(k)},\cdots,x_N^{(k)}),\ k=1,2,\cdots,l$$

成为 $\tilde{A}$ 的 $\frac{\varepsilon}{N}$-网. 现在来证明 $x^{(1)}$、$\cdots$、$x^{(l)}$ 是 A 的 η-网. 事实上，对任何一个 $x\in A$，必有 $k\leqslant l$ 使 $(x_1,x_2,\cdots,x_N)\in O\left((x_1^{(k)},\cdots,x_N^{(k)}),\frac{\varepsilon}{N}\right)$，即

$$\sqrt{\sum_{\nu=1}^{N}|x_\nu-x_\nu^{(k)}|^2}<\frac{\varepsilon}{N}$$

因此 $|x_\nu-x_\nu^{(k)}|<\frac{\varepsilon}{N}$，而且

$$\|x-x^{(k)}\|_p<\left(N\frac{\varepsilon^p}{N^p}+2^p2\varepsilon\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\eta$$

所以 $x\in O(x^{(k)},\eta)$.

反过来，设 A 是完全有界集. 只要证明(9.2)成立好了. 这时对任何正数 ε，必有有限的 $\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}}$-网 $\{x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(N)}\}$. 因此必有自然数 n，使得对每个 $\nu=1,2,\cdots,N$ 成立着

$$\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty}|x_k^{(\nu)}|^p<\frac{\varepsilon}{2^p}$$

其中 $x^{(\nu)}=\{x_k^{(\nu)}\}$. 由 Minkowski 不等式，对每个 $x=\{x_\nu\}\in A$，有

$$\sqrt[p]{\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty}|x_k|^p}\leqslant\sqrt[p]{\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty}|x_k^{(\nu)}|^p}+\sqrt[p]{\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty}|x_k^{(\nu)}-x_k|^p}$$

$$<\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}}+\|x-x^{(\nu)}\|_p$$

但因为 $x^{(1)}$、…、$x^{(N)}$ 是 A 的 $\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{p}}$-网，所以有 ν 使上式右边小于 $\varepsilon^{\frac{1}{p}}$. 证毕.

条件(9.2)对应于 $C[a, b]$ 中的等度连续性，可以称做"等度收敛".

4. 紧集　我们知道在实数直线上，和 Weierstrass 定理等价的是对闭区间成立着 Heine-Borel 覆盖定理. 利用它们还可以证明闭区间上连续函数的基本性质，如最大值定理和均匀连续性定理等等. 只要仔细考察一下这些定理的证明，就可以发现，我们可以把这些定理推广到直线上的致密(即有界)闭集. 因此，在极限论中致密闭集有较好的性质. 这对于一般的度量空间也是如此.

定义　度量空间中的致密闭集，称做**紧集**.

显然，A 是紧集的充要条件是: A 中任一点列必有收敛子点列收敛到 A 中的一点. 对于全空间来说，致密的概念和紧集的概念没有区别，致密的度量空间又称做**紧(度量)空间**.

下面我们给出紧集的一些基本性质. 首先，度量空间 R 中的紧集 A 看成 R 的子空间时是完备的.

事实上，由致密集的性质 5°，紧集 A 中任意的基本点列 $\{x_n\}$ 必收敛，设 $x_n \to x_0$. 由于 A 是闭集，所以 $x_0 \in A$，就是说 A 中每个基本点列必收敛到 A 中的点，所以 A 是完备的子空间.

下面我们把直线上的 Heine-Borel 有限覆盖定理拓广到一般的度量空间，进而推出紧集的特征性质.

定理 9 (Gross)　设 A 是度量空间 R 中的紧集，$\mathscr{G}$ 是 R 中的一族开集. 如果 $\mathscr{G}$ 覆盖 A: 即 $\bigcup_{O \in \mathscr{G}} O \supset A$，那末必有 $\mathscr{G}$ 中的有限个开集 O_1、O_2、…、O_n 覆盖 A:

$$\bigcup_{k=1}^{n} O_k \supset A$$

证 对 A 中的每个点 x，必有$\mathscr{G}$中的开集 O 含有 x，因此有 x 的一个 ρ-环境 $O(x,\rho)\subset O$. 记 $\rho(x)$为使得 $O(x,\rho)$含在$\mathscr{G}$中某个开集之中的这种 ρ 的上确界，那末 $\rho(x)>0$. 今证明

$$\inf_{x\in A}\rho(x)=\rho_0>0$$

由下确界的定义，显然有 A 中的点列$\{a_n\}$使得 $\rho(a_n)\to\rho_0$. 由于 A 是致密的闭集，$\{a_n\}$中必有子列$\{a_{n_k}\}$收敛于 A 中的一点 a_0. 因$\mathscr{G}$覆盖 A，必有开集 $O\in\mathscr{G}$，使得 $a_0\in O$. 因此有正数 ρ 使得 $O(a_0,\rho)\subset O$. 由于 $a_{n_k}\to a_0$，当 k 充分大时，例如当 $k\geqslant k_0$ 时，$\rho(a_0,a_{n_k})<\frac{\rho}{2}$. 因此，$O\left(a_{n_k},\frac{\rho}{2}\right)\subset O(a_0,\rho)\subset O$. 这样一来，当 $k\geqslant k_0$ 时有 $\rho(a_{n_k})>\frac{\rho}{2}$. 所以 $\rho_0\geqslant\frac{\rho}{2}>0$. 称正数 ρ_0 为紧集 A 的勒贝格数.

因为 A 是致密集，由定理 3, A 中必有有限个点$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$组成 A 的$\frac{1}{2}\rho_0$-网，这里 ρ_0 是 A 的勒贝格数. 由于 $\rho_0=\inf\limits_{x\in A}\rho(x)$，所以 $\rho(x_\nu)\geqslant\rho_0(\nu=1,2,\cdots,n)$，从而 $\rho(x_\nu)>\frac{1}{2}\rho_0$. 由 $\rho(x_\nu)$的定义，必有$\mathscr{G}$中的一个开集 $O_\nu\supset O\left(x_\nu,\frac{1}{2}\rho_0\right)$，因此

$$\bigcup_{\nu=1}^{n}O_\nu\supset\bigcup_{\nu=1}^{n}O\left(x_\nu,\frac{1}{2}\rho_0\right)\supset A$$

定理证毕.

这个定理也称为有限覆盖定理. 它的逆命题也正确.

定理 10 设 A 是度量空间 R 中的点集，如果 R 中每个覆盖 A 的开集族中必有有限个开集覆盖 A，那末 A 是紧集.

证 (反证法)如果 A 不是致密集或闭集，那末 A 中必有一列互不相同的点$\{x_\nu\}$，它不含有收敛子点列或它收敛于 y，但 $y\bar{\in}A$.

在不含有收敛子点列情况下，作集 $C=\{x_\nu\}$；用 (a) 表示仅含一个点 a 的集，在 $\{x_\nu\}$ 收敛于 y 的情况下，作集 $C=\{x_\nu\}\cup(y)$. 显然，在任何情况下，C 是 R 中闭集. 同理，对任何 $\nu=1,2,\cdots$，集 $C-(x_\nu)$ 是闭集. 因此余集 $G_\nu=(x_\nu)\cup(R-C)$ 是开集. 又显然有 $R-C\supset A-\{x_\nu\}$，所以

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty}G_\nu=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}[(x_\nu)\cup(R-C)]\supset A$$

即 $\{G_\nu\}$ 是 A 的开覆盖. 由假设，应有自然数 n，使得 $\bigcup\limits_{\nu=1}^{n}G_\nu\supset A$. 但是

$$\bigcup_{\nu=1}^{n}G_\nu=\{x_1,\cdots,x_n\}\cup(R-C)$$

所以 $x_{n+1}\overline{\in}\bigcup\limits_{\nu=1}^{n}G_\nu$. 这是矛盾，因此 A 是紧集. 证毕.

根据定理 9、10，我们可以给出度量空间中紧集的另一个定义：设 A 是度量空间 R 中的子集，如果 R 中每个覆盖 A 的开集族中必可选出有限个开集覆盖 A，那末称 A 是紧集.

5. 紧集上的连续映照 我们现在把闭区间上的连续函数的基本性质拓广到度量空间的紧集上来.

定理 11 设 D 是紧集，f 是 D 上的连续映照，那末 D 的象 $E=f(D)$ 也是紧集.

证 设 $\{y_n\}$ 是 E 中的一列点，相应地有 D 中的点列 $\{x_n\}$ 使得 $y_n=f(x_n)$，$n=1,2,\cdots$. 因为 D 是紧集，所以 $\{x_n\}$ 含有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，并且 $x_{n_k}\to x_0\in D$. 由于 f 在 x_0 处连续，所以 $f(x_0)=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_k}$. 因此，$E$ 是致密集. 显然 $f(x_0)=y_0\in E$. 所以 E 是闭集. 证毕.

定理 11 的证明也常用下面的方法：设 $\mathscr{G}$ 是 $f(D)$ 的一个开覆

盖，对任何 $O\in\mathscr{G}$，因为 f 是连续的，所以 $f^{-1}(O)=G$ 是开集．显然，$\mathscr{G}_1=\{G\mid f^{-1}(O)=G, O\in\mathscr{G}\}$ 是 D 的开覆盖，因此存在有限个 G_1、$\cdots$、G_n，$\bigcup_{\nu=1}^{n} G_\nu\supset D$，从而 $\bigcup_{\nu=1}^{n} O_\nu\supset f(D)$，其中 $O_\nu=f(G_\nu)$．这就是说 $f(D)$ 是紧集．

从定理 11 的第一个证明的过程可以看到成立着下面的

系 1 度量空间 R 上的连续映照必然把致密集映照成致密集．

系 2 度量空间 R 中的紧集 D 上的连续函数 f 必然有界，而且上、下确界可达．

证 由于 $f(D)$ 是实数直线上的紧集，所以 $f(D)$ 是有界的，即有常数 K，使得 $|f(x)|\leqslant K, x\in D$．又因为 $f(D)$ 是有界闭集，$f(D)$ 的上确界 y_1 及下确界 y_0 也在 $f(D)$ 中，于是在 D 中有 x_0、x_1 使得 $f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1$．证毕．

系 3 紧集上的一对一的连续映照必是拓扑映照．

证 设 f 是紧集 D 到 E 上的一对一的连续映照，要证明逆映照 f^{-1} 是连续的．事实上，只要证明 f^{-1} 的逆映照 f 把 D 的任何闭子集 A 映照成闭集好了．因为 D 是紧集，所以闭子集 A 也是紧集．因此 $f(A)$ 也是紧集．f^{-1} 和 f 一样是连续映照，所以 f 是拓扑映照．证毕．

我们可以仿照闭区间上的函数那样定义度量空间中函数的均匀连续性，可以证明，紧集上的连续映照具有均匀连续性．也可以象在闭区间上一样地定义等度连续函数族，并且把 Arzela-Ascoli 定理拓广到度量空间中的紧集上去．这些证明几乎和在闭区间上的一模一样，我们这里予以从略，读者可以把它们一一写出，那将是很好的练习．

6. 有限维赋范线性空间 我们现在要讨论有限维的赋范线

性空间(又称做 Minkowski 空间).

定理 12 设 B_n 是 n 维的赋范线性空间, e_1、e_2、…、e_n 是 B_n 的一个基, 那末必有正数 c_1、c_2, 使得对于 B_n 中的每个 $x=\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu e_\nu$, 成立着

$$c_2\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2}\leqslant\|x\|\leqslant c_1\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2} \tag{9.3}$$

而且映照 $A:(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu$ 是 n 维欧几里得空间 E^n 到 B_n 的拓扑映照.

证 因为 $x=\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu$, 所以

$$\|x\|\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|\,\|e_\nu\|$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}\|e_\nu\|^2}\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2} \tag{9.4}$$

取 $c_1=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}\|e_\nu\|^2}$, 那末 $c_1>0$, 而且 $\|x\|\leqslant c_1\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2}$.

另一方面, 作 E^n 中的单位球面:

$$S=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2=1\}.$$

考虑 S 上的函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left\|\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu\right\|$$

那末 f 在 S 上处处大于零. 现在证明 f 在 S 上的下确界 c_2:

$$c_2=\inf_S\left\|\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu\right\|>0$$

因为 S 是 E^n 中的有界的闭集，因而是紧集，由定理 11 的系 2，只要证明 f 是连续的，那末 f 在 S 上的下确界 c_2 是 f 在 S 上某点的函数值，这样就能得到 $c_2>0$．由(9.4)

$$\begin{aligned}&|f(x_1,\cdots,x_n)-f(y_1,\cdots,y_n)|\\&=\left|\left\|\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu\right\|-\left\|\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu e_\nu\right\|\right|\\&\leqslant\left\|\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-y_\nu)e_\nu\right\|\leqslant c_1\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu-y_\nu|^2}\end{aligned}$$

所以 f 是 S 上的连续函数，由于 S 上没有零向量，根据范数的唯一性条件得到 $c_2>0$．

对于 E^n 中的非零向量 $x=\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu$，作 $\xi_\nu=\dfrac{x_\nu}{\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2}}$，

$\nu=1,\cdots,n$．那末 $\sum_1^n|\xi_\nu|^2=1$，因此

$$\left\|\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu\right\|\Big/\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2}=f(\xi_1,\cdots,\xi_n)\geqslant c_2$$

所以(9.3)成立．

由(9.3)知道 $\|A\xi-A\eta\|\leqslant c_1\|\xi-\eta\|$，并且

$$\|A^{-1}x-A^{-1}y\|\leqslant\frac{1}{c_2}\|x-y\| \tag{9.5}$$

所以，A 和 A^{-1} 都是连续的映照．又显然 A 是 E^n 到 B_n 上的一一对应，因此 A 是拓扑映照．证毕．

系 1 设在有限维线性空间 B_n 上定义了两个范数 $\|\cdot\|$ 和

$\|\cdot\|_1$，那末必有常数 $M>0$ 及 $K>0$，使得对于任何一点 $\psi\in B_n$ 成立着

$$K\|\psi\|\leqslant\|\psi\|_1\leqslant M\|\psi\|$$

事实上，只要对$\|\cdot\|$及$\|\cdot\|_1$应用(9.3)就行了.

为了说明定理 12 中的结论，我们对一般的线性空间(不一定是有限维)引入如下的概念：

定义 设R是一线性空间，$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是在R上定义的两个范数. 如果存在正数 c_1 和 c_2，使得对于每一点 $x\in R$，有

$$c_1\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant c_2\|x\|_2 \tag{9.6}$$

就称范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是等价的. ①

如果存在正数 c_1、c_2 使得 (9.6) 成立，那末，令 $c_1'=c_2^{-1}$，$c_2'=c_1^{-1}$，便有

$$c_1'\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant c_2'\|x\|_1,\quad x\in R \tag{9.7}$$

所以，如果范数$\|\cdot\|_1$ 和$\|\cdot\|_2$ 等价，那末$\|\cdot\|_2$ 和$\|\cdot\|_1$ 也是等价的.

设在线性空间R上有两个范数$\|\cdot\|_1$ 和$\|\cdot\|_2$，R按这两个范数分别成为赋范空间，记为$(R,\|\cdot\|_1)$和$(R,\|\cdot\|_2)$. 那末，范数$\|\cdot\|_1$ 和$\|\cdot\|_2$ 等价的充要条件是在$(R,\|\cdot\|_1)$与$(R,\|\cdot\|_2)$中点列收敛的概念是一致的，也就是说，$\|x_n-x\|_1\to0$ 与$\|x_n-x\|_2\to0$ 这两件事是等价的.

因此，当$\|\cdot\|_1$ 和$\|\cdot\|_2$ 等价时，$(R,\|\cdot\|_1)$和$(R,\|\cdot\|_2)$是拓扑同构的.

定理 12 的系 1 说明，在有限维线性空间上，任何两个范数都是等价的，任何两个 n 维赋范线性空间都拓扑同构.

系 2 有限维赋范线性空间是完备的.

证 设$\{p_m\}$是有限维赋范线性空间 B_n 中的基本点列，由

---

① 与范数等价有关的有范数强、弱的定义，参见第五章§4的(4.3).

(9.5)有常数 $c_2>0$ 使得

$$\|A^{-1}(p_m-p_l)\|\leqslant\frac{1}{c_2}\|p_m-p_l\|$$

所以$\{A^{-1}p_m\}$是 E^n 中的基本点列,因此有 $q\in E^n$,使得

$$\|A^{-1}p_m-q\|\to 0\quad(m\to\infty)$$

再由(9.3)得到

$$\|Aq-p_m\|\to 0$$

所以 B_n 是完备的. 证毕.

由于度量空间的完备子空间是闭的,所以又得到

系 3 任意赋范线性空间的有限维线性子空间是闭子空间.

从定理 12 又可得到

定理 13 有限维赋范线性空间中任何有界集是致密的.

证 设 B_n 是 n 维的赋范线性空间, 那末 B_n 和 n 维欧几里得空间 E^n 拓扑同构. 记 B_n 到 E^n 的拓扑映照为 f, 那末 f^{-1} 也是拓扑映照. 对于 B_n 中的有界集 A, $f(A)$是 E^n 中的有界集, 由定理 1, $f(A)$是 E^n 中的致密集, 而致密集在连续映照 f^{-1} 下仍是致密的,所以 $f(A)$的原象 A 是 B_n 中的致密集. 证毕.

反过来,我们可以证明:如果在一个赋范线性空间中每个有界集都是致密的,那末这空间必是有限维的.

为此我们先介绍 F. Riesz 的一个引理.

在欧几里得空间中,对任一线性真子空间,必有一单位向量与此子空间的"距离"等于 1. 但对于一般的赋范线性空间, F. Riesz 证明了下面的

引理 1 设 E 是赋范线性空间 R 的闭子空间,并且 $E\neq R$. 那末对于任一 ε ,$0<\varepsilon<1$, 必存在 R 中的单位向量 x_0, $\|x_0\|=1$, 使得

$$\rho(x_0,E)>\varepsilon$$

证 由于 E 是 R 的真子集, 任取一点 $z\in R-E$. 又由于 E 是

闭的，由 § 4 的第 5 小节知道 $\rho(\bar{x}, E)=d>0$（如果 $\rho(\bar{x}, E)=0$，那末 $\bar{x}\in\bar{E}=E$ 了）。因为 $\frac{d}{\varepsilon}>d$，必有 E 中的一点 x' 满足

$$\|\bar{x}-x'\|<\frac{d}{\varepsilon}$$

作 $x_0=\frac{\bar{x}-x'}{\|\bar{x}-x'\|}$，那末 $\|x_0\|=1$。对任何 $x\in E$，因 $x'+\|\bar{x}-x'\|x\in E$，应该有

$$\|\bar{x}-(x'+\|\bar{x}-x'\|x)\|\geqslant d$$

因此

$$\|x_0-x\|=\left\|\frac{\bar{x}-x'}{\|\bar{x}-x'\|}-x\right\|=\frac{1}{\|\bar{x}-x'\|}\|\bar{x}-(x'+\|\bar{x}-x'\|x)\|$$

$$\geqslant\frac{d}{\|\bar{x}-x'\|}$$

于是 $\rho(x_0, E)\geqslant d/(\|\bar{x}-x'\|)>\varepsilon$。引理证毕。

下面的定理指出了有限维空间和无限维空间的一个本质性的差别。

定理 14 如果赋范线性空间 R 是无限维的，那末 R 中必有不致密的有界集。

证 其实单位球 $\|x\|\leqslant 1$ 就不是致密集。在 R 中任取一个单位向量 x_1，$\|x_1\|=1$。令 R_1 表示由 x_1 张成的一维子空间：$R_1=\{x\mid x=\alpha x_1, \alpha \text{ 是数}\}$，于是 $R_1\neq R$。由定理 12 的系 3 知道 R_1 是 R 的闭子空间。由上述 Riesz 的引理，存在 $x_2\in R$，$\|x_2\|=1$，使得 $\rho(x_2, R_1)>\frac{1}{2}$。我们用 R_2 表示由 x_1, x_2 张成的二维子空间，R_2 是 R 的闭子空间并且 $R_2\neq R$。于是又可以对 R_2 应用 Riesz 引理。这样继续做下去，从 R 中选取了一列单位向量 $\{x_k, k=1,2,\cdots\}$，以及一列闭子空间 $\{R_k\}$，$R_k\supset\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$，而且

$$\rho(x_{k+1}, R_k) > \frac{1}{2}, k=1, 2, \cdots$$

因而当 $\mu > \nu$ 时，由于 $x_\nu \in R_{\mu-1}$

$$\|x_\mu - x_\nu\| \geqslant \rho(x_\mu, R_{\mu-1}) > \frac{1}{2}$$

这种点列$\{x_k\}$不可能含有收敛的子序列．所以有界集$\|x\| \leqslant 1$不是致密集．证毕．

7．凸紧集上的不动点定理

勃劳威尔(Brouwer)首先用拓扑学的方法证明了在欧几里得空间中由凸紧集K到K自身的连续映照必然有不动点．这就是Brouwer不动点定理．Schauder后来把它推广到很一般的情况，这里我们只叙述一下在赋范线性空间中的有关结果．

定理15 (Schauder) 设R是赋范线性空间，A是R中的一个凸紧集，f是$A \to A$的一个连续映照，那末必有$x \in A$使得

$$f(x) = x.$$

由于这个定理的证明较为复杂，我们把它略去，参见[4]．这个定理的更一般形式是§10定理1．在第五章§6中将给出这个定理的一个重要应用．不过在那里直接用到的是下面的不动点定理．

定理16 (Schauder) 设X是Banach空间，S是X中的凸闭集，Φ是S到S的连续映照，并且象$\Phi(S)$是致密集，那末在S内必有x，使得$x = \Phi(x)$．

为了利用定理15来证明本定理，还需要用到下面引理．

引理2 设X是Banach空间，A是X中致密集，那末A的凸包$h(A)$必是X中的致密集．

证 由于A是致密的，所以它是有界集，因而存在$r>0$，$A \subset O(0, r)$．因为开球$O(0, r)$是凸集，所以$h(A) \subset O(0, r)$．因而对任何$y \in h(A)$，$\|y\| < r$．

由于 X 是 Banach 空间，要证 $h(A)$ 是致密集，只要证 $h(A)$ 是完全有界集就可以了．下面就来证明这一点．

对任何 $\varepsilon>0$，现在证明集

$$h(A)=\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \mid \alpha_i\geqslant 0,\ x_i\in A,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1,\ i=1,2,\cdots,n,$$
$$n=1,2,\cdots\}$$

有有限 ε-网如下：对任何 $\varepsilon>0$，由于 A 是致密的，所以存在 A 的 $\frac{\varepsilon}{2}$-网，x_1^0、…、x_k^0，$x_i^0\in A$，$i=1,2,\cdots,k$．对任何 $y=\sum_{1}^{n}\alpha_i x_i\in h(A)$，考察 x_1、…、x_n 中所有落入 $O\left(x_1^0,\ \frac{\varepsilon}{2}\right)$ 中的点，不妨设为（必要时可重新编号）x_1、…、x_{l_1}．然后考察 x_{l_1+1}、…、x_n 中所有落入 $O\left(x_2^0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 中的点，不妨设为（必要时可重新编号）x_{l_1+1}、…、x_{l_2}，如此依次考察．记 $\beta_1=\sum_{1}^{l_1}\alpha_i$，$\beta_2=\sum_{l_1+1}^{l_2}\alpha_i$，…，$\beta_k=\sum_{l_{k-1}+1}^{n}\alpha_i$，显然 $\beta_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,k$，$\sum_{i=1}^{k}\beta_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$，如记 $l_0=0$，$l_k=n$，而且有

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i=1}^{k}\beta_i x_i^0-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\right\| \\
&=\left\|\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\sum_{j=l_{i-1}+1}^{l_i}\alpha_j\right)x_i^0-\sum_{j=l_{i-1}+1}^{l_i}\alpha_j x_j\right]\right\| \\
&\leqslant\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=l_{i-1}+1}^{l_i}\alpha_j\|x_i^0-x_j\|<\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

这说明对 $h(A)$ 中任何一点 $y=\sum_{1}^{n}\alpha_i x_i$，必在凸集 $h(x_1^0,\cdots,x_k^0)$

$=\{\sum_{i=1}^{k}\beta_i x_i^0 \mid \beta_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{k}\beta_i=1\}$中找到相应的一点 $y^0=\sum_{i=1}^{k}\beta_i x_i^0$，使得

$$\|y-y_0\|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{9.8}$$

可是 $h(x_1^0,\cdots,x_k^0)$是有限维空间(显然是由 x_1^0、…、x_k^0 张成的X的子空间)中的有界集，它是致密集，所以 $h(x_1^0,\cdots,x_k^0)$ 有有限 $\frac{\varepsilon}{2}$-网：y_1^0、…、y_m^0, $y_j^0=\sum_{i=1}^{k}\beta_i^{(j)}x_i^0$，$j=1, 2, \cdots, m$. 因而对任何 $y_0\in h(x_1^0,\cdots,x_k^0)$，必有某个 y_k^0，使得

$$\|y_0-y_k^0\|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{9.9}$$

再由(9.8)，就得到对任何 $y\in h(A)$，必有相应 y_k^0，使得

$$\|y-y_k^0\|<\varepsilon \tag{9.10}$$

显然 $y_j^0\in h(x_1^0,\cdots,x_k^0)\subset h(A)$，$j=1,2,\cdots,m$. 所以$\{y_j^0\}$是 $h(A)$ 的有限 ε-网. 证毕.

系　在引理假设下，$\overline{h(A)}$是凸紧集.

证　因为 $h(A)$ 是致密集，所以$\overline{h(A)}$是致密闭集. 因为 $h(A)$ 是凸集，所以 $\overline{h(A)}$也是凸集，因此 $\overline{h(A)}$是凸紧集. 证毕.

定理 16 的证明　记 $A=\Phi(S)$，$A\subset S$，因而凸紧集 $\overline{h(A)}\subset S$. 又显然 $\Phi(\overline{h(A)})\subset\Phi(S)=A\subset\overline{h(A)}$，因而 Φ 可以视为凸紧集$\overline{h(A)}$到自身的连续映照，由定理 15 知道 必存在 $x\in\overline{h(A)}\subset S$，使得 $x=\Phi(x)$. 证毕.

习　题

1. 下列复数集哪个是致密集？

(i) $\{z\mid |z|\geqslant 1\}$；(ii) $\{z\mid z\bar{z}=2\}$；(iii) $\{z\mid e^z=1\}$；(iv) $\{z\mid |z|$ 是

不大于 1 的有理数}.

2. 设K是一个复数集，它在实轴和虚轴上投影都是致密集，证明K是致密集.

3. 举一个度量空间，在它上面有一个完全有界集不是致密的.

4. 设A是欧几里得空间E^n的子集，$\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$是$A$的开覆盖，证明必可从$\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$中最多选出可列个开集$\{O_{\lambda_n}\}$，使得$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} O_{\lambda_n} \supset A$.

5. 证明习题 4 中空间E^n换成可析度量空间R时，结论仍成立.

6. 如果将完全有界集定义中的有限ε-网$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$的点要求$x_i \in A (i=1, 2, \cdots, n)$条件减轻为只要$x_i \in R (i=1, 2, \cdots, n)$，证明这样定义的完全有界集与原定义等价.

7. 设X是赋范线性空间，A是X的有界子集. 证明A是完全有界的充要条件是：对任何$\varepsilon > 0$，必有X的有限维子空间M_ε，使A中每个点与M_ε的距离都小于ε.

8. 设A是度量空间R中的紧集，$\{F_\lambda\}$是A的一族闭子集，如果$\{F_\lambda\}$中任意有限个$F_{\lambda_1}, \cdots, F_{\lambda_n}$的交集都不空，那末$\bigcap\limits_\lambda F_\lambda$也不空.

反之，如果集A具有如下性质：对于A中任意相对于A闭的子集族$\{F_\lambda\}$，从任意有限交集不空必可推出$\bigcap\limits_\lambda F_\lambda$不空. 那末$A$必是紧集.

9. 如果在度量空间R中采用下述相对闭的概念：B、A是R中两个子集，如果$B \cap A$是度量空间A的闭子集，则称B相对于A是闭的.

证明 集A是R中紧集的充要条件是对R中任何相对于A的闭集族$\{F_\lambda\}$，总能从$\{F_\lambda\}$的有限交在A中非空推出$(\bigcap\limits_\lambda F_\lambda) \cap A$不空.

举例说明：存在度量空间R以及R中非紧集A，但满足下面性质：对R中任意一族闭集$\{F_\lambda\}$，总能从$\{F_\lambda\}$的有限交在A中非空推出$\bigcap\limits_\lambda F_\lambda$非空，但$\left(\bigcap\limits_\lambda F_\lambda\right) \cap A$是空集.

10. 证明无限维的 Banach 空间不能分解成可列个致密集的和.

11. 设X是无限维的 Banach 空间，证明必不存在一列有限维的子空间$\{X_n\}$，使得$X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$（从而可析无限维 Banach 空间中不存在可列个向量$\{e_i\}$构成 Hamel 基）.

12. 设 $C_\alpha[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上满足 Hölder 连续性条件

$$|f(t)-f(t')|\leqslant M|t-t'|^\alpha,\quad t, t'\in[a, b]$$

而且 $f(a)=0$ 的函数全体，这里 M、α 是正的常数，并且 $0<\alpha\leqslant 1$. 在 $C_\alpha[a, b]$ 中规定范数如下：对于 $f\in C_\alpha[a, b]$，令

$$\|f\|=\sup_{t, t'\in[a, b]}\frac{|f(t)-f(t')|}{|t-t'|^\alpha}.$$

写出 $C_\alpha[a, b]$ 中的点集是完全有界集的一些条件.

13. 设 R 和 R_1 是度量空间，$D\subset R$，f 是 D 到 R_1 中的映照. 如果对于任一正数 ε，有如下的正数 δ，当 x, $x'\in D$，而且适合 $\rho(x, x')<\delta$ 时，总有 $\rho(f(x), f(x'))<\varepsilon$，便称 f 在 D 上是均匀连续(一致连续)的. 证明：紧集 D 上的连续映照是均匀连续的.

14. 设 X 是赋范线性空间，g_1、…、g_n 是 X 中 n 个向量. 证明，对任何 $x\in X$，必存在数 λ_1^0、…、λ_n^0，使得

$$\left\|x-\sum_{i=1}^n\lambda_i^0 g_i\right\|=\inf_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}\left\|x-\sum_{i=1}^n\lambda_i g_i\right\|$$

其中 λ_1、…、λ_n 是 n 个任意数. (进一步，如果 X 是严格赋范的，g_1、…、g_n 是线性无关的，那末达到上述极值的 λ_1^0、…、λ_n^0 是唯一的. 参见 §4 习题 14.)

15. 举例说明引理 2 中 X 仅仅是赋范线性空间时，结论未必成立.

§ 10 拓扑空间和拓扑线性空间

1. 拓扑空间 前面各节中已经建立起利用距离来描述极限的理论，并且引进了与极限有关的概念如开集、闭集、紧集等. 但是分析数学中有些极限概念并不能利用距离来描述. 例如函数列处处收敛的概念就是如此.

例 1 设 X 是一集. $R(X)$ 表示 X 上的实函数全体. 又设 $\{f_n\}\subset R(X)$，$f\in R(X)$. 如果对一切 $x\in X$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$$

那末称函数列 $\{f_n\}$ 在 X 上处处收敛于 f，记为 $f_n\to f$. 当 X 是有限集或可列集时，这种收敛概念可以纳入度量空间中收敛的范畴. 例如设

$$X=\{x_n|n=1, 2, \cdots\}$$

当 f, $g\in R(X)$ 时，规定

$$\rho(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|f(x_n)-g(x_n)|}{1+|f(x_n)-g(x_n)|}$$

那末$(R(X),\rho)$是一度量空间，而且$\{f_n\}$在X上处处收敛于f就等价于

$$\rho(f_n,f)\to 0$$

然而当X是一个不可列集时，就无法定义$R(X)$中的距离$\rho(f,g)$，使得$\{f_n\}$在X上处处收敛于f等价于$\rho(f_n,f)\to 0$.

例如$X=[0,1]$，$\{r_i\}$是$[0,1]$上有理点全体．对任何n，显然存在$[0,1]$上一列实连续函数$\{f_{n,k},k=1,2,\cdots\}$处处收敛于

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}1, & x=r_1,\cdots,r_n\\ 0, & x\neq r_i\ (i=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

又易知$\{\varphi_n(x)\}$在$[0,1]$上处处收敛于Dirichlet函数$D(x)$．先证不存在$[0,1]$上实连续函数列$\{f_n\}$处处收敛于$D(x)$．事实上，如果连续函数列$\{f_n\}$处处收敛于$D(x)$，那末对任何实数c，

$$X(D<c)=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}X\left(f_n\leqslant c-\frac{1}{m}\right)$$

由于$X\left(f_n\leqslant c-\frac{1}{m}\right)$是$[0,1]$上闭集，因而$\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}X\left(f_n\leqslant c-\frac{1}{m}\right)$也是闭集，从而$X(D<c)$是可列个闭集的和．特别取$c=\frac{1}{2}$，便得到$[0,1]$上无理数全体可以表示成可列个闭集的和，这不可能(参见第一章§4习题)．现在来证明$[0,1]$上处处收敛不能用距离收敛来描述．假如有某个距离ρ，函数列处处收敛等价于按ρ收敛．这样，对每个n，$\rho(f_{n,k},\varphi_n)\to 0\ (k\to\infty)$，从而存在$k_n$，使得$\rho(f_{n,k_n},\varphi_n)<\frac{1}{n}$．又因为$\rho(\varphi_n,D)\to 0$，所以

$$\rho(f_{n,k_n},D)\to 0$$

即有连续函数列$\{f_{n,k_n}\}$处处收敛于D．显然这是不可能的．这就是说，$[0,1]$上函数列的处处收敛概念是不能距离化的．

因此，我们现在需要消别的途径来建立比度量空间更为一般的极限理论．在§1，第4段我们知道点列收敛的概念可以不用距离来描述而用环境来描述，而环境是用开集来定义的．因此，如果我们在一个空间中用某种方法来规定其中某些集为开集，这样就可以利用开集来定义环境，再利用环境来定义收敛点列的极限等．根据§4开集应该满足定理1中的三个条件，

我们就利用这三个条件来作为规定开集的三条公理.

定义 设S是一不空的集,$\mathfrak{S}$是S的某些子集组成的一个集类. 如果它满足条件:

(O1) 空集$\varnothing$与全空间S在$\mathfrak{S}$中;

(O2) $\mathfrak{S}$中任意个集的和集在$\mathfrak{S}$中;

(O3) $\mathfrak{S}$中任意两个集的通集在$\mathfrak{S}$中.

那末我们称$\mathfrak{S}$为空间S中的一个**拓扑**(结构),而称$(S, \mathfrak{S})$为一**拓扑空间**,有时简写$(S, \mathfrak{S})$为S. $\mathfrak{S}$中的集称为S的**开集**,空间S中的元素称为**点**. 如果开集U含有点x,称U为点x的**环境**(或**邻域**). 任何开集$O\in\mathfrak{S}$的余集$S-O$,称为**闭集**.

如果$(S, \mathfrak{S})$又满足如下的条件:

(4) 对任何两个$x, y\in S$,当$x\neq y$时必然有x, y的环境U和V使

$$U\cap V=\varnothing$$

那末称$(S, \mathfrak{S})$是 **Hausdorff 空间**.

在度量空间中,我们总是把按§4的方法定义的开集全体作为拓扑,因此度量空间自然地成为一个拓扑空间,而且是 Hausdorff 空间. 例如E^n是欧几里得空间,按欧几里得距离导出的拓扑$\mathfrak{S}^n$称做欧几里得拓扑,$(E^n, \mathfrak{S}^n)$称为欧几里得拓扑空间.

例2 设S是非空集. 令$\mathfrak{S}$是S的子集全体,显然这时$\mathfrak{S}$成为一个拓扑,称做**离散拓扑**. 离散拓扑空间是 Hausdorff 空间. 如果我们取

$$\mathfrak{S}=\{\varnothing, S\}$$

这时$\mathfrak{S}$也成为一个拓扑,称它为平凡拓扑. 当S中不止有一点时,S按照平凡拓扑不是 Hausdorff 空间.

但是我们要直接给出一个空间中的拓扑有时是比较费事的. 例如在度量空间中我们是先给出每点的一种特殊的α-环境,然后再定义一般环境以及开集. 因此,有时我们也要利用在一点的一族特殊的环境来定义开集.

定义 设$(S, \mathfrak{S})$是一拓扑空间,$x\in S$. 又设$\mathscr{U}(x)$是x点的某些环境所成的环境族. 如果对x点的任何环境V必有$U\in\mathscr{U}(x)$使得$U\subset V$,那末称$\mathscr{U}(x)$是拓扑$\mathfrak{S}$在x点的**环境基**.

例如当R是一个度量空间,$x\in R$. 取$\mathscr{U}(x)=\{O(x, r)\mid r$是正数$\}$,那末它就是在$x$点的环境基. 显然,$\mathscr{U}(x)=\{O(x, r)\mid r$是正有理数$\}$也是$x$点的环境基.

引理 1　设 $(S, \mathfrak{S})$ 是一拓扑空间，$\mathscr{U}(x)$ 是在 x 点的环境基，那末它必然满足条件：

($N1$) 每个 $U\in\mathscr{U}(x)$ 含有点 x；

($N2$) 对任何 U_1、$U_2\in\mathscr{U}(x)$ 必有 $U\in\mathscr{U}(x)$ 使得 $U\subset U_1\cap U_2$；

($N3$) 设 $U\in\mathscr{U}(x)$，而且 $y\in U$，那末必有 $V\in\mathscr{U}(y)$ 使得 $V\subset U$.

证　由环境的定义得到 ($N1$). 当 U_1、$U_2\in\mathscr{U}(x)$ 时，$U_1\cap U_2$ 也是开集而且也含有 x，因此它是 x 点的环境. 由 $\mathscr{U}(x)$ 是环境基的定义有 $U\in\mathscr{U}(x)$ 使得 $U\subset U_1\cap U_2$，所以满足 ($N2$). 再证 ($N3$)：设 $U\in\mathscr{U}(x)$，那末 U 是开集. 如果 $y\in U$，那末 U 是 y 的环境. 由于 $\mathscr{U}(y)$ 是 y 的环境基，有 $V\in\mathscr{U}(y)$ 使 $V\subset U$. 证毕.

上述三个条件不但是集族成为环境基的必要条件，而且也是充分条件：

引理 2　设 S 是一集，如果对每点 $x\in S$ 指定了 S 的子集族 $\mathscr{U}(x)$ 满足（引理 1 中的）条件 ($N1$)、($N2$)、($N3$)，那末必有 S 上的唯一的拓扑 $\mathfrak{S}$ 使得 $\mathscr{U}(x)$ 成为 $\mathfrak{S}$ 在 x 点的环境基.

证　我们利用 $\mathscr{U}(x)$，$x\in S$ 定义 $\mathfrak{S}$ 如下：任意取 S 中若干点（允许重复取）$\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$，并且对每点 x_λ 任意取 $\mathscr{U}(x_\lambda)$ 中的一个集 U_λ，作 S 的子集

$$U=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \tag{10.1}$$

由 $\mathscr{U}(x)$，$x\in S$ 造出的这种类型的集 U 的全体再加上空集 $\varnothing$ 记为 $\mathfrak{S}$. 现在证明它满足拓扑的三个条件.

(i) 我们对每个 $x\in S$ 取一个 $U_x\in\mathscr{U}(x)$，由 $\mathscr{U}(x)$ 的（引理 1 中）条件 ($N1$) 可知 $S=\bigcup\limits_x U_x\in\mathfrak{S}$，所以 $\mathfrak{S}$ 满足条件 ($O1$). 条件 ($O2$) 是显然被满足的. 再证 ($O3$)：设 W_1、$W_2\in\mathfrak{S}$，任取

$$y\in W=W_1\cap W_2$$

由于 $y\in W_\nu$ $(\nu=1, 2)$，由于 (10.1)，$W_\nu=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda^{(\nu)}$，所以存在 $U_\lambda^{(\nu)}(x_\nu)$，使得 $y\in U_\lambda^{(\nu)}(x_\nu)$，从而必有 $U_\nu\in\mathscr{U}(x_\nu)$、使得 $y\in U_\nu\subset W_\nu$（取 $U_\nu=U_\lambda^{(\nu)}(x_\nu)$ 即可）. 由条件 ($N3$) 必有 $V_\nu\in\mathscr{U}(y)$ 使得 $V_\nu\subset U_\nu$. 由于 V_1、$V_2\in\mathscr{U}(y)$，由条件 ($N2$)，对每个 $y\in W$ 得到 $V_y\in\mathscr{U}(y)$，使得

$$V_y\subset\bigcap_{\nu=1}^{2} V_\nu\subset\bigcap_{\nu=1}^{2} U_\nu\subset W$$

因此

$$W=\bigcup_{y\in W}V_y$$

这样一来，$W\in\mathfrak{E}$. 所以 $\mathfrak{E}$ 成为拓扑.

还要证明 $\mathscr{U}(x)$，$x\in S$ 是这样造出的 $\mathfrak{E}$ 的环境基. 首先说明每个 $U\in\mathscr{U}(y)$ 是开集：事实上，只要在(10.1)中仅取一个点 $x_\lambda=y$，取相应的 U_λ 为 U 立即知 U 是 $\mathfrak{E}$ 中开集. 其次，任取 $\mathfrak{E}$ 在 y 点的一个环境 O，由于 $O\in\mathfrak{E}$，根据(10.1)，$O=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$，因此必有某个 $x\in S$，$U\in\mathscr{U}(x)$ 使得 $y\in U\subset O$. 由条件($N3$)有 $V\in\mathscr{U}(y)$ 使得 $V\subset U\subset O$，所以 $\mathscr{U}(y)$，$y\in S$ 是环境基.

最后再证拓扑的唯一性：如果有另一个拓扑 $\mathfrak{E}'$，由于对一切 $x\in S$，$\mathscr{U}(x)\subset\mathfrak{E}'$，所以 $\mathfrak{E}$ 中任一个 $U=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\in\mathfrak{E}'$. 反过来，如果 U' 是 $\mathfrak{E}'$ 中任何一个元素，对任何 $x\in U'$，必有 $\mathscr{U}(x)$ 中的 $O(x)\subset U'$，因而 $U'=\bigcup\limits_{O(x)\subset U'}O(x)\in\mathfrak{E}$. 所以 $\mathfrak{E}=\mathfrak{E}'$. 证毕.

定义 称引理2中的拓扑 $\mathfrak{E}$ 为 $\mathscr{U}(x)$，$x\in S$ 导出的拓扑.

如果我们要给出拓扑，根据引理2，只要给出满足条件($N1$—3)的集族 $\mathscr{U}(x)$，$x\in S$ 就行了.

例3 我们考察例1中的集 $R(X)$ 中任何一个子集 S. 对每个 $f\in S$，每个正数 a 和任意有限个 x_1、x_2、…、$x_n\in X$，定义

$$U(f;x_1,\cdots,x_n,a)=\{g\mid g\in S,\ |g(x_\nu)-f(x_\nu)|<a,\ \nu=1,2,\cdots,n\}$$

我们又令 $\mathscr{U}(f)=\{U(f;x_1,\cdots,x_n;a)\mid n$ 为自然数，$x_\nu\in X$，$a>0\}$，那末易知 $\mathscr{U}(f)$，$f\in S$ 满足条件($N1$)、($N2$)、($N3$). 由引理2，它导出唯一的拓扑 $\mathfrak{E}$，使 $\mathscr{U}(f)$，$f\in S$ 是环境基.

我们仿照度量空间的情况，一样地在拓扑空间中引入点列收敛的概念.

定义 设 $(S,\mathfrak{E})$ 是一个拓扑空间，$\{x_n\}$ 是 S 中的点列，$x\in S$. 如果对于 x 的任何环境 O，有自然数 N，使得当 $n\geq N$ 时，$x_n\in O$，那末称 x_n(按拓扑 $\mathfrak{E}$)收敛于 x，记为 $x_n\xrightarrow{\mathfrak{E}}x$ 或 $x_n\to x$.

我们来证明，这时在例3中的函数列 $\{f_n\}\subset S$ 处处收敛于 f 的充要条件是 $f_n\xrightarrow{\mathfrak{E}}f$.

先证充分性：设 $f_n\xrightarrow{\mathfrak{E}}f$. 对任何 $x\in X$，任何正数 ε，由于 $U(f;x,\varepsilon)$ 是

f 的环境，这时必有自然数 N，使得当 $n\geq N$ 时，$f_n\in U(f;x,\varepsilon)$，即是 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，因此 $\{f_n(x)\}$ 处处收敛于 f．再证必要性：如果 f_n 处处收敛于 f，对于 f 的任何环境 O，必有 $x_1,\cdots,x_n\in X$，$a>0$ 使 $U(f;x_1,\cdots,x_n;a)\subset O$．由于 $\{f_n\}$ 处处收敛于 f，对每个 x_ν 必有自然数 N_ν 使得当 $n\geq N_\nu$ 时，$|f_n(x_\nu)-f(x_\nu)|<a$，因此只要取 $N=\max(N_1,\cdots,N_n)$，那末当 $n\geq N$ 时

$$f_n\in U(f;x_1,\cdots,x_n;a)\subset O$$

证毕．

定义 设 $(S,\mathfrak{S})$ 是一拓扑空间．如果 S 的每点 x 都存在一个环境基 $\mathscr{U}(x)$ 是可列集，那末称 $(S,\mathfrak{S})$ 是满足第一可列公理的．

显然，度量空间 (R,ρ) 是满足第一可列公理的．因为 $\mathscr{U}(x)=\{O(x,r)|r$ 为正有理数$\}$ 就是 x 点的可列的环境基．可以证明，对于例 3 中的 S 取为 $R(X)$，当 X 是不可列集时，它不满足第一可列公理．事实上，假如满足第一可列公理，对 $f\equiv 0$，就有可列环境基 $\{u_n(0)|n=1,2,\cdots\}$，记 $u_n(0)=U(0;x_1^{(n)},\cdots,x_{m_n}^{(n)};a_n)$，显然 $A_0=\{x_i^{(n)}|i=1,2,\cdots,m_n,n=1,2,\cdots\}$ 是可列集．由于 X 不可列，因而 $X-A_0$ 不空．任取 $x_0\in X-A_0$ 以及数 $a>0$．考察 $f\equiv 0$ 的环境 $U(0;x_0;a)$：显然函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}a+1, & x=x_0\\ 0, & x\in X-x_0\end{cases}$$

属于 $u_n(0)$，$n=1,2,\cdots$．但是 $\varphi(x)\bar{\in}U(0;x_0;a)$．因而对任何 n，$u_n(0)\not\subset U(0;x_0;a)$．这就与假设 $\{u_n(0)\}$ 是环境基相矛盾．所以在例 3 中，当 S 取为 $R(X)$，而 X 是不可列集时，拓扑空间 $R(X)$ 不满足第一可列公理．

可以仿照 §4 定理 4，证明下面的结论：

引理 3 设 $(S,\mathfrak{S})$ 是拓扑空间，$A\subset S$．如果 A 为闭集，那末 A 中任何收敛点列必收敛于 A 中一点．设 $(S,\mathfrak{S})$ 又是满足第一可列公理的，那末当 A 中任何收敛点列必收敛于 A 中的一点时，A 是闭集．

因此，在满足第一可列公理的拓扑空间中能够用收敛点列的极限来描述闭集，也就是描述拓扑．但是我们注意，引理 3 中 $(S,\mathfrak{S})$ 满足第一可列公理的条件不可除去．

例 4 设 R^1 是实数直线，但其中规定拓扑如下：令 $\mathfrak{S}=\{R^1-B|B$ 是 R^1 中的任一有限子集或可列子集或空集或 $R^1\}$．这时容易看出 $(R^1,\mathfrak{S})$ 中没有一个收敛点列．因此任取 $(R^1,\mathfrak{S})$ 中一个不闭的集 A，例如 $A=[0,\infty)$（它的余集不是开集），它满足这样的条件："A 中任何收敛点列必收敛于 A 中一点"

(因为 A 中根本就没有收敛点列)．但是 A 不是闭集．

所以在不满足第一可列公理的空间中就不能由收敛点列极限来描述拓扑了．需要把点列的概念推广如下．

定义 设 Λ 是一个半序集，而且对任何 λ_1、$\lambda_2\in\Lambda$ 有 $\lambda\in\Lambda$ 使得 $\lambda_1<\lambda$、$\lambda_2<\lambda$，那末称 Λ 是定向半序集．

S 是一空间，设 Λ 是一个定向半序集，$\lambda\longmapsto x_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 是 Λ 到 S 的一个映照，称 $\{x_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\}$ 为半序点列．

显然当 N 是自然数全体按自然顺序所成的全序集时，通常点列 $\{x_n,\ n\in N\}$ 就是一种特殊的半序点列．

例 5 设 $(S,\mathfrak{T})$ 是一个拓扑空间，$x\in S$，$\mathscr{U}(x)$ 是 x 点的一个环境基，我们在 $\mathscr{U}(x)$ 中规定当 $U\subset V$ 时为 $V<U$，那末这个顺序称为逆包含顺序．显然 $\mathscr{U}(x)$ 按逆包含顺序成为定向半序集．对每个 $U\in\mathscr{U}(x)$，任取 $x_v\in U$．那末 $\{x_v,\ U\in\mathscr{U}(x)\}$ 就是一个半序点列．

我们现在把点列收敛的概念推广到半序点列．

定义 设 $(S,\mathfrak{T})$ 是拓扑空间，$\{x_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\}$ 是 S 中半序点列，$x_0\in S$．如果对 x_0 的每个环境 O 必有 Λ 中的指标 λ_0 使得当 $\lambda_0<\lambda$ 时

$$x_\lambda\in O$$

那末称半序点列 $\{x_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\}$ 收敛于 x_0．记为 $x_\lambda\xrightarrow{\mathfrak{T}}x_0$ 或者 $x_\lambda\to x_0$．

容易看出 Hausdorff 空间中任何一个收敛的半序点列必然只收敛于一点．

例 6 容易看出例 5 中的半序点列 $x_\lambda\to x$．

利用半序点列就可以描述闭集，因此也就可以描述拓扑了．

引理 4 设 $(S,\mathfrak{T})$ 是一个拓扑空间，$A\subset S$，那末 A 成为闭集的充要条件是 A 中任一收敛半序点列必收敛于 A 中的一点．

证 必要性：设 A 是闭集，$\{x_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\}$ 是 A 中的半序点列，$x_\lambda\to x$．如果 $x\bar{\in}A$，那末 $S-A$ 是 x 的环境，由 $x_\lambda\to x$ 必有 $x_\lambda\in S-A$，这和 $x_\lambda\in A$ 冲突，所以 $x\in A$．

充分性：设 A 中每个收敛的半序点列 $\{x_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\}$ 必收敛于 A 中一点．今证 $S-A$ 是开集．不然的话，必有 $x\in S-A$，而且对 x 的环境基 $\mathscr{U}(x)$ 中每个环境 U 必有 $x_U\in A$．因此半序点列 $\{x_U,\ U\in\mathscr{U}(x)\}$ 它是收敛于 x 的，但是 $x\bar{\in}A$，这和假设冲突．因此 A 是闭集．证毕．

定义　设 S 是一集，$\mathfrak{C}_\nu$，$\nu=1,2$ 是 S 中的两个拓扑，如果 $\mathfrak{C}_1\subset\mathfrak{C}_2$. 就称拓扑 $\mathfrak{C}_1$ 弱于 $\mathfrak{C}_2$，或 $\mathfrak{C}_2$ 强于 $\mathfrak{C}_1$.

我们注意这里 $\mathfrak{C}_1$ 弱于 $\mathfrak{C}_2$，包括可能 $\mathfrak{C}_1=\mathfrak{C}_2$ 这种情况.

显然任何拓扑弱于离散拓扑强于平凡拓扑(见例 2).

引理 5　设 S 是一集，$\mathfrak{C}_\nu$，$\nu=1, 2$ 是 S 上的两个拓扑，$\mathfrak{C}_1\subset\mathfrak{C}_2$. 设 $\{x_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 是 S 中的半序点列，$x_0\in S$. 如果 $x_\lambda\xrightarrow{\mathfrak{C}_2}x_0$，那末 $x_\lambda\xrightarrow{\mathfrak{C}_1}x_0$.

换句话说，半序点列如果按强的拓扑收敛，必然按弱的拓扑也收敛于同一点.

证　因为对 x_0 的每个环境 $O\in\mathfrak{C}_1$，自然有 $O\in\mathfrak{C}_2$，由半序点列收敛的定义立即可以得引理 5. 证毕

例如在一集 S 中一个点列 $\{x_n\}$ 如按离散拓扑收敛于 x_0，那末当 n 充分大后 $x_n=x_0$，因此按别的任何拓扑都有 $x_n\to x_0$. 又 S 中任何半序点列 $\{x_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 按平凡拓扑总是收敛，并且收敛于 S 中每一点.

又如 X 上一致有界函数全体 $B(X)$ 按距离

$$\rho(f, g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$$

所决定的拓扑强于例 3 中所定义的处处收敛的拓扑. 即函数半序点列的均匀收敛推出处处收敛.

显然，对拓扑空间中的闭集，§4 的定理 7 仍然成立.

我们现在把度量空间中的致密闭集推广到拓扑空间.

定义　设 $(S,\mathfrak{C})$ 是一拓扑空间，$A\subset S$. 如果 A 中的任何一个点列 $\{x_n\}$ 必有子点列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 A 中的一点，那末我们就称 A 是**列紧的**.

下面我们再把度量空间中的有限覆盖性质加以抽象化引入如下的概念:

设 S 是一集，$A\subset S$. $\{O_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 是 S 的一族子集，如果 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\supset A$ 就称 $\{O_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 是 A 的一族覆盖. 如果 S 又是拓扑空间，$\{O_\lambda\}$ 又都是开集，那末称它是一族开覆盖.

定义　设 $(S,\mathfrak{C})$ 是拓扑空间，$A\subset S$. 如果 A 的任何一族开覆盖 $\{O_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 中必可挑出有限个 $\{O_{\lambda_1}, \cdots, O_{\lambda_n}\}$ 来覆盖 A，那末称 A 是一个**紧集**.

根据 §9 定理 9 和定理 10，当 $\mathfrak{C}$ 是由距离导出的拓扑时，这里紧集概念和列紧概念一致，这也就是我们在度量空间中把致密闭集称做紧集或列紧集的原因. 但是在不满足第一可列公理的拓扑空间中紧和列紧这两个概念是

不一致的.

在离散拓扑空间$(S,\mathfrak{C})$中. 只有S的有限子集才是紧集; 当$(S,\mathfrak{C})$是平凡的拓扑空间时, S的每个子集都是紧集.

我们又可以把§5的连续映照概念拓广到拓扑空间中来.

定义 设$(S_\nu,\mathfrak{C}_\nu)$, $\nu=1,2$是两个拓扑空间, $A\subset S_1$, f是$A\to S_2$的映照. 对于$x_0\in A$, 如果对于$f(x_0)$在$\mathfrak{C}_2$中的每个环境$O(f(x_0))$必有x_0在$\mathfrak{C}_1$中的环境$O(x_0)$使得

$$f(O(x_0)\cap A)\subset O(f(x_0))$$

那末称f在x_0点连续. 如果f在A上每点都是连续的, 那末称f是连续映照.

显然f是连续映照的充要条件是对每个$O\in\mathfrak{C}_2$

$$f^{-1}(O)=\{x\,|\,x\in A,\ f(x)\in O\}\in\mathfrak{C}_1\cap A$$

例如当$\mathfrak{C}_\nu$, $\nu=1,2$是S上的两个拓扑时, 恒等映照

$$I:\ x\longmapsto x,\ x\in S$$

作为$(S,\mathfrak{C}_2)$到$(S,\mathfrak{C}_1)$的映照成为连续映照的充要条件是$\mathfrak{C}_1\subset\mathfrak{C}_2$.

定义 设f是$(S_1,\mathfrak{C}_1)$到$(S_2,\mathfrak{C}_2)$的一对一的映照. 如果f以及它的逆映照f^{-1}都是连续的, 那末称f是**拓扑映照**.

当f是$S_1\to S_2$上的一对一的映照时, 显然f成为拓扑映照的充要条件是$\mathfrak{C}_2=\{f(O)\,|\,O\in\mathfrak{C}_1\}$.

在第三章中讨论过两个空间的乘积, 在§5中讨论过乘积度量空间, 现在我们进一步推广定义乘积拓扑空间.

定义 设$(S_\nu,\mathfrak{C}_\nu)$, $\nu=1,2$是两个拓扑空间. 令$S=S_1\times S_2$, 我们作

$$\mathfrak{C}=\{\bigcup_\lambda O_\lambda^{(1)}\times O_\lambda^{(2)}\,|\,O_\lambda^{(j)}\in\mathfrak{C}_j,\ j=1,2\}$$

(显然上述$\mathfrak{C}$确实为拓扑)称$(S,\mathfrak{C})$是$(S_1,\mathfrak{C}_1)$和$(S_2,\mathfrak{C}_2)$的**乘积拓扑空间**, 记为$(S_1,\mathfrak{C}_1)\times(S_2,\mathfrak{C}_2)$.

乘积拓扑空间的概念可以推广到任意个拓扑空间的乘积的情况, (一般说来, 它上面的邻域实质上是取各式各样有限乘积的邻域)参看[4].

例如欧几里得拓扑空间$(E^n,\mathfrak{C}^n)$与$(E^m,\mathfrak{C}^m)$的拓扑积就是欧几里得拓扑空间$(E^{n+m},\mathfrak{C}^{n+m})$.

2. 拓扑线性空间

比赋范线性空间更为广泛的是度量线性空间.

定义　设(R, ρ)是一个度量空间，R又是实数域或复数域F上的线性空间．如果R中的线性运算是连续的，就是说：(a) 加法运算是连续的：如果$\{x_n\}$、$\{y_n\}\subset R$，$x_n\to x$，$y_n\to y$，那末$x_n+y_n\to x+y$；(b) 数乘运算是连续的：如果$\{\alpha_n\}\subset F$，$\alpha_n\to\alpha$，$\{x_n\}\subset R$，$x_n\to x$，那末$\alpha_n x_n\to\alpha x$．这时我们就说(R, ρ)是一个**度量线性空间**．

特别如果(R, ρ)是完备的度量线性空间，就说(R, ρ)是**弗力谢**(Fréchet)**空间**(它与§7 习题 10 的定义在拓扑等价意义下是一致的)．

显然赋范线性空间是一个度量线性空间．我们现在举一个不是赋范线性空间的度量线性空间如下．

例 7　我们考察§1 例 4、5 中的s、$\mathscr{A}$以及$C^\infty[a, b]$，它们都是度量线性空间而不是赋范空间．

现在我们可以进一步推广度量线性空间的概念．当F是实数域或复数域时，我们用$\mathfrak{C}_F$表示F按照通常距离所引入的拓扑．

定义　设R是实数域或复数域F上的线性空间，又设$(R, \mathfrak{C})$是一个拓扑空间，它满足如下的条件：

(i) $(R, \mathfrak{C})$是 Hausdorff 空间；

(ii) R中的线性运算是连续的：(a) 加法运算$(x, y)\longmapsto x+y$作为

$$(R, \mathfrak{C})\times(R, \mathfrak{C})\to(R, \mathfrak{C})$$

的映照是连续的，而且(b)数乘运算$(\alpha, x)\longmapsto\alpha x$作为

$$(F, \mathfrak{C}_F)\times(R, \mathfrak{C})\to(R, \mathfrak{C})$$

的映照也是连续的．

那末称$(R, \mathfrak{C})$是**拓扑线性空间(或拓扑向量空间)**．显然如果(R, ρ)是一个度量线性空间，在R中按距离ρ引入拓扑$\mathfrak{C}$，那末$(R, \mathfrak{C})$成为拓扑线性空间．

在分析数学中最常用的是下面的一类拓扑线性空间．

定义　设R是实数域或复数域F上的线性空间，$\{p_\alpha(x), \alpha\in\Lambda\}$是$R$上的一族拟范数，也就是说，它们是$R$上的一族函数，满足条件(i)非负性：当$x\in R$时$p_\alpha(x)\geqslant 0$；(ii)齐次性：当$\lambda\in F$，$x\in R$时，$p_\alpha(\lambda x)=|\lambda|p_\alpha(x)$；(iii)三角不等式：当$x$、$y\in R$时，$p_\alpha(x+y)\leqslant p_\alpha(x)+p_\alpha(y)$．如果它们再满足条件(iv)：对每个$x\in R$，当$x\neq 0$时必有$\alpha\in\Lambda$使得$p_\alpha(x)\neq 0$．那末称$R$按$\{p_\alpha, \alpha\in\Lambda\}$成为赋(一族)拟范线性空间．

特别当Λ是可列集时，称R是赋可列拟范空间．

例 8 设$[a, b]$是一有限区间，$C^\infty[a, b]$是$[a, b]$上无限次可微的函数全体所成的线性空间，我们在$C^\infty[a, b]$上引入一列拟范数

$$\|x\|_n = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(n)}(t)|,\ x \in C^\infty[a, b],\ n = 1, 2, \cdots$$

这样$C^\infty[a, b]$按$\{\|\cdot\|_n;\ n = 1, 2, \cdots\}$成为赋可列拟范空间。

例 9 设X是任一集，$R(X)$是X上的实函数全体所成的线性空间，在$R(X)$上定义一族拟范数$\{p_x(\cdot),\ x \in X\}$如下：$p_x(f) = |f(x)|$，$f \in R(X)$。那末$R(X)$按$\{p_x(\cdot), x \in X\}$成为赋（一族）拟范线性空间。

对赋拟范线性空间R，如果$\{p_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$是它的拟范数族，我们引进类似于例3的一族邻域基如下：当$x \in R$时，任取有限个α_1、$\cdots$、$\alpha_n \in \Lambda$，任取正数ε，作

$$U(x; \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \varepsilon) = \{y \mid p_{\alpha_\nu}(y - x) < \varepsilon,\ \nu = 1, 2, \cdots, n\}$$

对于每个$x \in R$，记

$$\mathscr{U}(x) = \{U(x; \alpha_1, \cdots, \alpha_n; \varepsilon) \mid n \text{ 为自然数}, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Lambda, \varepsilon > 0\}$$

那末容易验证它满足引理1中的条件$(N1)$、$(N2)$、$(N3)$。由引理2，它导出唯一的拓扑，称它是由拟范数族$\{p_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$导出的拓扑，容易证明$R$按这个拓扑成为拓扑线性空间。此后对赋（一族）拟范线性空间总是这样地引入拓扑。这样得到的拓扑线性空间又叫做**局部凸的拓扑线性空间**（关于局部凸名词的由来，我们不准备介绍了）。

§8中的不动点原理可以推广到局部凸的拓扑线性空间的情况。

定理 1 (Schauder-Тихонов（吉洪诺夫）) 设R是一个局部凸的拓扑线性空间，A是R中的凸紧集。又设f是$A \to A$中的一个连续映照，那末必有$p \in A$使得$f(p) = p$。

关于这个定理的证明参见[8]。

第五章　有界线性算子

§1　有界线性算子

1. 线性算子与线性泛函概念　算子概念(参见第一章§2)起源于运算．例如代数运算、求导运算、求不定积分和定积分、把平面上的向量绕坐标原点旋转一个角度等等．在泛函分析中通常把映照称为算子．而取值于实数域或复数域的算子也称为泛函数，简称为泛函．本书中着重考察赋范线性空间上的线性算子，这是线性泛函分析的主要研究对象之一．

定义　设 Λ 是实数或复数域，X 及 Y 是域 Λ 上的两个线性空间，D 是 X 的线性子空间，T 是 D 到 Y 中的一个映照，对 $x\in D$，记 x 经 T 映照后的象为 Tx 或者 $T(x)$．如果对任何 x、$y\in D$ 及数 $\alpha,\beta\in\Lambda$，成立着

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$$

就称 T 是**线性算子**，称 D 是 T 的定义域，也记为 $\mathscr{D}(T)$．而称集 $TD=\{Tx|x\in D\}$ 是 T 的值域(或象域)，记为 $\mathscr{R}(T)$．取值为实数或复数的线性算子 T(即 $\mathscr{R}(T)\subset\Lambda$)分别称做实的或复的线性泛函，通称为线性泛函．

本书中今后所讨论的算子(泛函)都是线性算子(泛函)．

下面举一些例子．

例1　设 R^n 是 n 维(实系数或复系数)向量空间，在 R^n 中取一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，相应于任意一个 $n\times n$ 阵 $(t_{\mu\nu})$，作 $R^n\to R^n$ 的算子 T 如下：当 $x=\sum\limits_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu$ 时

$$y = Tx = \sum_{\mu=1}^{n} y_{\mu} e_{\mu}$$

而 $y_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} t_{\mu\nu} x_{\nu}$, $\mu = 1, 2, \cdots, n$. 显然，这样定义的 T 是一个线性算子，这个算子在线性代数中称为线性变换. 算子 T 显然由阵 $(t_{\mu\nu})$ 唯一确定，有时就直接记为 $T = (t_{\mu\nu})$.

反过来，设 T 是 $R^n \to R^n$ 的任何一个线性算子，由于 Te_{ν} 是 e_1、e_2、$\cdots$、e_n 的线性组合，所以必有阵 $(t_{\mu\nu})$，使得

$$Te_{\nu} = t_{1\nu} e_1 + \cdots + t_{n\nu} e_n, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n \tag{1.1}$$

因此，当 $x = \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu} e_{\nu}$ 时，由 T 的线性可得 $Tx = \sum_{\mu=1}^{n} y_{\mu} e_{\mu}$，而这里的 $y_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} t_{\mu\nu} x_{\nu}$，即 T 是对应于阵 $(t_{\mu\nu})$ 的算子.

由此可知，在有限维线性空间上，如果将基选定后，线性算子与矩阵是相对应的.

设 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 是一组数，那末当 $x = \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu} e_{\nu} \in R^n$ 时

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu} x_{\nu} \tag{1.2}$$

必为 R^n 上的线性泛函. 反过来，如果 f 是 R^n 上的线性泛函，记 $\alpha_{\nu} = f(e_{\nu})$，$\nu = 1, 2, \cdots, n$. 根据 f 的线性可知，f 必表示为(1.2)形式. 由此可知，n 维线性空间上线性泛函与数组 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 相对应.

例 2 设 $P(t) = \sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu} t^{\nu}$ 是常系数的多项式，那末将函数 $x(t)$ 映照成 $P\left(\frac{d}{dt}\right)x(t)$ 的算子

$$P(D): x(t) \longmapsto P\left(\frac{d}{dt}\right)x(t)$$

是$C^k[a, b]$到$C[a, b]$的线性算子.

又对于$[a, b]$中任一定数t_0,映照

$$f: x(t) \longmapsto P\left(\frac{d}{dt}\right)x(t)\bigg|_{t=t_0}$$

是$C^k[a, b]$上的线性泛函.

例 3 设E是线性空间,映照

$$T: x \longmapsto \alpha x \quad (\alpha\text{是定数})$$

是E上的线性算子,记做αI, 称为相似算子(或称做倍单位算子). 如果$\alpha=0$时,T是零算子,记做0. 当$\alpha=1$时, 称为单位算子或恒等算子,记做I.

例 4 设$(\Omega, \boldsymbol{B}, \mu)$是测度空间,$K(s, t)$是$(\Omega\times\Omega, \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}, \mu\times\mu)$上可测函数,并且

$$\iint |K(s, t)|^2 d\mu(s)d\mu(t) < \infty$$

由Cauchy不等式容易知道(参见第四章§3的(3.5)及例1)

$$(Tx)(s) = \int_\Omega K(s, t)x(t)d\mu(t)$$

是$L^2(\Omega, \boldsymbol{B}, \mu) \to L^2(\Omega, \boldsymbol{B}, \mu)$的线性算子, 它是线性积分方程理论中最基本的算子之一,通常称为 Hilbert-Schmidt 型积分算子.

例 5 设$x(t) \in L(-\infty, \infty)$,那末算子

$$(Tx)(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t}x(t)dt \; (\text{即}T: x(t) \longmapsto \tilde{x}(\alpha))$$

是$L(-\infty, \infty) \to C(-\infty, \infty)$中的线性算子.

特别,对任何固定的$\alpha_0 \in (-\infty, \infty)$

$$f: x(t) \to \tilde{x}(\alpha_0)$$

便是$L(-\infty, \infty)$上的线性泛函.

现在引入与线性泛函有关的一些几何概念.

设X是线性空间，f是X上的线性泛函．如果f不是零泛函（即$f\neq 0$），那末对任何实数（或复数，视空间X为实或复空间而定）c，称X的子集

$$L_c(f)=\{x\,|\,f(x)=c\}$$

为X的一个超平面，它的方程就是$f(x)=c$．特别当$c=0$时，超平面L_c成为X的线性子空间，称为泛函f的零空间

例如X是有限维空间R^n时，采用例1中记号，任何一个线性泛函f形如(1.2)，这时超平面L_c就是通常所说的超平面

$$\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n=c$$

线性泛函f除了可能相差一个常数因子外，可以由它的零空间决定出来．关于这一点证明如下：不妨设$f\neq 0$．设$\mathscr{N}(f)$（简记为$\mathscr{N}$）是f的零空间，那末$\mathscr{N}\neq X$．任取$y_0\in\mathscr{N}$，由于$f(y_0)\neq 0$，可以作$x_0=\dfrac{y_0}{f(y_0)}$，那末就有$f(x_0)=1$，对于空间X中任何向量x，作向量$y=x-f(x)x_0$，由于$f(y)=0$，所以$y\in\mathscr{N}$．因此对任何$x\in X$，必有$y\in\mathscr{N}$，使得

$$x=y+f(x)x_0 \qquad (1.3)$$

如果g是X上的线性泛函，也是以$\mathscr{N}$为零空间，那末由(1.3)得到

$$g(x)=g(y)+g(x_0)f(x)$$
$$=g(x_0)f(x)$$

对一切$x\in X$成立．即有下面泛函等式：

$$g=g(x_0)f$$

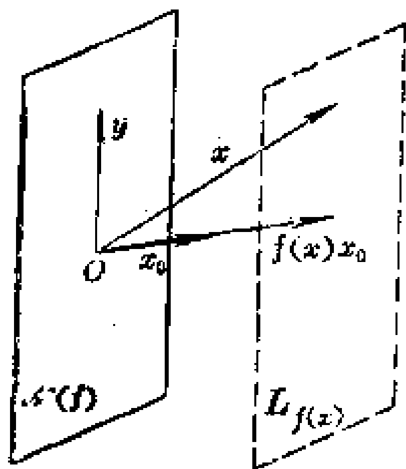


图 5.1

因此g与f只相差一个常数因子$g(x_0)$．

分解式(1.3)可以被形象地说成："非零线性泛函的非零空间

实质上是一维".

我们也很容易看出，两个线性泛函f、g，如果对某个$c\neq 0$，超平面$L_c(f)$与超平面$L_c(g)$一致，从而超平面$f=c'$（c'是任意非零数）与超平面$g=c'$一致，由此又推出$\mathscr{N}(f)=\mathscr{N}(g)$因此

$$f=g$$

2. 线性算子的有界性与连续性　在度量空间中已介绍过连续映照的概念．线性算子由于具有可加性，所以关于连续性有更进一步的结果．

定理 1　设T是赋范线性空间X到赋范线性空间Y的线性算子．假如T在某一点$x_0\in\mathscr{D}(T)$连续，那末在$\mathscr{D}(T)$上处处连续．

证　对任意一点$x\in\mathscr{D}(T)$，设$x_n\in\mathscr{D}(T)$，且$x_n\to x$，于是$x_n-x+x_0\to x_0$，由假设T在x_0处连续，所以当$n\to\infty$时，

$$T(x_n-x+x_0)=Tx_n-Tx+Tx_0\to Tx_0$$

因此$Tx_n\to Tx$，即T在x点是连续的．

由此可知，要验证线性算子T是连续的，只需验证T在$x=0$点连续就可以了．

例 6　有限维赋范空间中线性算子是连续算子．事实上，因为第四章§9定理12已证明有限维赋范线性空间中依范数收敛等价于依 Euclid 范数收敛，或等价于按坐标收敛．所以有限维赋范空间中一切线性算子是连续的．

定义　如果算子T将其定义域$\mathscr{D}(T)$中的每个有界集映照成一个有界集，就称T是**有界算子**．不是有界的算子就称为**无界算子**．

赋范线性空间中的相似算子显然是有界的．

通常我们说一个线性算子T是X到Y中的算子是指$\mathscr{D}(T)=X$．

用Zorn引理可以证明，任何无限维赋范线性空间上必存在定

义在全空间上的无界线性算子.

定理 2 设T是赋范线性空间X到赋范线性空间Y的线性算子. 那末T是有界算子的充要条件是存在常数$M\geqslant 0$, 使得对一切$x\in X$

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\| \tag{1.4}$$

证 设T是有界的线性算子, 那末T把单位球面$S=\{y\mid \|y\|=1, y\in X\}$映照成一个有界集, 所以有一个常数$M\geqslant 0$, 对于$y\in S$, 有$\|Ty\|\leqslant M$. 当$x=0$时 (1.4) 自然成立, 当$x\neq 0$时, 作$y=\dfrac{x}{\|x\|}$, 那末由$y\in S$, 得到

$$\left\|T\frac{x}{\|x\|}\right\|=\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant M$$

因而(1.4)对一切$x\in X$成立.

反过来, 如果(1.4)成立, 设x在一有界集A中, 就有常数K, 使得$x\in A$时, $\|x\|\leqslant K$. 因此由(1.4), 对一切$x\in A$

$$\|Tx\|\leqslant MK$$

即TA是有界集. 证毕.

本书今后如无特殊申明, 有界线性算子的定义域$\mathscr{D}(T)$总假定为是全空间, 即$\mathscr{D}(T)=X$. 因此, 对赋范线性空间上的线性算子, 以后就可用(1.4)作为有界性的定义. 与此相关, 引入下面基本概念.

定义 设T为赋范线性空间X到赋范线性空间Y的有界算子, 称

$$\|T\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

为**算子T的范数**.

由定理 2 立即得到有界线性算子的范数是有限的.

对有界线性算子T, 成立着

$$\|Tx\|\leqslant\|T\|\|x\|, \quad (x\in X) \tag{1.4'}$$

并且还有如下简单性质:

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\| \tag{1.5}$$

事实上，显然$\|T\|\geqslant\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|\geqslant\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|$. 另一方面，对任何 $y\neq 0$，由于$\frac{y}{\|y\|}$是范数为 1 的向量，立即得到

$$\left\|T\frac{y}{\|y\|}\right\|\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$$

上式左边取上确界后得到$\|T\|\leqslant\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|$，由此得到(1.5).

显然，当$T=I$(单位算子)时，$\|I\|=1$.

称$\|Tx\|/\|x\|$为T在x方向的伸张系数，$\|T\|$的几何意义是一切方向伸张系数的上确界.

现在举一个具体空间中具体算子的范数求法的例子.

例 7　对任何$f\in L[a,b]$，作

$$(Tf)(x)=\int_a^x f(t)\,dt \tag{1.6}$$

把T视为$L[a,b]\to C[a,b]$的算子时，那末$\|T\|=1$.

事实上，任取$f\in L[a,b]$，使$\|f\|_L=1$，由于

$$\|Tf\|_{C[a,b]}=\max_x|(Tf)(x)|=\max_x\left|\int_a^x f(t)\,dt\right|$$
$$\leqslant\max_x\int_a^x|f(t)|\,dt\leqslant\int_a^b|f(t)|\,dt=1$$

即$\|T\|\leqslant 1$. 另一方面，取$f_0=\frac{1}{b-a}$，显然$\|f_0\|_L=1$，那末又有

$$\|T\|=\sup_{\|f\|=1}\|Tf\|\geqslant\|Tf_0\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^x\frac{1}{b-a}dt$$
$$=\int_a^b\frac{1}{b-a}dt=1$$

即$\|T\|\geqslant 1$. 所以$\|T\|=1$.

如将(1.6)式所定义的算子看成$L[a,b]\to L[a,b]$的算子时，那末$\|T\|=(b-a)$.

事实上，任取$f\in L[a,b]$，使$\|f\|_L=1$，由于

$$\|Tf\|_L=\int_a^b\left|\int_a^x f(t)\,dt\right|dx\leqslant\int_a^b\int_a^x|f(t)|\,dt\,dx$$
$$\leqslant\int_a^b\int_a^b|f(t)|\,dt\,dx=\int_a^b 1dx=(b-a)$$

即$\|T\|\leqslant(b-a)$. 另一方面，对任何使得$a+\frac{1}{n}<b$的自然数n，作函数

$$f_n(x)=\begin{cases}n, & x\in\left[a,a+\frac{1}{n}\right]\\ 0, & x\in\left(a+\frac{1}{n},b\right]\end{cases}$$

显然$\|f_n\|_L=1$，而且

$$\|Tf_n\|_L=\int_a^b\left|\int_a^x f_n(t)\,dt\right|dx=\int_a^{a+\frac{1}{n}}n(x-a)\,dx$$
$$+\int_{a+\frac{1}{n}}^b 1dx$$
$$=(b-a)-\frac{1}{2n}$$

所以又有$\|T\|\geqslant\sup\limits_n\|Tf_n\|_L=(b-a)$. 从而$\|T\|=(b-a)$.

一般说来，求出具体算子的范数的值并不容易.

我们来证明对于线性算子而言，有界性与连续性是等价的.

定理 3 线性算子T是有界的充要条件是T是连续算子.

证 显然，有界算子在点$x=0$是连续的. 由定理1，有界线性算子T处处连续.

反过来，设T是连续的线性算子，我们只需证明

$$M_0=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|<\infty \tag{1.7}$$

假若不然，设$M_0=\infty$，那末就在单位球面$\|x\|=1$上存在点列$\{x_n\}$，使得$\|Tx_n\|=\lambda_n\to\infty$. 考察点列$y_n=\dfrac{x_n}{\lambda_n}$，显然，$y_n\to 0$. 由$T$的连续性，得到$Ty_n\to 0$. 但是实际上$\|Ty_n\|=1$，这是矛盾. 因而$M_0<\infty$，即$T$是有界算子. 证毕.

本节中例1到例6所举的算子（按所指定的定义域的空间和象域的空间）都是有界算子，读者自己可以一一加以验证.

本书今后如无特殊申明，连续算子的定义域总是假定是全空间.

显然，并非每个算子都是有界的.

例8 设X是$[a,b]$上具有连续的一阶导函数的函数全体，视X为$C[a,b]$的子空间(就是说，X中的范数就取为$C[a,b]$的范数，即当$x\in X$时，$\|x\|=\max\limits_{a\leq t\leq b}|x(t)|$)时，$X$也成为一个赋范线性空间. 在$X$上定义算子$D$如下：当$x\in X$时，$(Dx)(t)=\dfrac{d}{dt}x(t)$，那末$D$显然是$X$到$C[a,b]$的线性算子. D是无界的. 因为如果取$x_n(t)=e^{-n(t-a)}$，容易算出$\|x_n\|=1$，但是$Dx_n=-ne^{-n(t-a)}$，因此，当$n\to\infty$时，$\|Dx_n\|=n\to\infty$.

对于赋范线性空间X上的线性泛函f，我们总是把它看成由X到由实数(或复数)全体所成的线性空间Δ($y\in\Delta$时，$\|y\|$就是y的绝对值$|y|$)的线性算子. 因此关于泛函的连续性及有界性就不再复述. 对于有界线性泛函f，由于$f(x)$是数，所以$\|f(x)\|=|f(x)|$，因而线性泛函的范数可以写成

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)| \tag{1.8}$$

对于线性泛函还有下面的和连续性等价的条件.

定理4 设X是赋范线性空间，f是X上线性泛函，那末f是

连续的充要条件是 f 的零空间 $\mathscr{N}=\{x|f(x)=0\}$ 为 X 中的闭子空间.

证 必要性：设 f 是连续线性泛函．当 $x_n\in\mathscr{N}$，$x_n\to x$ 时，由 f 的连续性得到 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$．因此 $x\in\mathscr{N}$．所以 $\mathscr{N}$ 是闭集.

充分性：设 $\mathscr{N}$ 是闭集，如果 f 不是有界的，那末 $\sup\limits_{\|x\|=1}|f(x)|=\infty$．因此必有一列点 x_n，适合 $\|x_n\|=1$，$|f(x_n)|\geqslant n$．作

$$y_n=\frac{x_n}{f(x_n)}-\frac{x_1}{f(x_1)}$$

那末 $f(y_n)=0$，因此 $y_n\in\mathscr{N}$．然而由于

$$\left\|\frac{x_n}{f(x_n)}\right\|=\frac{1}{|f(x_n)|}\to 0$$

这样就得到 $y_n\to-\frac{x_1}{f(x_1)}$．但是 $f\left(\frac{-x_1}{f(x_1)}\right)=-1$，即 $\frac{-x_1}{f(x_1)}\bar{\in}\mathscr{N}$．这和 $\mathscr{N}$ 为闭集的性质矛盾，因此 f 是有界的．证毕.

3．有界线性算子全体所成的空间 现在我们考察线性算子之间的初等运算.

设 X、Y 是两个线性空间．我们以 $(X\to Y)$ 表示由 X 到 Y 的线性算子的全体，类似于函数的初等运算我们也可引入算子的初等运算.

当 $A,B\in(X\to Y)$，α 是数时，作算子 $A+B$、αA 如下：对于任何 $x\in X$，规定

$$(A+B)x=Ax+Bx$$

$$(\alpha A)x=\alpha(Ax)$$

显然，$A+B$、αA 都是属于 $(X\to Y)$．称 $A+B$ 为算子 A 与 B 的和，αA 为数 α 与 A 的积．容易知道 $(X\to Y)$ 按照上述的线性运算构成一线性空间.

设 Z 是又一个线性空间，如果 $B\in(X\to Y)$，$A\in(Y\to Z)$，作 X 到

Z的算子如下：

$$(A\cdot B)x = A(Bx),\quad x\in X$$

显然，$A\cdot B$ 是由 X 到 Z 的线性算子，称$A\cdot B$为算子 A 与 B 的积，常简写为AB. 特别，当$X=Y=Z$时，如果A、$B\in(X\to X)$，那末$AB\in(X\to X)$，并且易知$(X\to X)$按照上述线性运算及乘积成为一个线性代数①，并以 I 为单位元. 一般说来AB不一定等于 BA. 如果$AB=BA$，就称A，B 是可交换的.

当X、Y 是赋范线性空间时，以$\mathfrak{B}(X\to Y)$ 表示由X 到 Y 的有界线性算子的全体. 假如A、$B\in\mathfrak{B}(X\to Y)$，那末$A+B\in\mathfrak{B}(X\to Y)$，$\alpha A\in\mathfrak{B}(X\to Y)$，这里 α 是任意的数，并且

$$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\| \tag{1.9}$$

$$\|\alpha A\|=|\alpha|\,\|A\| \tag{1.10}$$

等式(1.10)是显然的. 至于(1.9)可证明如下：任取$x\in X$，那末

$$\|(A+B)x\|\leqslant\|Ax\|+\|Bx\|\leqslant\|A\|\|x\|+\|B\|\|x\|$$
$$=(\|A\|+\|B\|)\|x\|$$

从而(1.9)成立. 又显然$\|A\|\geqslant0$，而$\|A\|=0$只限于$A=0$. 所以得到结论如下：

定理5 设X、Y 是赋范线性空间，$\mathfrak{B}(X\to Y)$ 是X 到Y 的有界线性算子全体，那末$\mathfrak{B}(X\to Y)$ 按通常的线性运算及算子范数成为赋范线性空间.

此后，如不另外说明，我们总把$\mathfrak{B}(X\to Y)$ 了解为上述的赋范

---

① 设E是线性空间，如果对E中任意两个元素x、y，规定了积$x\cdot y\in E$，适合如下条件(i)乘法结合律：当$x,y,z\in E$时，$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$；(ii)乘法及加法的分配律：当$x$，$y$，$z\in E$时，$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$，$(y+z)\cdot x=y\cdot x+z\cdot x$；(iii)当$\alpha$是数，$x$，$y\in E$时，$\alpha(x\cdot y)=(\alpha x)\cdot y=x\cdot(\alpha y)$，就称$E$为线性代数. 在代数中常简记$x\cdot y$为$xy$. 详见奥库涅夫著《高等代数》。

线性空间. 特别,对于X上的全体连续线性泛函有

定义 设X是赋范线性空间. X上的连续线性泛函全体记做X^*,它按通常的线性运算及泛函的范数作范数构成一个赋范线性空间,称为X的**共轭空间**.

设X是赋范线性空间,当A、$B\in\mathfrak{B}(X\to X)$时,AB也是有界线性算子,而且

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\| \tag{1.11}$$

事实上,当$x\in X$时

$$\|ABx\|\leqslant\|A\|\|Bx\|\leqslant\|A\|\|B\|\|x\|$$

从而得到(1.11).

一般地,设R是赋范线性空间同时又是代数,如果其中元素的乘积满足

$$\|xy\|\leqslant\|x\|\|y\| \tag{1.12}$$

就称R是**赋范代数**. 因此$\mathfrak{B}(X\to Y)$是赋范代数. 完备的(作为赋范空间是完备的)赋范代数又称为**Banach代数**.

如果在一个Banach代数中,乘法是具有幺元的(或称单位元的),称它为具有幺元的**Banach代数**.

定理6 设X是赋范线性空间,Y是Banach空间,那末$\mathfrak{B}(X\to Y)$是Banach空间.

证 设$\{T_n\}$是$\mathfrak{B}(X\to Y)$中一列元素,并且是基本的,即对于任何$\varepsilon>0$,存在N,当$n, m\geqslant N$时

$$\|T_n-T_m\|<\varepsilon$$

因此对任何$x\in X$,当$n, m\geqslant N$时

$$\|T_nx-T_mx\|\leqslant\varepsilon\|x\| \tag{1.13}$$

所以固定x时,$\{T_nx\}$是Y中的基本点列,由于Y是完备的,所以存在y,使得

$$y=\lim_{n\to\infty}T_nx$$

作算子T如下：对每个$x\in X$，令$Tx=y=\lim\limits_{n\to\infty}T_nx$. 容易知道$T$是$X\to Y$的线性算子. 在(1.13)中，令$m\to\infty$，就得到：当$n\geqslant N$时

$$\|T_nx-Tx\|=\lim_{m\to\infty}\|T_nx-T_mx\|\leqslant\varepsilon\|x\|$$

由于ε不依赖于x，所以上式说明，当$n\geqslant N$时

$$\|T_n-T\|=\sup_{\|x\|=1}\|(T_n-T)x\|\leqslant\varepsilon$$

即$T_n-T\in\mathfrak{B}(X\to Y)$. 从而$T=T_n+(T-T_n)\in\mathfrak{B}(X\to Y)$，并且

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0.$$

因而$\mathfrak{B}(X\to Y)$是完备的赋范线性空间. 证毕.

由于实数全体或复数全体以绝对值作为范数时，构成完备赋范线性空间. 所以立即得到下面的重要结论.

定理 7　赋范线性空间的共轭空间是Banach空间.

其次，我们从定理6还可以得到下面的结果.

定理 8　当X是Banach空间时，那末$\mathfrak{B}(X\to X)$是具有幺元的Banach代数.

有关共轭空间的某些基本问题我们将在下一节专门讨论. 下面举一些Banach代数的例子.

例 9　设X是赋范线性空间，B_0是仅由单位算子I的倍数αI全体所构成的集，即$B_0=\{\alpha I,\ \alpha\in\Lambda\}$，那末$B_0$是Banach代数. 事实上，因为$B_0$和数域$\Lambda$(取数的绝对值为范数)所成的Banach代数是同构的.

例10　取$X=L[a,b]$，$x(t)$是$[a,b]$上的连续函数. 对每个x，作相应的$X\to X$的线性算子如下：对任何$f\in L[a,b]$

$$x:\ f(t)\longmapsto x(t)f(t)\tag{1.14}$$

显然，算子x是$X\to X$的线性算子，通常称它为**乘积算子**. 今证x是有界算子，并且

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)| \tag{1.15}$$

事实上，对任何$f\in L[a,b]$，由于

$$\int_a^b|x(t)f(t)|dt\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\int_a^b|f(t)|dt$$

即$\|xf\|\leqslant\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\|f\|$，因此$\|x\|\leqslant\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$. 另一方面，闭区间上连续函数$|x(t)|$的极值是可达到的，必有$t_0$

$$|x(t_0)|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|,\quad t_0\in[a,b]$$

因此，对任何$\varepsilon>0$，必有区间I: $t_0\in I\subset[a,b]$，当$t\in I$时

$$|x(t_0)|-\varepsilon<|x(t)| \tag{1.16}$$

记δ为I的长度，在$L[a,b]$中取f_δ如下：

$$f_\delta(t)=\begin{cases}0, & t\overline{\in}I\\ \dfrac{1}{\delta}, & t\in I\end{cases}$$

显然$f_\delta(t)\geqslant0$，且$\|f_\delta\|=1$. 根据(1.16)就有

$$\int_a^b(|x(t_0)|-\varepsilon)f_\delta(t)dt\leqslant\int_a^b|x(t)f_\delta(t)|dt$$

即 $\|xf_\delta\|\geqslant|x(t_0)|-\varepsilon=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|-\varepsilon$. 也就是说 $\|x\|\geqslant\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|-\varepsilon$. 令$\varepsilon\to0$，便得到$\|x\|\geqslant\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$. 因此(1.15)成立.

(1.15)说明：如果把$C[a,b]$中元素x，作为$L[a,b]\to L[a,b]$的乘积算子时，作为算子的范数和作为Banach空间$C[a,b]$的元素的范数是一致的.

此外，对$C[a,b]$中的所有元素x，按(1.14)方式把它作为$L[a,b]\to L[a,b]$算子时，显然构成一个代数. 又根据(1.14)以及$C[a,b]$是完备的，易知这个代数是Banach代数. 证毕.

在一个Banach代数B中，如果B中的两个元素x_1、x_2对于B中的乘法是可交换的，即$x_1x_2=x_2x_1$，就称x_1、x_2**是可交换的**. 如果B

中一切元素彼此都可交换，就称B是**可交换的Banach代数**．设$\mathfrak{A}$是B的线性闭子空间，以B的乘法作为$\mathfrak{A}$中的乘法，如果$\mathfrak{A}$成一个代数时，就称$\mathfrak{A}$为B的**Banach子代数**．

简言之，$\mathfrak{A}$是Banach代数B的Banach子代数，意即$\mathfrak{A}$是对线性运算和乘法运算封闭的闭子集．

定理 9　设X是Banach空间，$A\in\mathfrak{B}(X\to X)$，$\mathfrak{B}(X\to X)$中一切可与A交换的算子全体记做$\mathfrak{A}_A$那末$\mathfrak{A}_A$是$\mathfrak{B}(X\to X)$的Banach子代数．

证　先证$\mathfrak{A}_A$是$\mathfrak{B}(X\to X)$的线性子空间：如果$C,D\in\mathfrak{A}_A$，由于$CA=AC$，$DA=AD$，易知对任何两个数α、β，便有

$$(\alpha C+\beta D)A=\alpha CA+\beta DA=A(\alpha C)+A(\beta D)=A(\alpha C+\beta D)$$

因此$(\alpha C+\beta D)\in\mathfrak{A}_A$，即$\mathfrak{A}_A$是线性子空间．

再证$\mathfrak{A}_A$中两个元C与D的积$CD\in\mathfrak{A}_A$．事实上，由于$(CD)A=C(DA)=C(AD)=(CA)D=(AC)D=A(CD)$，即$CD\in\mathfrak{A}_A$．所以$\mathfrak{A}_A$是$\mathfrak{B}(X\to X)$的子代数．

最后证$\mathfrak{A}_A$是闭子空间：如果$\{C_n\}$是$\mathfrak{A}_A$中的一列元素，并且$C_n\to C\in\mathfrak{B}(X\to X)$．由此得到对任何$f\in X$

$$Cf=\lim_{n\to\infty}C_nf \tag{1.17}$$

由于A是连续的，根据(1.17)就得到

$$A(Cf)=A\lim_{n\to\infty}C_nf=\lim_{n\to\infty}AC_nf=\lim_{n\to\infty}C_nAf$$

用Af代替(1.17)中f，便得到

$$A(Cf)=C(Af)$$

即对任何$f\in X$，都有$ACf=CAf$．因此$AC=CA$，即$C\in\mathfrak{A}_A$．证毕．

Banach代数是泛函分析中专门研究的重要对象之一，不可能在本基础教材中多介绍，这里介绍的已能满足本书以后的需要，暂

时介绍到此为止.

以后研究算子谱时要用到Banach代数的一个下述结果.

定理10　设B是Banach代数. 则对任何$x\in B$极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}$$

存在, 而且等于$\inf\limits_{n\geq 1}\sqrt[n]{\|x^n\|}$.

证　记$r=\inf\limits_{n\geq 1}\sqrt[n]{\|x^n\|}$, 显然$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}\geq r$. 所以只要证明

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|x^n\|}\leq r \tag{1.18}$$

由下确界定义, 对任何正数ε, 必有$m\geq 1$, 使得

$$\sqrt[m]{\|x^m\|}<r+\varepsilon$$

对任何自然数n, 有非负整数k_n、l_n, $0\leq l_n<m$, 适合

$$n=k_n m+l_n$$

重复应用(1.12), 便可得到对任何k, $\|x^k\|\leq\|x\|^k$. 从而

$$\sqrt[n]{\|x^n\|}\leq\sqrt[n]{\|x^{l_n}\|\|x^{k_nm}\|}\leq(\|x\|^{l_n}\|x^m\|^{k_n})^{\frac{1}{n}}$$

$$\leq\|x\|^{\frac{l_n}{n}}(r+\varepsilon)^{\frac{mk_n}{n}}$$

因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|x^n\|}\leq r+\varepsilon$$

再令$\varepsilon\to 0$, 就得到(1.18). 证毕.

显然, 定理10对赋范代数也是成立的. 特别有如下的系.

系　设$T\in\mathfrak{B}(X\to X)$, 那末极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}$$

存在, 并且等于$\inf\limits_{n\geq 1}\sqrt[n]{\|T^n\|}$.

习　题

1. 在例1中, 如果规定向量$x=\sum\limits_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu$的范数为$\|x\|=\max\limits_{\nu}|x_\nu|$, 求出

例 1 中算子 T 的范数；如果规定向量 x 的范数为

$$\|x\|=\left(\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

证明例 1 中算子的范数适合

$$\max_{\nu}\left(\sum_{\mu=1}^{n}|t_{\mu\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|T\|\leqslant\left(\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}|t_{\mu\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2. 作赋范线性空间 $l^p\,(\infty>p>1)$ 中算子 T 如下：当 $x=\{x_\nu\}\in l^p$ 时，$Tx=\{y_\mu\}$，其中

$$y_\mu=\sum_{\nu=1}^{\infty}t_{\mu\nu}x_\nu,\quad \mu=1,2,\cdots$$

而且 $\sum_{\mu}\left(\sum_{\nu}|t_{\mu\nu}|^q\right)^{\frac{p}{q}}<\infty$，$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$. 证明 T 是 l^p 上有界线性算子. 又问 l^p 上有界线性算子是否都是这个形式.

3. 设 $K(x,y)\in L^q(R^2,m)$、$f(y)\in L^p(R^1,m)$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$. 证明

$$T:\ f(x)\longmapsto\varphi(x)=\int K(x,y)f(y)dy$$

是 $L^p(R^1,m)\longrightarrow L^q(R^1,m)$ 的有界线性算子.

4. T 是 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的积分算子：

$$(T\varphi)(s)=\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt,\quad \varphi\in C[a,b]$$

其中 $K(s,t)$ 是 $[a,b]\times[a,b]$ 上二元连续函数. 证明

$$\|T\|=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b|K(s,t)|dt$$

5. 设 T 是 $C[a,b]$ 上有界线性算子，记

$$Tt^n=f_n(t),\quad n=0,1,2,\cdots$$

证明 T 完全由函数列 $\{f_n(t)\}$ 唯一确定.

6. 设 T 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的线性算子. 如果 T 的零空间 $\mathscr{N}(T)=\{x|Tx=0\}$ 是闭集，问 T 是否有界？当 T 是有界算子时，$\mathscr{N}(T)$ 是闭集吗？

7. 证明 $\frac{d}{dx}$ 是 $C^k[a,b]$（k 是自然数，参见第四章 § 1 的例 3 和 § 2 例

12)到 $C[a, b]$的连续线性算子,并求出它的范数.

8. 在复 $C^k[0, 1]$(k 是自然数)定义

$$\|x\| = \sup_{t\in[0,1]} \sum_{i=0}^{k} \frac{|x^{(i)}(t)|}{i!}$$

采用通常的加、乘运算,证明 $C^k[0, 1]$是具有幺元的 Banach 代数.

9. 令 $K^{(n)}$表示次数不超过 n 的复系数多项式 $x=\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ 全体,加、乘运算如通常的,但乘时出现超过 n 次的项当作零. 取 $\|x\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, 证明 $K^{(n)}$是具有幺元的 Banach 代数.

10. 在绝对收敛级数 $a=\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n$ 全体 l_1 上, 规定"乘法"如下: 当 $a=\{\alpha_n\}$, $b=\{\beta_n\}\in l_1$ 时,

$$ab = \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-m}\beta_m \right\}$$

加法、数乘如通常的. 并规定 $\|a\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|$. 证明 l_1 是具有幺元的Banach 代数.

11. 在 l' 空间上定义乘法如下: 当 $a=\{\alpha_n\}$、$b=\{\beta_n\}\in l'$ 时,

$$ab=\{\alpha_n\beta_n\}$$

证明 l' 是 Banach 代数, 但没有幺元. 并求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|a^n\|}$.

12. 设 X 是赋范线性空间.

(i) 如果 T 是 X 上有界线性算子, 那末必有常数 λ(例如取 $|\lambda| > \|T\|$), 对任何自然数 n $(T-\lambda I)^n \neq 0$.

(ii) 证明不存在 X 上两个有界线性算子 A、B, 使得$[A, B]=I$(这里$[A, B]=AB-BA$, 称为 A、B 的**交换子**. (提示: 用反证法, 利用(i), 可不妨设 $B^n\neq 0$ $(n=1, 2, \cdots)$, 否则用$(B-\lambda I)$代替 B. 然后算出$[A, B^n]=nB^{n-1}$, 由此找出矛盾.)

13. 设 T 是线性空间 X 到线性空间 Y 的线性算子, $A\subset \mathscr{D}(T)$, 并且是凸集, 证明 TA 是 Y 上的凸集. 如果 X、Y 都是赋范线性空间, T 是连续线性算

子($\mathscr{D}(T)=X$)问当 A 是凸闭集时，TA 是否是闭集.

14. f 是实赋范线性空间 X 上的线性泛函，c 为实数. 证明

(i) 超平面 $L_c(f)$ 和超平面 $L_c(f)$ 决定的半空间：$\{x|f(x)\geqslant c\}$、$\{x|f(x)\leqslant c\}$、$\{x|f(x)>c\}$、$\{x|f(x)<c\}$等都是凸集；

(ii) 当 f 连续时，$L_c(f)$、$\{x|f(x)\geqslant c\}$、$\{x|f(x)\leqslant c\}$是闭的，$\{x|f(x)>c\}$、$\{x|f(x)<c\}$是开的；

(iii) $L_c(f)$ 和半空间中任何一个具有非空的核时，f 必连续.

§2　连续线性泛函的表示及延拓

1. 连续线性泛函的表示　为了应用泛函分析的一般理论于具体场合，如果能知道具体空间上连续线性泛函的一般形式，即具体了解一个线性空间 X 的共轭空间 X^* 中每个元素的形式将是重要的. 在这一段中我们要把一些常用的空间如 l^p、$L^p[a,b]$等等的共轭空间表示出来.

首先我们引入同构概念.

定义　设 X、Y 是两个赋范线性空间. U 是 X 到 Y 的映照，而且对一切 $x\in X$，有 $\|Ux\|=\|x\|$，那末称 U 是 X 到 Y 的一个**保范算子**. 如果 U 不但是保范的，又是线性的，而且还实现 X 到 Y 上的一一对应，那末我们就称 U 是 X 到 Y 上的(保范)**同构映照**. 如果空间 X、Y 之间存在一个从 X 到 Y 上的(保范)同构映照，我们就称 X 和 Y **同构**.

如果

$$U: x\longmapsto Ux$$

是实现了 X 到 Y 的一个同构，我们把 x 与 Ux 同一化(即把 x 与 Ux 视为同一的)，那末就可以把 X 和 Y 同一化而不加区别.

在泛函分析中，常把两个同构的空间同一化，这是泛函分析中一个基本的观念.

一般说来，一个抽象的赋范线性空间，如果能与一个具体的赋

范线性空间同构，我们就把这个具体空间的形式称为抽象空间的一个表示. 所谓赋范线性空间X上连续线性泛函的表示，就是研究X^*这个赋范线性空间能和怎样的具体空间实现同构. 这类问题的研究方法通常是：先在X中取适当的元素集$\mathfrak{S}$，使得$\mathfrak{S}$中元素的线性组合在X中稠密. 这种元素集$\mathfrak{S}$称做赋范线性空间X中的**母元组**. 先把泛函f在$\mathfrak{S}$上的形式表示出来，再利用$\mathfrak{S}$中元素的线性组合在X中的稠密性以及f的连续性，从而把f在X上的形式表示出来.

（一）l^1的共轭空间$(l^1)^*$是l^∞.

l^1是满足$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|<\infty$的数列$x=(x_1, x_2, \cdots)$全体按通常线性运算和范数$\|x\|_1=\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu|$所成的Banach空间. l^∞是有界数列$x=(x_1, x_2, \cdots)$全体按通常线性运算和范数$\|x\|_\infty=\sup_n|x_n|$所成的Banach空间. （见第四章§2）.

在l^1中取$\mathfrak{S}$为一列“单位”向量$e_n=(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$，$n=1, 2, \cdots$. 因此对任何$x=(x_1, x_2, \cdots)\in l^1$，显然

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}x_\nu e_\nu$$

对任何$f\in(l^1)^*$，记$\eta_\nu=f(e_\nu)(\nu=1, 2, \cdots)$. 显然，$|\eta_\nu|\leqslant\|f\|\|e_\nu\|_1=\|f\|$，因此$\eta\in l^\infty$，而且

$$\|\eta\|_\infty\leqslant\|f\| \tag{2.1}$$

作$(l^1)^*\to l^\infty$的映照U：$f\longmapsto\eta=(f(e_1), \cdots, f(e_n), \cdots)$. 显然，$U$是线性映照，易知非零元$f$映照成非零元$\eta=Uf$，并且$\|Uf\|_\infty\leqslant\|f\|$.

为了证明U是$(l^1)^*$到l^∞的同构映照，现在仅需再证$U(l^1)^*=$

l^∞，并且$\|Uf\|\geqslant\|f\|$：对任何$\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n,\cdots)\in l^\infty$，由于$\sup\limits_n|\eta_n|=\|\eta\|_\infty<\infty$以及$x=(x_1,\cdots,x_n\cdots)\in l^1$时，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i$是绝对收敛级数，所以$\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}x_\nu\eta_\nu$也是绝对收敛级数，因而

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}x_\nu\eta_\nu \tag{2.2}$$

可以视为l^1上的泛函，显然f是线性泛函，而且

$$|f(x)|\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu\eta_\nu|\leqslant\|\eta\|_\infty\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu|=\|\eta\|_\infty\|x\|_1$$

即f是l^1上的连续线性泛函，而且

$$\|f\|\leqslant\|\eta\|_\infty \tag{2.3}$$

由(2.2)所定义的泛函f显然是满足$f(e_i)=\eta_i(i=1,2,\cdots)$，即$Uf=\eta$. 这说明$U(l^1)^*=l^\infty$. 根据(2.3)还有$\|Uf\|_\infty\geqslant\|f\|$.

既然$(l^1)^*$和l^∞同构，我们把$(l^1)^*$和l^∞同一化，所以可以说l^1的共轭空间是l^∞，即$(l^1)^*=l^\infty$. 读者应特别注意，$(l^1)^*=l^\infty$只是同构意义下的等式，所以在运用这些“等式”去探讨其它问题时，还必须把同构映照同时加以考虑. 忽视这一点将会发生错误，今后有关共轭空间表示的等式都应注意这一点. 有的书中常用“$\cong$”代替“$=$”，以示区别.

（二）$l^p(1<p<+\infty)$的共轭空间$(l^p)^*$是$l^q\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1\right)$.

l^p是满足$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty$的数列$(x_1,x_2,\cdots)$的全体，是按$\|x\|_p=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$所成的Banach空间，$\mathfrak{S}$的取法和$l^1$的情况一样. 对任

何$f\in(l^p)^*$，仍记$\eta_\nu=f(e_\nu)$，$\nu=1,2,\cdots$. 先证$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\eta_\nu|^q<\infty$：作点列$x^{(m)}=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots)$如下：令$\theta_\nu=\arg\eta_\nu$，

$$x_\nu^{(m)}=\begin{cases}|\eta_\nu|^{q-1}e^{-i\theta_\nu}, & \nu\leqslant m\\ 0, & \nu>m\end{cases}$$

显然，$x^{(m)}\in l^p$，由此得到

$$f(x^{(m)})=\sum_{\nu=1}^{\infty}x_\nu^{(m)}\eta_\nu=\sum_{\nu=1}^{m}|\eta_\nu|^q$$

$$\|x^{(m)}\|_p=\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{\nu=1}^{m}|\eta_\nu|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

根据$\dfrac{|f(x^{(m)})|}{\|x^{(m)}\|_p}\leqslant\|f\|$得到

$$\left(\sum_{\nu=1}^{m}|\eta_\nu|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|$$

再令$m\to\infty$，便得到$\eta\in l^q$，而且

$$\|\eta\|_q\leqslant\|f\| \tag{2.4}$$

这时，对任何$x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^p$，由Hölder不等式得到

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\eta_\nu x_\nu|\leqslant\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|\eta_\nu|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|\eta\|_q\|x\|_p \tag{2.5}$$

即$\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu x_\nu$是绝对收敛级数. 因此，由

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu \text{和} f(x)=\lim_{n\to\infty}f\left(\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu\right)$$

得到f的与(2.2)形式上完全相同的表达式

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu x_\nu \tag{2.2}$$

作$(l^p)^*\to l^q$的算子

$$U:\ f\longmapsto(f(e_1),f(e_2),\cdots,f(e_n),\cdots)$$

显然U是一对一线性的，并且$\|Uf\|\leqslant\|f\|$.

反过来，对任何$\eta\in l^q$，由(2.5)就保证用(2.2)的方式定义的f是l^p上一个线性泛函，由(2.5)又得到

$$\|f\|\leqslant\|\eta\|_q \tag{2.6}$$

即由(2.2)定义的f是l^p上连续线性泛函.

显然，$f(e_i)=\eta_i$，即$\mathscr{R}(U)=l^q$，从(2.4)、(2.6)容易知道U是$(l^p)^*$到l^q上保范线性算子. 在同一化的意义下，就得到$(l^p)^*=l^q$.

我们注意，当$p>1,q>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$时，称$p$、$q$是一对**对偶数**，如果把$p=1,q=\infty$也算作满足$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$的一对对偶数，那末$(l^1)^*=l^\infty$就成为$(l^p)^*=l^q(\infty>p\geqslant1,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1)$的特殊情况. 此外还有$(l^2)^*=l^2$，即$l^2$的共轭空间就是自身. 读者还应注意$(l^\infty)^*$并不就是$l^1$（参见本章§3习题4），而$c_0$的共轭空间才是$l^1$（见本节习题11）.

下面用类似的方法考察函数空间.

（三）$L^p[a,b]$（$1\leqslant p<\infty$）的共轭空间是$L^q[a,b]$ $\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$.

先证$p>1$的情况. 利用积分的 Hölder 不等式，易知对任意给定$\beta(t)\in L^q[a,b]$，

$$f(x)=\int_a^b x(t)\beta(t)\,dt,\quad x(t)\in L^p[a,b] \tag{2.7}$$

是$L^p[a,b]$上连续线性泛函，并且$\|f\|\leqslant\|\beta\|_q$.

作$L^q[a,b]\to L^p[a,b]$的算子U^{-1}：$\beta(t)\longmapsto f$. 显然U^{-1}是

线性的、一对一的算子，并且 $\|U^{-1}\beta\| \leqslant \|\beta\|_q$. 我们仅再需证明：(i) $L^p[a,b]$ 上任何连续线性泛函 f，必存在 $\beta(t) \in L^q[a,b]$，使 (2.7) 成立；(ii) $\|\beta\|_q \leqslant \|f\|$.

对任何 $t \in [a,b]$，令 $[a,t]$ 的特征函数为

$$u_t(\xi) = \begin{cases} 1, & a \leqslant \xi \leqslant t \\ 0, & t < \xi \leqslant b \end{cases}$$

由于 $[a,b]$ 上任何阶梯函数必可表示成 $\{u_t \mid t \in [a,b]\}$ 的线性组合，根据第四章 §6 知道，$\{u_t \mid t \in [a,b]\}$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密. 取 $\widetilde{S}$ 为 $\{u_t \mid t \in [a,b]\}$. 对任何给定的 $f \in (L^p[a,b])^*$，令 $g(t) = f(u_t)$. 由于 $u_a = 0$，所以 $g(a) = 0$. 下面证明 $g(t)$ 是全连续函数：设 $\{\delta_j = (\tau_j, t_j) \mid j = 1, 2, \cdots, n\}$ 是 $[a,b]$ 中互不相交开区间，令 $\varepsilon_j = e^{-i\theta_j}$（这里 $\theta_j = \arg(g(t_j) - g(\tau_j))$）就有

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |g(t_j) - g(\tau_j)| &= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (g(t_j) - g(\tau_j)) \\
&= f\left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (u_{t_j} - u_{\tau_j})\right) \\
&\leqslant \|f\| \left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (u_{t_j} - u_{\tau_j})\right\|_p \\
&\leqslant \|f\| \left(\int_{\bigcup_j \delta_j} 1 d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\| \left(\sum_{j=1}^{n} (t_j - \tau_j)\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

由此可知 $g(t)$ 是 $[a,b]$ 上全连续函数.

当 φ 是阶梯函数，等价地，即存在分点组 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$，和数 $c_1, \cdots, c_m$，$\varphi(\xi) = \sum_{k=1}^{m} c_k (u_{t_k}(\xi) - u_{t_{k-1}}(\xi))$ 时，由于 f 是

线性泛函. 所以

$$f(\varphi)=\sum_{k=1}^{m}c_k(g(t_k)-g(t_{k-1}))=\sum_{k=1}^{m}c_k\int_{t_{k-1}}^{t_k}g'(t)dt$$

$$=\int_a^b\varphi(t)g'(t)dt \tag{2.8}$$

下面证明(2.8)对$[a,b]$上有界勒贝格可测函数φ也成立. 事实上, 对任何有界勒贝格可测函数φ, 必存在常数$M>0$, 以及一列阶梯函数$\{\varphi_n\}$, 使得$|\varphi(\xi)|\leq M$, $|\varphi_n(\xi)|\leq M$, 并且$\varphi(\xi)\stackrel{\cdot}{=}_{m}\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(\xi)$. 因此, 由勒贝格积分控制收敛定理得到

$$\|\varphi-\varphi_n\|_p=\left(\int_a^b|\varphi(\xi)-\varphi_n(\xi)|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}\to 0$$

因为f是$L^p[a,b]$上连续线性泛函, 所以$f(\varphi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(\varphi_n)$. 另一方面, 利用(2.8)对$\varphi_n$成立, 并注意到$|\varphi_n(t)g'(t)|\leq M|g'(t)|$. $g'(t)$是可积的, 从而可以用控制收敛定理得到

$$f(\varphi)=\lim_{n\to\infty}f(\varphi_n)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(t)g'(t)dt$$

$$=\int_a^b\varphi(t)g'(t)dt$$

即(2.8)对有界勒贝格可积函数成立.

再证明$g'(t)\in L^q[a,b]$: 令$\theta(t)=\arg g'(t)$, 作函数列

$$h_n(t)=\begin{cases}|g'(t)|^{q-1}e^{-i\theta(t)}, & \text{当 } |g'(t)|^q\leq n \text{ 时;}\\ 0, & \text{其它的 } t,\ n=1,2,\cdots\end{cases}$$

对每个有界可测函数h_n, 应用(2.8),

$$\int_a^b\{|g'(t)|^q\}_n dt=f(h_n)\leq\|f\|\|h_n\|_p$$

$$\leq\|f\|\left(\int_a^b\{|g'(t)|^q\}_n dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

这里

$$\{|g'(t)|^q\}_n=\begin{cases}|g'(t)|^q, & \text{当 } |g'(t)|^q\leqslant n;\\ 0, & \text{其它的 } t,\quad n=1,2,\cdots\end{cases}$$

从而

$$\left(\int_a^b\{|g'(t)|^q\}_n dt\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|$$

再令 $n\to\infty$，便得到 $g'(t)\in L^q[a,b]$，并且

$$\|g'\|_q\leqslant\|f\| \tag{2.9}$$

相应于给定的 f，如取 $\beta=g'$，根据(2.9)，易知，为了 β 适合(i)、(ii)要求，仅需证明对一切 $\varphi\in L^p[a,b]$，(2.8) 成立就可以了。作泛函

$$F(\varphi)=\int_a^b\varphi(t)g'(t)dt$$

因为 $g'\in L^q[a,b]$，所以 $F\in(L^p[a,b])^*$. 由于 $[a,\ b]$ 上有界勒贝格可测函数全体在 $L^p[a,\ b]$ 中稠密，所以对每个 $\varphi\in L^p[a,b]$，必有有界可测函数列 $\{\varphi_n\}$，使得 $\|\psi_n-\varphi\|_p\to0$. 又因为 $f(\psi_n)=F(\psi_n)$ 以及 f、F 都是连续泛函，所以

$$f(\varphi)=\lim_{n\to\infty}f(\psi_n)=\lim_{n\to\infty}F(\psi_n)=F(\varphi)$$

$$=\int_a^b\varphi(t)g'(t)dt$$

因此，当 $p>1$ 时，$L^p[a,b]$ 的共轭空间是 $L^q[a,b]$.

在 $p=1$，$q=\infty$ 的情况可以完全类似地证明. 所要注意的是：$\|\beta\|_\infty$ 的定义是

$$\|\beta\|_\infty=\inf_{\substack{m(E)=0\\ E\subset[a,b]}}\ \sup_{t\in[a,b]-E}|\beta(t)|$$

泛函的一般形式仍是(2.7).

特别 $(L^2[a,b])^*=L^2[a,b]$（即 $L^2[a,\ b]$ 是自共轭的）. 然而 $(L^\infty[a,b])^*$ 并不是 $L^1[a,b]$. 这一点我们将在§3中证明.

在常见的函数空间中还有一个重要的赋范线性空间 $C[a,b]$，

要获得它的连续线性泛函的一般形式，需要用到赋范线性空间中一个基本定理，即泛函延拓定理.

2. 连续线性泛函的延拓 设X是赋范线性空间，G是它的子空间，如果已知f是定义在G上的连续线性泛函，我们要研究如何把f延拓成整个X上的连续线性泛函F，并且保持范数不变. 就是说：$F(x)=f(x)$，$x\in G$，而且$\|f\|_G=\|F\|$. 这里

$$\|f\|_G=\sup_{\substack{x\in G\\ \|x\|=1}}|f(x)|$$

自然更一般地对算子也有延拓的问题.

定义 设X、Y是赋范线性空间，A是$\mathscr{D}(A)(\subset X)$到$Y$中的线性算子，又设$G\subset\mathscr{D}(A)$. 如果

$$\|A\|_G=\sup_{\substack{x\in G\\ \|x\|=1}}\|Ax\|$$

是有限数，称A在G上有界，又称$\|A\|_G$为A在G上的范数.

设A、B是赋范线性空间X的子空间到赋范线性空间Y的两个有界线性算子，如果B是A的延拓（即$\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{D}(B)$，并且对$x\in\mathscr{D}(A)$时，$Ax=Bx$），那末

$$\|B\|=\sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(B)\\ \|x\|=1}}\|Bx\|\geqslant\sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(A)\\ \|x\|=1}}\|Ax\|=\|A\|$$

所以算子延拓时范数不会减少.

定理1 设X是任一赋范线性空间，Y是Banach空间，又设G是X的稠密的线性子空间，A是G到Y的有界线性算子. 那末A必可延拓成X到Y的有界线性算子B，并且保持范数不变，即$\|B\|=\|A\|$.

证 设$x\in X$，必有G中一列元素$\{x_n\}$，使$x_n\to x$. 由于

$$\|Ax_n-Ax_m\|\leqslant\|A\|\|x_n-x_m\|$$

而且$\{x_n\}$是X中的基本点列，因此$\{Ax_n\}$是Y中的基本点列. 由Y的完备性，点列$\{Ax_n\}$必有极限. 在X上定义算子B如下：对每个

$x\in X$，规定

$$Bx=\lim_{n\to\infty}Ax_n \tag{2.10}$$

今证这样定义的Bx不依赖于$\{x_n\}$的选取. 事实上，如果$x'_n\to x$，那末由$\|x_n-x'_n\|\to 0$，立即可以得到$\|Ax_n-Ax'_n\|\to 0$. 所以$Bx=\lim\limits_{n\to\infty}Ax'_n$，即$Bx$有确定的意义，特别当$x\in G$时，取$x_n=x$，$n=1, 2, \cdots$，就立即可以知道$B$是$A$的延拓. 又根据极限具有线性，即可得出$B$是$X$上的线性算子.

再由前述，延拓时范数不会减少，所以$\|B\|\geqslant\|A\|$，但另一方面，由(2.10)得到

$$\|Bx\|=\lim_{n\to\infty}\|Ax_n\|\leqslant\|A\|\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|A\|\|x\|$$

所以B是有界算子，而且$\|B\|\leqslant\|A\|$. 所以$\|B\|=\|A\|$.

再证这种延拓的唯一性. 事实上，如果A又可延拓成另一个有界线性算子C，那末对任一点$x\in X$，取$x_n\in G$，$x_n\to x$，在x_n上$Bx_n=Ax_n=Cx_n$，由B，C的连续性，即得

$$Bx=\lim_{n\to\infty}Bx_n=\lim_{n\to\infty}Cx_n=Cx$$

证毕.

上述定理自然对于泛函完全适用. 利用这种延拓，我们就不妨设有界线性算子A的定义域$\mathscr{D}(A)$总是X的闭子空间，因为如果不然，总可以把A唯一地延拓到$\overline{\mathscr{D}(A)}$上去. 这种延拓定理虽很重要，但从可延拓性来看，却是明显的. 如果$\overline{\mathscr{D}(A)}$不是全空间$X$，一个算子能否保持范数不变地延拓到$X$上去却是一个复杂的问题. 对于连续线性泛函是肯定地回答了这个问题，这就是下面的基本定理，在泛函分析中常常用到它.

定理 2 (哈恩-巴拿赫，Hahn-Banach) 设X是赋范线性空间，G是X的线性子空间，对于给定在G上任一有界线性泛函f，必可以作出X上的有界线性泛函F，使它满足条件：

(i) 当$x\in G$时，$F(x)=f(x)$；

(ii) $\|f\|_G=\|F\|$.

为了证明这个定理，先证明一个引理.

引理1　设X是实的赋范线性空间，A是X的线性子空间，$g(x)$为子空间A上的实连续线性泛函．对于任一向量$x_0\in X-A$，设A_1是A与x_0张成的线性子空间．那末在A_1上必有连续线性泛函g_1，使得

(i) 当$x\in A$时，$g_1(x)=g(x)$；

(ii) $\|g_1\|_{A_1}=\|g\|_A$.

证　A_1中的元素y形如$x+tx_0$ ($x\in A$，t是实数)．由于$x_0\bar{\in} A$，A_1中的元素y通过表示式

$$y=x+tx_0,\quad x\in A,\ -\infty<t<\infty \tag{2.11}$$

由y唯一确定了x及t．事实上，如果又有$y=x'+t'x_0$，$x'\in A$，$t'\in(-\infty,\infty)$．当$t\neq t'$时，$x_0=\dfrac{x'-x}{t-t'}\in A$，这是不可能的，因而只有$t=t'$．由此得到$x=x'$．此后$A_1$中的元素总是分解成(2.11)的形式.

我们先分析一下，如果g可以延拓成A_1上的线性泛函g_1，那末由g_1的线性，g_1的形式必然是这样的：当$x\in A$时，$g_1(x+tx_0)=g_1(x)+tg_1(x_0)=g(x)+tg_1(x_0)$．因此，我们在$A_1$上作泛函$g_1$如下：对于$y=x+tx_0\in A_1$，$x\in A$，$t\in(-\infty,\infty)$．规定

$$g_1(y)=g(x)+tc$$

利用(2.11)分解的唯一性，就知道g_1在A_1上有确定意义，而且是A_1上的线性泛函[①]．此时$c=g_1(x_0)$，而且条件(i)成立．现在就是要

---

① 如果$y_1=x_1+t_1x_0$，$y_2=x_2+t_2x_0$，α、β是数，那末

$$\alpha y_1+\beta y_2=(\alpha x_1+\beta x_2)+(\alpha t_1+\beta t_2)x_0$$

因此

$$g_1(\alpha y_1+\beta y_2)=g(\alpha x_1+\beta x_2)+(\alpha t_1+\beta t_2)c=\alpha g_1(y_1)+\beta g_1(y_2)$$

取适当的c，使得(ii)成立.

由于有界线性泛函延拓时范数不会减少：$\|g_1\|_{A_1}\geqslant\|g\|_A$. 所以只要证明可以选取 c，使得它适合不等式

$$|g(x)+tc|\leqslant\|g\|_A\|x+tx_0\| \quad (x\in A,\ -\infty<t<\infty) \tag{2.12}$$

事实上，只要取 c，使不等式

$$g(x)+tc\leqslant\|g\|_A\|x+tx_0\| \tag{2.13}$$

对任何 $x\in A$, $t\in(-\infty,\infty)$成立就可以了. 因为在(2.13)中换 x 为 $-x$, t 为$-t$，就得

$$g(x)+tc\geqslant-\|g\|_A\|x+tx_0\| \tag{2.14}$$

把(2.13)以及由它推出的(2.14)结合起来便是(2.12).

现在解不等式(2.13)：当 $t=0$ 时，对一切 c，(2.13)式成立. 当 $t>0$ 时，记 $u=\frac{x}{t}$，那末(2.13)式等价于

$$c\leqslant\|g\|_A\|u+x_0\|-g(u), \quad u\in A \tag{2.15}$$

当 $t<0$ 时，记$u'=\frac{x}{-t}$，那末(2.13)等价于

$$g(u')-\|g\|_A\|u'-x_0\|\leqslant c, \quad u'\in A \tag{2.16}$$

因此，只要能取到 c，使得(2.15)、(2.16)成立，那末(2.13)就是可解的.

下面证明可以取到 c 使(2.15)、(2.16)成立. 由于当 u, $u'\in A$ 时

$$\begin{aligned}g(u)+g(u')=g(u+u')&\leqslant\|g\|_A\|u+u'\|\\&\leqslant\|g\|_A(\|u+x_0\|+\|u'-x_0\|)\end{aligned}$$

所以，对任意的 $u, u'\in A$ 成立着

$$g(u')-\|g\|_A\|u'-x_0\|\leqslant\|g\|_A\|u+x_0\|-g(u) \tag{2.17}$$

如果记

$$M(x_0)=\inf_{u\in A}\{\|g\|_A\|u+x_0\|-g(u)\}$$

$$m(x_0)=\sup_{u'\in A}\{g(u')-\|g\|_A\|u'-x_0\|\}$$

根据(2.17)得到 $M(x_0)\geqslant m(x_0)$. 因此只要任意取一个 c，适合 $M(x_0)\geqslant c\geqslant m(x_0)$，那末(2.15)、(2.16)成立，因此(2.13)成立. 从而(2.12)成立，这样作的 g_1 使(ii)成立. 证毕.

定理 2 的证明 (I) 先假设 X 是实的赋范线性空间，f 是实的线性泛函，在此情况下来证明本定理. 如果子空间 $G\neq X$，首先在 G 外任取一个 x_1，设 G 与 x_1 张成的子空间记为 G_1，由引理 1，必可把 f 延拓成 G_1 上有界线性泛函 f_1，而且保持 $\|f\|_G=\|f_1\|_{G_1}$. 如果 G_1 仍然不是 X，再在 G_1 外取一个 x_2，它和 G_1 张成 G_2，再由引理 1 将 f_1 延拓成 G_2 上有界线性泛函 f_2，且 $\|f\|_G=\|f_1\|_{G_1}=\|f_2\|_{G_2}$. 如此继续下去，最后总可以延拓成全空间的有界线性泛函，且保持范数不变.

然而上述的证明是不严格的，因为延拓的手续是无限的，一般说，不属普通数学归纳法所能证明的范畴. 为了把这种无限延拓过程的可能性确切地表述出来，我们用 Zorn 引理加以论证.

设 $\mathscr{F}$ 是满足下面三个条件的线性泛函 g 的全体:

(i) $\mathscr{D}(g)$ 是 X 的线性子空间;

(ii) g 是 f 的延拓，即 $\mathscr{D}(g)\supset G$，而且当 $x\in G$ 时，$g(x)=f(x)$;

(iii) g 在定义域 $\mathscr{D}(g)$ 上有界，而且 $\|g\|_{\mathscr{D}(g)}=\|f\|_G$.

再在 $\mathscr{F}$ 中规定顺序如下：如果 g_1、$g_2\in\mathscr{F}$，而 g_1 是 g_2 的延拓(即 $\mathscr{D}(g_1)\supset\mathscr{D}(g_2)$，而且当 $x\in\mathscr{D}(g_2)$ 时，$g_1(x)=g_2(x)$)就规定

$$g_2\prec g_1$$

显然，这确实是 $\mathscr{F}$ 中的一个顺序. 设 $\mathscr{T}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的一个全序集，我们要证明 $\mathscr{T}$ 必有上界. 作一线性泛函 h 如下：h 的定义域 $\mathscr{D}(h)$ 规定为

$$\bigcup_{g\in\mathscr{T}}\mathscr{D}(g)$$

当 $x\in\mathscr{D}(h)$时，必有一个 $g\in\mathscr{T}$，使得 $x\in\mathscr{D}(g)$，这时规定 $h(x)=g(x)$.

今证 h 是$\mathscr{T}$的一个上界：(1) 首先证明 h 有确定意义，即如果 $x\in\mathscr{D}(h)$，并且有 g_1、$g_2\in\mathscr{T}$，使得 $x\in\mathscr{D}(g_1)\cap\mathscr{D}(g_2)$时，必然有 $g_1(x)=g_2(x)=h(x)$. 事实上，由于$\mathscr{T}$是全序集，不妨设 $g_2\prec g_1$，因此 $g_1(x)=g_2(x)$.

(2) 其次证 h 是线性泛函. 因为如果 x、$y\in\mathscr{D}(h)$，必有 g_1、$g_2\in\mathscr{T}$，使得 $x\in\mathscr{D}(g_1)$，$y\in\mathscr{D}(g_2)$. 由于$\mathscr{T}$是全序集，不妨设 $g_2\prec g_1$，这时 x、$y\in\mathscr{D}(g_1)$，因此对任何数 α、β

$$h(\alpha x+\beta y)=g_1(\alpha x+\beta y)=\alpha g_1(x)+\beta g_1(y)=\alpha h(x)+\beta h(y)$$

(3) 证 h 为 f 的延拓. 因为 $x\in G$ 时，对任何一个 $g\in\mathscr{T}$，$g(x)=f(x)$，自然 $h(x)=f(x)$.

(4) 证$\|h\|=\|f\|_G$. 如果 $x\in\mathscr{D}(h)$，必有 $g\in\mathscr{T}$，使得 $h(x)=g(x)$，所以

$$|h(x)|\leqslant\|g\|\|x\|=\|f\|_G\|x\|$$

即 h 为 $\mathscr{D}(h)$ 上有界线性泛函，而且$\|h\|\leqslant\|f\|_G$. 但泛函延拓时范数不会减少，所以$\|h\|=\|f\|_G$.

(5) 证 h 是$\mathscr{T}$的上界. 当 $g\in\mathscr{T}$ 时，显然 $\mathscr{D}(g)\subset\mathscr{D}(h)$，从 h 的定义知道对于任何 $x\in\mathscr{D}(g)$，$h(x)=g(x)$，即 $g\prec h$.

由 Zorn 引理知道，在$\mathscr{F}$中有极大元. 设 F 是$\mathscr{F}$的一个极大元. 只要证明 $\mathscr{D}(F)=X$ 好了.

如果 $\mathscr{D}(F)\neq X$，分别把 $\mathscr{D}(F)$、F 看成引理中的 A 与 g，根据引理必有 $g_1\in\mathscr{F}$，$F\prec g_1$，而且 $\mathscr{D}(g_1)$确实比 $\mathscr{D}(F)$大，即 $g_1\neq F$. 这和 F 是极大元冲突. 所以 $\mathscr{D}(F)=X$. 因而 F 就满足定理的要求.

当空间 X 是可析空间时，证明这个定理可以不利用 Zorn 引理. 事实上，由于 X 可析，所以有点列 x_1、x_2、…、x_n、…，它在 X 中稠密. 作 G 与 x_1 的线性和得到 G_1，再作 G_1 与 x_2 的线性和，如此

继续下去得到一列线性空间 G_n, $n=1,2,\cdots$

$$G\subset G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G_n\subset\cdots$$

利用引理 1，顺次地把 f 延拓到 G_1、G_2、$\cdots$. 得到线性泛函序列 f_1、f_2、$\cdots$，使得当 $m\leqslant n$ 时，f_n 是 f_m 的延拓，而且对每个 n，$\|f_n\|_{G_n}=\|f\|_G$. 令

$$G_\omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$$

在 G_ω 上作泛函 f_ω 如下：当 $x\in G_n$ 时

$$f_\omega(x)=f_n(x)$$

易知 f_ω 是 G_ω 上的有界线性泛函，而且是 f_n 的延拓. 因而是 f 在 G_ω 上的延拓. 显然 $\|f_\omega\|_{G_\omega}=\|f\|_G$. 由于 $\{x_n\}\subset G_\omega$，所以线性子空间 G_ω 在 X 中稠密. 再利用定理 1，f_ω 立即可以保持范数不变地延拓成 X 上有界线性泛函 F. 容易知道这个 F 就是定理中所要求的了.

(II) 现在证明当 X 是复空间时泛函延拓定理也成立. 对于任一复线性泛函 f 作

$$f_1(x)=\frac{f(x)+\overline{f(x)}}{2},\quad f_2(x)=\frac{f(x)-\overline{f(x)}}{2i}$$

分别称 f_1、f_2 为 f 的**实部**、**虚部**. 这时 f_1、f_2 是 $\mathscr{D}(f)$ 上的实线性泛函.

因为 f 本来是 $\mathscr{D}(f)$ 上的复线性泛函，所以 f 的实部、虚部都应该适合

$$i[f_1(x)+if_2(x)]=if(x)=f(ix)=f_1(ix)+if_2(ix)$$

取实部，当 $x\in\mathscr{D}(f)$ 时，$f_2(x)=-f_1(ix)$. 因此得到表达式：

$$f(x)=f_1(x)-if_1(ix),\ x\in\mathscr{D}(f)$$

这说明 f 可以由它的实部 f_1 完全决定出来. 因为

$$|f_1(x)|=|\mathrm{Re}f(x)|\leqslant|f(x)|\leqslant\|f\|\|x\|$$

所以 f_1 是 X 上有界线性实泛函，且 $\|f_1\|\leqslant\|f\|$.

如果原来 f 是给定在 $G\subset X$ 上的，由于 X 本身也可以视为实空间，利用对实泛函已被证明的结果，立即得到 X 上的实连续线性泛函 F_1，使得 $F_1(x)=f_1(x)$，$x\in G$，且 $\|f_1\|_G=\|F_1\|$. 用 F_1 在 X 上作泛函 F：

$$F(x)=F_1(x)-iF_1(ix),\ x\in X$$

显然当 $x\in G$ 时，$F(x)=f(x)=f_1(x)-if_1(ix)$，并且

$$F(x+y)=F(x)+F(y)$$

如果 α 是实数，那末 $F(\alpha x)=\alpha F(x)$. 又因为

$$F(ix)=F_1(ix)+iF_1(x)=iF(x)$$

所以当 $\alpha+i\beta$ 为任一复数时，有

$$F((\alpha+i\beta)x)=F(\alpha x)+iF(\beta x)=(\alpha+i\beta)F(x)$$

因此 F 为复的线性泛函. 对任一点 $x\in X$，当 $F(x)\neq 0$ 时，令

$$\theta=\arg F(x)$$

那末

$$0\leqslant F(x)e^{-i\theta}=F(e^{-i\theta}x)=\operatorname{Re}(F(e^{-i\theta}x))=F_1(e^{-i\theta}x)$$
$$\leqslant\|f\|_G\|e^{-i\theta}x\|=\|f\|_G\|x\|$$

因此

$$|F(x)|=|e^{-i\theta}F(x)|\leqslant\|f\|_G\|x\|$$

即 $\|F\|\leqslant\|f\|_G$. 但是泛函延拓时，范数不会减少，由于 F 是 f 的延拓，所以有 $\|F\|=\|f\|_G$. 证毕.

注意，一般说来，G 上的一个有界线性泛函保持范数不变地延拓成 X 上有界线性泛函 F 时，可以有不止一种方式，即延拓不是唯一的.

例 1 设 $X=R^2$，即 X 是点 $x=(x_1,x_2)$ 的全体，$\|x\|=|x_1|+|x_2|$. 又设 $G=\{(x_1,0)\}$，f 是定义在 G 上的泛函：$f\{(x_1,0)\}=x_1$. 显然 f 是 G 上连续线性泛函，而且 $|f\{(x_1,0)\}|=|x_1|$

$=\|(x_1, 0)\|$，即 $\|f\|_G=1$. 然而，对任何数 β，X 上的连续线性泛函 $F\{(x_1, x_2)\}=x_1+\beta x_2$ 都是 f 的延拓. 由于

$$|F\{(x_1, x_2)\}|=|x_1+\beta x_2|\leqslant\max(1, |\beta|)\|(x_1, x_2)\|$$

所以只要 $|\beta|\leqslant 1$，F 都是 f 的保持范数不变的延拓.

我们还要强调两点：(i) 在定理的证明中并没有用到范数的如下性质："$\|x\|=0$ 蕴涵 $x=0$". 也就是说，在定理的假设中可以换范数为半范数. 所以定理 2 又可以改写成

定理 2′(Hahn-Banach)　设 X 是线性空间，G 是 X 的线性子空间，又设 X 上定义了一个半范数 $p(x)$，对于 G 上给定的任何一个线性泛函 f，当它满足条件

$$k=\sup_{x\in G,\ p(x)\leqslant 1}|f(x)|<\infty$$

时，f 必可延拓为 X 上的线性泛函 F，满足条件

$$\sup_{x\in X,\ p(x)\leqslant 1}|F(x)|=k$$

这是局部凸拓扑线性空间(赋半范线性空间)理论中的一个基本定理.

(ii) Hahn-Banach 定理是纯代数的，虽然它假设了线性空间上有范数或半范数. 但是定理的表述和证明过程都没有用到空间的任何拓扑性质(或极限概念). 对于定理的纯代数性质，在第 4 小节中将可进一步看出.

3. 泛函延拓定理的应用　泛函延拓定理是一个非常有用的定理，除了本节下面所介绍的而外，今后也是常常要用的. 下面利用 Hahn-Banach 定理证明满足一些特殊要求的有界线性泛函的存在性定理.

设 X 是赋范线性空间，G 是 X 的子空间，$x_0\in X$. 设 f 是 X 上的连续线性泛函，而且在 G 上为 0，那末必有

$$|f(x_0)|\leqslant\|f\|\rho(x_0, G)\tag{2.18}$$

这里 $\rho(x_0, G)$ 是 x_0 和子空间 G 的距离(见第四章 §4).

事实上,取一列 $x_n\in G$, 使得 $\|x_n - x_0\| \to \rho(x_0, G)$, 那末由范数定义,得到

$$|f(x_0)| = |f(x_n - x_0)| \leqslant \|f\| \|x_n - x_0\| \to \|f\| \rho(x_0, G)$$

反之,我们要问:是否存在不恒为零的连续线性泛函 f, 在 G 上为零,而且使得 (2.18) 式中等号成立? 这个问题的回答是肯定的.

定理 3 设 X 是赋范线性空间, G 是线性子空间, $x_0\in X$, 而且 $d = \rho(x_0, G) > 0$. 那末必存在 X 上的连续线性泛函 f 适合条件:

(i) 当 $x\in G$ 时 $f(x)=0$;

(ii) $f(x_0)=d$;

(iii) $\|f\|=1$.

证 考虑由 G 及 x_0 所张成的子空间 A. 由于 $x_0\overline{\in} G$, 所以 A 中任一元素 x 能唯一地表示成

$$x = x' + t x_0 \quad (x'\in G)$$

此时规定

$$g(x) = td$$

那末 g 是 A 上的线性泛函,而且 $g(x_0)=d$. 又当 $x\in G$ 时, $g(x)=0$. 所以 g 适合定理中的(i)、(ii). 由于

$$\|x\| = \|x' + t x_0\| = |t| \|x_0 + x'/t\| \geqslant |t| \rho(x_0, G)$$
$$= |t| d = |g(x)|$$

所以 g 是 A 上的有界泛函,且 $\|g\|_A \leqslant 1$.

根据 Hahn-Banach 定理,必有 X 上的连续线性泛函 f, 它是 g 的延拓,而且 $\|f\| = \|g\|_A$. 由于 f 是 g 的延拓,所以 f 也适合定理的(i)及(ii). 再由(2.18)

$$\|f\| \geqslant 1$$

从 $\|g\|_A \leqslant 1$ 便得到 $\|f\|=1$ 证毕

下面是常被引用的推论.

系 1　设X是赋范线性空间，对任何$x_0\in X, x_0\neq 0$，必存在X上的连续线性泛函f，适合

(i) $f(x_0)=\|x_0\|$;

(ii) $\|f\|=1$.

证　只要将定理 3 中的G取为$\{0\}$就可以了. 证毕.

因此，在任意非零赋范线性空间上，必存在非零的连续线性泛函，而且在无限维赋范线性空间中必有无限多个线性无关的连续线性泛函(见习题 7).

系 1 还具有如下几何意义：设Ω是实空间X的子集. 对X上的任何线性泛函f，作超平面$L_c=\{x\mid f(x)=c, x\in X\}$，$c$是实数. 如果对$\Omega$中所有的点成立着$f(x)\leqslant c$(或$f(x)\geqslant c$)，就称$\Omega$位于超平面$L_c$的一侧. 如果进一步有$x_0\in\Omega\cap L_c$，就说超平面$L_c$在$x_0$处支持着$\Omega$(图 5.2). 如果$\Omega$是$X$中的球$\{x\mid \|x\|\leqslant r\}$，系 1 便是说：在球面$\|x\|=r$上的每点$x_0$处，必存在一个在$x_0$处支持着$\Omega$的超平面$L_c$. 这是因为，当$x\in\Omega$时

$$f(x)\leqslant\|f\|\|x\|=r$$

而且$f(x_0)=\|x_0\|=r$.

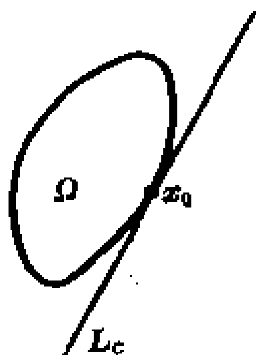


图 5.2

利用系 1 又得到一个重要的推论：

系 2　设X是赋范线性空间，对任何$x_0\in X$，那末

$$\|x_0\|=\sup_{\substack{\|f\|=1\\ f\in X^*}}|f(x_0)|$$

证　当$f\in X^*$，且$\|f\|=1$时，显然

$$|f(x_0)|\leqslant\|f\|\|x_0\|$$

由此立即得到 $\sup\limits_{\substack{\|f\|=1\\ f\in X^*}}|f(x_0)|\leqslant\|x_0\|$. 另一方面，根据系 1，必有 f，$\|f\|=1$，使得 $f(x_0)=\|x_0\|$，所以 $\sup\limits_{\substack{\|f\|=1\\ f\in X^*}}|f(x_0)|\geqslant\|x_0\|$. 证毕.

从上面讨论中可知泛函的延拓定理与凸集关系密切. 在局部凸拓扑线性空间上有如下重要结果.

定理 3' 设 A 是实局部凸拓扑线性空间 X 上凸闭集，如果 $x_0\overline{\in}A$，那末必存在连续线性泛函 f，使得(i) $f(x_0)=1$；(ii) 当 $x\in A$ 时，$f(x)<1$.

泛函延拓定理还有其它一些特定的形式，在本节的第 4 小节还将介绍一种形式，我们这里不拟多述，可参看[4].

现在利用连续线性泛函延拓定理来找出 $C[a,b]$ 上连续线性泛函的表示，即求出$(C[a,b])^*$(或简写成 $C[a,b]^*$) 的具体形式.

根据第三、四章的介绍知道 $V_0[a,b]$是赋范线性空间 $V[a,b]$ 的线性子空间，对于任何 $g\in V_0[a,b]$(即 g 是 $g(a)=0$，在(a,b)上右连续的有界变差函数)，作 $C[a,b]$ 上的泛函 F_g 如下:

$$F_g(x)=\int_a^b x(t)dg(t),\quad x\in C[a,b] \tag{2.19}$$

根据第三章 §8 的广义(带符号)测度论知道F_g是$C[a,b]$上的线性泛函，而且由第三章 §8 定理 3 的 4°知道 $|F_g(x)|\leqslant\int_a^b|x(t)||dg|\leqslant\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\bigvee_a^b(g)$，这就是说

$$|F_g(x)|\leqslant\|x\|\|g\| \tag{2.20}$$

这里的$\|g\|=\bigvee_a^b(g)$. 所以 F_g 是有界泛函，即 $F_g\in C[a,b]^*$，而且 $\|F_g\|\leqslant\|g\|$. 易知 $U:g\longmapsto F_g$ 是 $V_0[a,b]$ 到 $C[a,b]^*$ 的线性算子. 由(2.20)知U是连续的，且$\|Ug\|\leqslant\|g\|$.

利用广义测度的唯一性，易知U还是一对一的. 因此我们如能证明(i)对任何 $F\in C[a,b]^*$，一定存在 $V_0[a,b]$ 中某个 g，使得

$$F(x)=\int_a^b x(t)dg(t), \quad x(t)\in C[a,b], \quad (2.21)$$

即$\mathscr{R}(U)=C[a,b]^*$，而且(ii)$\|F\|\geqslant\|g\|$(即$\|Ug\|\geqslant\|g\|$)，那末就证明了 $C[a,b]^*$ 与 $V_0[a,b]$ 是线性保范同构，即

$$C[a,b]^*=V_0[a,b]$$

定理 4 (F. Riesz) 设 f 是 $C[a,b]$ 上的连续线性泛函，必有唯一的 $g\in V_0[a,b]$，使得当 $x\in C[a,b]$ 时

$$f(x)=\int_a^b x(t)dg(t) \qquad (2.21)$$

而且$\|f\|=\|g\|$.

证 我们仅证 $C[a,b]$是实空间的情况，复 $C[a,b]$空间情况由读者自己证明. 首先分析一下，假如对给定的 f，满足(2.21)式的 g 存在，如何求出 g？根据 g 是广义测度，并且 $g\in V_0[a,b]$，得到

$$g(\xi)=g([a,\xi])=\int_a^b \chi_{[a,\xi]}(t)dg(t)$$

其中 $\chi_{[a,\xi]}(t)$是$[a,\xi]$的特征函数，我们就简记为 χ_ξ 并规定 $\chi_a=0$. 这样就启发我们应先把 $C[a,b]$空间的泛函 f 延拓到有界函数空间 $B[a,b]$上去，然后由延拓后的泛函在 χ_ξ 上的值来定 g.

设 $B[a,b]$是$[a,b]$上的有界实函数全体，按通常线性运算及范数

$$\|x\|=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|, \quad x\in B[a,b]$$

所成的赋范线性空间，那末 $C[a,b]$是 $B[a,b]$的线性子空间，根据延拓定理，f 可延拓到 $B[a,b]$上得到F，而且$\|F\|=\|f\|$.

置

$$h(\xi)=F(\chi_\xi), \quad (a\leqslant\xi\leqslant b)$$

现在利用 $h(\xi)$ 表示出 F 在任何 $x\in C[a,b]$ 上的值. 先证明 $h(\xi)\in V[a,b]$: 设

$$a=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_n=b$$

记 $\varepsilon_i=\text{sign}[h(\xi_i)-h(\xi_{i-1})]$, 那末

$$\sum_{i=1}^{n}|h(\xi_i)-h(\xi_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i[h(\xi_i)-h(\xi_{i-1})]$$

$$=F\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i[\chi_{\xi_i}-\chi_{\xi_{i-1}}]\right)$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}|h(\xi_i)-h(\xi_{i-1})|\leqslant\|F\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\chi_{\xi_i}-\chi_{\xi_{i-1}})\right\|$$

显然 $B[a,b]$ 中的向量 $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\chi_{\xi_i}-\chi_{\xi_{i-1}})$ 的范数为 1, 而 $\|F\|=\|f\|$. 所以

$$\sum_{i=1}^{n}|h(\xi_i)-h(\xi_{i-1})|\leqslant\|f\|$$

即 $h\in V[a,b]$, 而且

$$\bigvee_a^b(h)\leqslant\|f\| \tag{2.22}$$

根据第三章§6定理 13, 存在 $g\in V_0[a,b]$, 在 h 的连续点 x 以及 b 上, $g(x)=h(x)-h(a)$ (事实上, $h(a)=0$), 而且 $\bigvee_a^b(g)\leqslant\bigvee_a^b(h)$.

我们来证明

$$F(x)=\int_a^b x(t)dg(t),\quad x(t)\in C[a,b]$$

事实上, 对任何 $x\in C[a,b]$, 在 $[a,b]$ 上选取一分点组

$$a=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{n_m}^{(n)}=b$$

要求 $t_i^{(n)}(i=1,2,\cdots,n_m-1)$ 都是 $h(t)$ 的连续点，而且 $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n_m}(t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)})=0$．对这样的分点组，作 $B[a,b]$ 中函数

$$x_n(t)=\sum_{k=1}^{n_m}x(t_k^{(n)})(\chi_{t_k^{(n)}}-\chi_{t_{k-1}^{(n)}})$$

其中 χ_t 表示 $[a,t]$ 的特征函数．根据 $x(t)$ 的均匀连续性，容易证明 $\|x_n-x\|\to0$（见第四章§4例4）．由于

$$\begin{aligned}F(x_n)&=\sum_{k=1}^{n_m}x(t_k^{(n)})[h(t_k^{(n)})-h(t_{k-1}^{(n)})]\\&=\sum_{k=1}^{n_m}x(t_k^{(n)})[g(t_k^{(n)})-g(t_{k-1}^{(n)})]\\&=\int_a^b\sum_{k=1}^{n_m}x(t_k^{(n)})(\chi_{t_k^{(n)}}-\chi_{t_{k-1}^{(n)}})dg\\&=\int_a^b x_n(t)dg(t)\end{aligned}$$

根据关于广义测度的积分控制收敛定理（见第三章§8定理3）成立着

$$\lim_{n\to\infty}F(x_n)=\int_a^b x(t)dg(t)$$

另一方面，由于 F 的连续性，$x\in C[a,b]$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$，又得到

$$\lim_{n\to\infty}F(x_n)=F(x)=f(x)$$

所以

$$f(x)=\int_a^b x(t)dg(t),\quad x(t)\in C[a,b]$$

由(2.20)又得到 $\|f\|\leqslant\|g\|$．由(2.22)，又有

$$\|g\|=\bigvee_a^b(g)\leqslant\bigvee_a^b(h)\leqslant\|f\|$$

所以$\|f\|=\|g\|$. 根据第三章定理 8 的系, g 是唯一的. 证毕.

为以后算子谱论的需要, 对本定理作一明显的推论, 并对周期函数的情况指出类似的结论.

系 设P是$[a,b]$上多项式全体, 把P作为$C[a,b]$的线性子空间. 设 f 是 P 上连续线性泛函, 那末 f 必可唯一地延拓成 $C[a,b]$ 上连续线性泛函, 而且存在唯一的 $g\in V_0[a,b]$, 使得对任何 $x\in C[a,b]$, 成立着

$$f(x)=\int_a^b x(t)dg(t)$$

证 由第四章 § 6, P 在 $C[a,b]$中稠密, 再根据定理 1, f 可唯一地延拓到 $C[a,b]$上. 由本定理就导出系.

设 $C_{2\pi}$ 表示以 2π 为周期的连续函数 $\varphi(t)$的全体, 按通常的线性运算以及范数 $\|\varphi\|=\max\limits_{0\leq t\leq 2\pi}|\varphi(t)|$ 形成的赋范线性空间. 设 $V_{2\pi}$ 是 $V_0[0,2\pi]$中满足条件

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=g(0)=0$$

的函数全体所成的线性子空间. 和定理 4 相仿有

定理 5 设 f 是 $C_{2\pi}$ 上连续线性泛函, 那末必有唯一的 $g\in V_{2\pi}$, 使得当 $x\in C_{2\pi}$ 时

$$f(x)=\int_0^{2\pi} x(t)dg(t)$$

而且$\|f\|=\bigvee\limits_0^{2\pi}(g)$.

这个定理的证明留给读者.

类似也有下面的推论.

系 设T是周期为 2π 的三角多项式全体, T 作为 $C_{2\pi}$ 的线性子空间. 设 f 是 T 上的连续线性泛函, 那末 f 一定可以唯一地延拓成 $C_{2\pi}$ 上的连续线性泛函, 并且有唯一的 $g\in V_{2\pi}$, 使得

$$f(x)=\int_0^{2\pi} x(t)dg(t)$$

证略.

4. 测度问题 现在再给出泛函延拓类型定理在经典分析问题——测度问题上有趣的应用.

从测度观念来看，勒贝格积分成为比黎曼积分更强有力的工具的关键在于勒贝格积分是建立在可列可加测度基础上，而黎曼积分是建立在只具有有限可加性的 Jordan 测度（定义在区间集上，并且等于区间的长度）上；从积分来看，总希望可测集的类愈大（意味着可积函数愈多）愈好；从调和分析来看，非常重要而有用的经典调和分析理论之所以能建立，主要是依靠了勒贝格测度的平移不变性. 因此曾提出如下一个问题，在(例如)直线上是否存在一个测度能够具有如下性质：(i) 可列可加的；(ii) 一切直线上子集都是可测的；(iii) 平移不变的；(iv) 非平凡的(即总存在一个有限区间，例如[0, 1]的测度是有限的).

如果放弃要求(ii)，显然，勒贝格测度就满足(i)、(iii)、(iv)；如果放弃要求(iii)，显然，由 Heaviside 函数产生的勒贝格-斯蒂阶测度就满足(i)、(ii)、(iv)；如果放弃要求(iv)，显然，在直线的一切非空子集上测度值为无限大，空集上测度值为零的测度就满足(i)、(ii)、(iii). 而(i)—(iv) 要求同时都满足的测度是不存在的. 这是因为第二章中所举的勒贝格不可测集的例子证明中，仅仅只用了勒贝格测度的平移不变、可列可加以及 $m([0, 1])$, $m([-1, 2])$是有限值.

如果把可列可加性要求(i) 降低成只要求：(i)′ 有限可加性. Banach 证明了满足(i)′、(ii)、(iii)、(iv)的测度是存在的. 为证明这一点，先建立如下的泛函延拓定理(这个定理是纯代数性质的).

引理 2 设 $p(x)$是实线性空间 X 上实线性泛函，并满足

(i)（次可加性）　$p(x_1+x_2)\leqslant p(x_1)+p(x_2)$, x_1、$x_2\in X$;

(ii)（正齐性）　对任何数 $\alpha\geqslant 0$, $x\in X$, $p(\alpha x)=\alpha p(x)$

（称为凸泛函）．又设 f 是 X 的子空间 A 上定义的实线性泛函，并且对任何 $x\in A$, $f(x)\leqslant p(x)$，那末 f 必可延拓成 X 上的线性泛函 F，并且对一切 $x\in X$

$$F(x)\leqslant p(x) \tag{2.23}$$

完全仿照泛函延拓定理的证明可证本引理．

定理 6　存在定义在 $[0,1)$ 的一切子集上的非负函数 ν，满足

(i)（有限可加性）　对任何 E_1、$E_2\subset[0,1)$, $E_1\cap E_2=\varnothing$, $\nu(E_1\cup E_2)=\nu(E_1)+\nu(E_2)$;

(ii) 当 E 是 $[0,1)$ 中勒贝格可测集时，$\nu(E)=m(E)$;

(iii)（平移不变性）　对任何 $E\subset[0,1)$, $a\in[0,1)$, $\nu(E)=\nu(E+a)$，此地 $E+a=\{x+a(\mathrm{mod}1)\,|\,x\in E\}$;

(iv)（反射[①]不变性）　对任何 $E\subset[0,1)$, $\nu(E)=\nu(1-E)$，这里 $1-E=\{1-x\,|\,x\in E\}$．

证　记 $\mathscr{U}$ 为 $[0,1)$ 上有界实函数全体．我们证明在实线性空间 $\mathscr{U}$ 上存在正线性泛函 I（即对 $\mathscr{U}$ 中任何非负函数 f, $I(f)\geqslant 0$），使得

(i)′ 当 $f\in\mathscr{U}$，并且 f 是勒贝格可积时，$I(f)=(L)\int_0^1 f(x)dx$;

(ii)′ $I(f(x+a))=I(f(x))$，此地 $x+a$ 是 $x+a(\mathrm{mod}1)$ 的简写；

(iii)′ $I(f(1-x))=I(f(x))$．

如果上述 I 存在，只要令 $\nu(E)=I(\chi_E)$（χ_E 是集 E 在 $[0,1)$ 上的特征函数），易知 ν 便是满足定理 6 所有要求的有限可加测度．

对任何 $f\in\mathscr{U}$，视 f 为 $(-\infty,\infty)$ 上以 1 为周期的函数．对任何 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in R'$，令

$$M(f;\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x+\alpha_i)$$

① 这里是关于点"$\frac{1}{2}$"的反射．

$$p(f)=\inf_{\substack{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\\ n=1,2,\cdots}} M(f;\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$

显然，对任何 $\alpha\geqslant 0$, $p(\alpha f)=\alpha p(f)$. 下面证 $p(f)$ 是 $\mathscr{U}$ 上次可加泛函：任取 f、$g\in\mathscr{U}$，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\alpha_1,\cdots\alpha_n$、$\beta_1,\cdots,\beta_m$，使得

$$M(f;\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\leqslant p(f)+\varepsilon,\quad M(g;\beta_1,\cdots,\beta_m)\leqslant p(g)+\varepsilon$$

对 mn 个分点 $\alpha_i+\beta_j$ $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$

$$p(f+g)\leqslant M(f+g;\alpha_i+\beta_j)=\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{1}{nm}\sum_{i,j}(f+g)(x+\alpha_i+\beta_j)$$

$$\leqslant\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{1}{m}\sum_j\frac{1}{n}\sum_i f(x+\beta_j+\alpha_i)$$

$$+\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{1}{n}\sum_i\frac{1}{m}\sum_j g(x+\alpha_i+\beta_j)$$

$$\leqslant p(f)+\varepsilon+p(g)+\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to 0$，便知 $p(f)$ 是 $\mathscr{U}$ 上次可加的．

$\mathscr{U}$ 中勒贝格可积函数全体记为 $\mathscr{U}_1$，$J(f)$ $(f\in\mathscr{U}_1)$ 表示 f 的勒贝格积分．现在证明 J 在 $\mathscr{U}_1$ 上满足 $J(f)\leqslant p(f)$；事实上，对任何 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$,

$$J(f)=\frac{1}{n}\int_0^1[f(x+\alpha_1)+\cdots+f(x+\alpha_n)]dx\leqslant M(f;\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$

从而 $J(f)\leqslant p(f)$.

根据引理 2，J 在 $\mathscr{U}$ 上有线性延拓 I_1，使对任何 $f\in\mathscr{U}$, $I_1(f)\leqslant p(f)$. 显然，I_1 满足 (i)′. 下面证明 I_1 满足 (ii)′：任取 $x_0\in[0,1)$，对任何 $f\in\mathscr{U}$，记 $g(x)=f(x+x_0)-f(x)$，取

$$\alpha_1=0,\quad \alpha_2=x_0,\ \cdots,\ \alpha_n=(n-1)x_0$$

易知

$$\frac{1}{n}(g(x)+g(x+x_0)+\cdots+g(x+(n-1)x_0))=\frac{1}{n}(f(x+nx_0)-f(x_0))$$

记 $\|f\|=\sup\limits_{-\infty<x<\infty}|f(x)|$，由此可知

$$I_1(g)\leqslant p(g)\leqslant\sup_{-\infty<x<\infty}M(g;\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\leqslant\frac{2\|f\|}{n}$$

令 $n\to\infty$，就得到 $I_1(g)\leqslant 0$. 用 $-f$ 代替 f，就又得到 $I_1(-g)\leqslant 0$，即 $-I_1(-g)\geqslant 0$. 这样又得到对任何 $f\in\mathscr{U}$, $I_1(g)\geqslant 0$. 综上所述，对一切 g, $I_1(g)=0$，即 $I_1(f(x+x_0))=I_1(f(x))$.

再证 I_1 是正线性泛函：因为当一切 $x\in[0,1)$, $f(x)\leqslant 0$ 时，$p(f)\leqslant 0$. 所以

$I_1(-f) = -I_1(f) \geqslant 0$.

为了满足(iii)′, 只要作 $I(f) = \frac{1}{2}\{I(f(x)) + I(f(1-x))\}$, 易知 I 满足(i)′、(ii)′、(iii)′. 证毕

如果将[0, 1)上的 ν(按定理 6 所得) 以周期方式延拓成 $(-\infty, \infty)$ 上集函数, 那末便得在$(-\infty, \infty)$的一切子集上有定义, 具有有限可加性、平移不变性的非负集函数, 并且在勒贝格可测集 E 上, $\nu(E) = m(E)$. 此外 ν 还满足反射不变性.

习　题

1. 证明: 对任何 $F \in L^p(-\infty, \infty)^*$ $(\infty > p \geqslant 1)$ 必有唯一的 $\beta \in L^q(-\infty, \infty)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, 使得 $F(f) = \int f(t)\beta(t)dt$, $f \in L^p(-\infty, \infty)$ 成立. 并且映照 $F \longmapsto \beta$ 是 $L^p(-\infty, \infty)^*$到 $L^q(-\infty, \infty)$的保范线性同构, 即在这个意义下 $L^p(-\infty, \infty)^* = L^q(-\infty, \infty)$. (提示: 视 $L^p[-n, n]$为 $L^p(-\infty, \infty)$的闭线性子空间 $L_n = \{f \mid f \in L^p(-\infty, \infty)$; 在$[-n, n]$的余集上 $f(x) = 0\}$, 因而每个 $F \in L^p(-\infty, \infty)$必有 $F \in L^p[-n, n]^*$, 利用 $L^p[-n, n]^* = L^q[-n, n]$ 来证明结论. 或作(0, 1)到$(-\infty, \infty)$的可微拓扑映照, 将 $L^p(-\infty, \infty)$ 的问题化为 $L^p(0, 1)$上考虑).

2. 将习题 1 的结论推广到 $L^p(\Omega, \boldsymbol{B}, \mu)$ $(\infty > p \geqslant 1)$的情况, 此地$(\Omega, \boldsymbol{B}, \mu)$是全 σ 有限测度空间.

3. (i) 设 X, Y 是两个赋范线性空间; 在 $X \times Y$ 上规定 $\|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|)$, 证明: 对任何 $F \in (X \times Y)^*$, 必存在唯一的一对 $f \in X^*$, $g \in Y^*$, 使得 $F((x, y)) = f(x) + g(y)$; 如果在 $X^* \times Y^*$ 上规定$\|(f, g)\| = \|f\| + \|g\|$, 那末 $F \longmapsto (f, g)$的映照是$(X \times Y)^*$ 到 $X^* \times Y^*$ 的保范线性同构, 即在这个意义下, $(X \times Y)^* = X^* \times Y^*$.

(ii) $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上两个范数, 记$(X, \|\cdot\|_i)$ $(i = 1, 2)$的共轭空间为 X_i^*, 并在 X 上赋以范数$\|x\| = (\|x\|_1^2 + \|x\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$(或$\max(\|x\|_1, \|x\|_2)$等). 证明: $F \in (X, \|\cdot\|)^*$的充要条件是存在 $f_i \in X_i^*$ $(i = 1, 2)$, 使得 $F = f_1 + f_2$.

4. 设 L 是 Banach 空间 X的闭线性子空间, 并且存在X的有限维子空间E $(\dim E = n)$, 使得$E \cap L = \{0\}$, $X = L + E$, 这里$L + E = \{e + l \mid e \in E, l \in L\}$. 证明 X 上一切在 L 上取值为零的连续线性泛函全体是 X^* 中的闭线性子空

间，并且它的维数是 n，

5. 设 $\{f \mid f(0)=f(1)=0$, f 在 $[0,1]$ 上全连续，并且 $f' \in L^2[0,1]\}$，在 X 上规定 $\|f\|=\left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$. 证明(i) $(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间；(ii) 当 $F \in X^*$ 时，存在 $g_F \in X$，对一切 $f \in X$，$F(f)=\int_0^1 f'(t) g_F'(t) dt$，并且 $F \mapsto g_F$ 是 X^* 到 X 的保范线性同构.

6. 设 E 是赋范线性空间，$x_1, \cdots, x_k \in E$，$a_1, \cdots, a_k$ 是一组数，证明在 E 上存在线性泛函 f，适合

(i) $f(x_\nu)=a_\nu$, $\nu=1, 2, \cdots, k$；

(ii) $\|f\| \leqslant M$

的充要条件是：对任意的数 $t_1, \cdots, t_k$ 都成立着

$$\left|\sum_{\nu=1}^{k} t_\nu a_\nu\right| \leqslant M\left\|\sum_{\nu=1}^{k} t_\nu x_\nu\right\|$$

7. 设 $\{x_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$、$\{f_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ 分别是赋范线性空间 X 以及 X^* 的两族向量，如果满足 $f_\alpha(x_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$, α、$\beta \in \Lambda$，那末称 $\{x_\alpha\}$、$\{f_\alpha\}$ 是**对偶族**. 证明

(i) 当 $\{x_\alpha\}$、$\{f_\alpha\}$ 是对偶族时，$\{x_\alpha\}$、$\{f_\alpha\}$ 必分别是 X、X^* 中线性无关族；

(ii) 如果 $\{x_\alpha\}$ 满足下列条件：$x_\alpha \overline{\in} \overline{\operatorname{span}}\{x_\beta\}_{\beta \neq \alpha}$, $\alpha \in \Lambda$，那末必存在 $\{f_\alpha\}$，使得 $\{x_\alpha\}$、$\{f_\alpha\}$ 是对偶族.

(iii) 在 X 是线性空间情况下，对任何一族线性无关向量 $\{x_\alpha\}$，必存在一族相应的线性泛函 $\{f_\alpha\}$，使得 $f_\alpha(x_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$，并且 $\{f_\alpha\}$ 必也是线性无关的.

8. 设 $\{a_n \mid n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是一列数，证明存在 $[a, b]$ 上有界变差函数 $\alpha(t)$，使得

$$\int_a^b t^n d\alpha(t)=a_n, \quad n=0, 1, 2, \cdots$$

成立的充要条件为对一切多项式 $p(t)=\sum c_\nu t^\nu$，成立着

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu a_\nu\right| \leqslant M \max_{a \leqslant t \leqslant b} |p(t)|$$

此地 M 为一常数.

9. 设 $C_0(-\infty, \infty)$ 是全直线 $(-\infty, \infty)$ 上适合条件 $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x)=0$ 的连续函数全体，按照通常线性运算所成的线性空间. 当 $x \in C_0(-\infty, \infty)$ 时，规定

$$\|x\| = \max_{-\infty<t<\infty} |x(t)|$$

这时 $C_0(-\infty, \infty)$ 成为 Banach 空间. 设 F 为 $C_0(-\infty, \infty)$ 上有界线性泛函, 证明必有全直线上有界变差函数 $\alpha(t)$, 使得一切 $x\in C_0(-\infty, \infty)$ 成立着

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)d\alpha(t)$$

10. (i) X 是直线点集 A 上某些实函数, 但包含常数函数在内的所成实赋范线性空间. 如果存在常数 M, 对一切 $f\in X$, $\sup_x|f(x)|\leqslant M\|f\|$, 则 X 上的正线性泛函 F (即对非负函数 f, $F(f)\geqslant 0$) 必是连续泛函, 并且 $\|F\|\leqslant MF(1)$.

(ii) 设 F 是实 $C_0(-\infty, \infty)$ 上正线性泛函, 证明 F 是连续的.

11. 设 c_0 表示收敛于零的序列 $x=\{x_n\}$ 全体, 按通常线性运算和范数

$$\|x\| = \sup_n |x_n|$$

成为 Banach 空间, 证明 $(c_0)^* = l^1$.

12. 用 c 表示 l^∞ 中收敛序列 $x=\{x_n\}$ 全体所成的子空间, 证明

$$c^* = \{\eta + \alpha f_0 \mid \eta\in l^1, \alpha \text{ 是数}\}$$

这里

$$f_0(x) = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad x=\{x_n\}\in c$$

换句话说, 对每个 $f\in c^*$, 有 $\eta=\{\eta_n\}\in l^1$ 和常数 α 使

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n x_n + \alpha\lim_{n\to\infty} x_n \quad (x=\{x_n\}\in c)$$

而且 $\|f\| = \|\eta\|_1 + |\alpha|$.

13. 在有界数列空间 l^∞ 上存在如下泛函 F: 对任何 $\{a_n\}$、$\{b_n\}\in l^\infty$,

(i) $F(\{a_n\}) = F(\{a_{n+1}\})$;

(ii) $F(\alpha\{a_n\}+\beta\{b_n\}) = \alpha F(\{a_n\}) + \beta F(\{b_n\})$, α, β 是数;

(iii) 如果一切 $a_n\geqslant 0$ $(n=1, 2, \cdots)$, 那末 $F(\{a_n\})\geqslant 0$;

(iv) 如果 $\{a_n\}$ 是实数列, 那末 $\varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant F(\{a_n\}) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n$;

(v) 如果 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在, 那末 $F(\{a_n\}) = \lim_{n\to\infty} a_n$.

常记 $F(\{a_n\})$ 为 $\text{l. i. m}\ a_n$, 称为 Banach 极限. 它还可以推广到函数空间上. Banach 极限在讨论经典分析和算子谱论中某些问题是很有用的工具. (提示: 记 M 为 l^∞ 中序列 $(a_1, a_2-a_1, \cdots, a_n-a_{n-1}, \cdots)$ 全体, 其中 $\{a_n\}\in l^\infty$, M 是 l^∞

中的线性子空间，易知 $e=(1, 1, \cdots, 1, \cdots)\bar{\in}M$. 考虑泛函 F: $\|F\|=1$, $F(e)=1$, $F|_M=0$.)

14. 设 X、Y 是两个赋范线性空间. 证明如果 $X\neq\{0\}$, 并且 $\mathfrak{B}(X\to Y)$ 是 Banach 空间, 那末 Y 必是 Banach 空间(即本章 §1 定理 6 的逆命题成立).

§3　共轭空间与共轭算子

在 §1 中我们已经引入了共轭空间. 在本节中我们要利用共轭空间的概念进一步引入二次共轭空间等等, 并讨论空间的自反性. 利用共轭空间我们又引进弱收敛的概念, 并研究弱致密性. 同时再考察共轭空间上的共轭算子. 本节所讨论的内容大体上是引进基本概念和少量的基本定理, 这些都是为了后面的应用.

1. 二次共轭空间　设 X 是赋范线性空间, X^* 是它的共轭空间, 由于 X^* 也是赋范线性空间, 它也有共轭空间 $(X^*)^*$, 把它记为 X^{**}, 称 X^{**} 是 X 的**第二次共轭空间**. 继续下去就有 X 的三次共轭空间 $X^{***}=(X^{**})^*$, 如此等等. 这些空间之间自然是有联系的. 重要的是要考察 X 与 X^{**} 的关系.

对每个 $x\in X$, 作 X^* 上的泛函 x^{**} 如下: 对 $f\in X^*$, 令

$$x^{**}(f)=f(x)$$

显然, 这样作的 x^{**} 是 X^* 上的线性泛函. 又由于

$$|x^{**}(f)|\leqslant\|f\|\|x\|$$

所以 x^{**} 是有界泛函, 并且 $\|x^{**}\|\leqslant\|x\|$, 称泛函 x^{**} 为由 x 生成的.

定理1　设 X 是赋范线性空间, 映照 $x\longmapsto x^{**}(x\in X)$ 是 $X\longrightarrow X^{**}$ 的保范的线性算子, 即

(i) $(\alpha x+\beta y)^{**}=\alpha x^{**}+\beta y^{**}$;

(ii) $\|x^{**}\|=\|x\|$.

证 (i) 是明显的. 欲证(ii), 只要再证$\|x^{**}\|\geqslant\|x\|$就可以了. 对任何$x\neq0$, 由泛函延拓定理知道必有$f_x\in X^*$, $\|f_x\|=1$, 而且$f_x(x)=\|x\|$. 因此$\|x^{**}\|\geqslant|x^{**}(f_x)|=|f_x(x)|=\|x\|$. 证毕.

记$\hat{X}$表示X经过映照$x\longmapsto x^{**}$后的象, $\hat{X}\subset X^{**}$. 那末定理1说明X与$\hat{X}$是线性保范同构, 通常称算子$x\longmapsto x^{**}$是X到X^{**}的**自然嵌入**(算子). 为简单起见, 今后往往不去区别x和x^{**}, 从而把X和$\hat{X}$视为同一, 这样$X\subset X^{**}$.

定义 设X是赋范线性空间. 如果$X=X^{**}$, 就称X是**自反的**.

当X是自反空间时, X^*也是自反的. 事实上, 这时$(X^*)^{**}=(X^{**})^*=X^*$. 例如当$1<p<\infty$而且$q$是$p$的对偶数即$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$时, 那末$L^p[a,b]^*=L^q[a,b]$, $L^q[a,b]^*=L^p[a,b]$, 就是说, $L^p[a,b]$是自反的. 但一般说来, 一个赋范线性空间X, 即便是完备的, 不一定是自反的. 例如$L^1[a,b]$就是一例. 为了说明这个事实, 我们先证明

定理 2 设X是赋范线性空间, 如果X^*是可析的, 那末X也必是可析的.

证 由于假设X^*是可析的, 所以在X^*中有一列$\{f_n\}$, 它在X^*的单位球面上稠密. 对每个f_n, 由于$\sup\limits_{\|x\|=1}|f_n(x)|=\|f_n\|>\frac{1}{2}$, 在$X$的单位球面上必有$x_n$, 使得$|f_n(x_n)|>\frac{1}{2}$. 这时把$\{x_n\}$张成$X$的线性闭子空间记作$X_0$, 如果$X$不可析, 那末必然$X_0\neq X$. 从而在$X^*$中存在$f_0$, $\|f_0\|=1$, 而且当$x\in X_0$时, $f_0(x)=0$. 然而对任何自然数n

$$\|f_n-f_0\|\geqslant|f_n(x_n)-f_0(x_n)|=|f_n(x_n)|>\frac{1}{2}$$

这与 $\{f_n\}$ 在 X^* 的单位球面上稠密的假设冲突. 所以 X 是可析的. 证毕.

从 §2 习题 7 还可以知道, X 的"维数"不超过 X^* 的"维数".

利用此定理还立即得到: $L^1[a,b]$不是自反的. 事实上, 如果 $L^1[a,b]$是自反的, 即 $L^1[a,b]^{**}=L^1[a,b]$, 由于 $L^1[a,b]$是可析的, 所以 $L^1[a,b]^*$ 也应该是可析的. 可是根据 §2 知道 $L^1[a,b]^*=L^\infty[a,b]$. 然而当 $a<\lambda\leqslant b$ 时, 区间$[a,\lambda]$的特征函数 $\chi_{[a,\lambda]}(t)$ 是 $L^\infty[a,b]$的单位球面上的一族(以 λ 为参数)向量, 并且显然当 $\lambda\neq\lambda'$ 时

$$\|\chi_{[a,\lambda]}-\chi_{[a,\lambda']}\|=\min_{\substack{m(E)=0\\ E\subset[a,b]}}\sup_{t\in[a,b]-E}|\chi_{[a,\lambda]}(t)-\chi_{[a,\lambda']}(t)|=1$$

即 $\{\chi_{[a,\lambda]}\}$ 彼此间距离为 1. 而这族向量是不可列个, 这就是说 $L^\infty[a,b]$不可能是可析的, 因而 $L^1[a,b]$不是自反的.

我们注意, 定理 2 启发我们用共轭空间 X^* 的性质来研究原来的赋范线性空间的性质. 这个方向的进一步的发展就是局部凸拓扑线性空间理论中的对偶理论, 它对于研究空间的拓扑结构是很有用的, 参见[4].

2. 算子序列的收敛性　在经典分析中, 一列函数的收敛性常常用到的是处处收敛和一致收敛概念. 由于所考察的问题的需要, 不同场合采用不同的收敛概念. 对于算子序列类似于函数列的一致收敛和处处收敛, 也常常用到下面几种形式的收敛性.

定义　设 X、Y 都是赋范线性空间, 如果 A_n、$A\in\mathfrak{B}(X\to Y)$ $(n=1,2,\cdots)$, 而且$\|A_n-A\|\to0$, 称序列$\{A_n\}$是按算子范数收敛于A, **或称为一致收敛**于 A. 如果对每个 $x\in X$, $\|(A_n-A)x\|\to0$, 称序列 $\{A_n\}$ **强收敛**于 A, 记做 $A_n\xrightarrow{强}A$, 或 $A=(强)\lim\limits_{n\to\infty}A_n$, 或 $A=(S)\lim\limits_{n\to\infty}A_n$. 如果对每个 $x\in X$, 以及任何 $f\in Y^*$, $f(A_nx)\to f(Ax)$,

称序列$\{A_n\}$弱收敛于 A, 记做 $A_n \xrightarrow{弱} A$ 或 $A=(弱)\lim\limits_{n\to\infty}A_n$, 或 $A=(W)\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

显然, 如果$\{A_n\}$一致收敛于 A, 必然强收敛于 A; 如果$\{A_n\}$强收敛于 A, 必然是弱收敛于 A. 下面的例子说明它们的逆命题一般不正确.

例 1 (强收敛而不一致收敛的算子序列) 在 $l^p(p\geqslant 1)$ 中, 作"左移"算子 A 如下: 当 $x=(x_1, x_2, \cdots)\in l^p$ 时

$$Ax=(x_2, x_3, \cdots)$$

显然, A 是有界线性算子. 而算子序列$\{A^n\}$强收敛于零. 事实上, 对任何 $x=(x_1, x_2, \cdots)$, $A^n x=(x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots)$. 因此 $\|A^n x\|_p=\left(\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, 由于$\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$, 所以$\|A^n x\|_p\to 0$, 即$\{A^n\}$强收敛于零. 但是$\{A^n\}$在 l^p 上并不一致收敛于零: 事实上, 令 $e_n=(0, \cdots, 0, 1, 0, 0, \cdots)$(其中除第 n 个坐标为 1 外, 其余为 0), 显然 $A^n e_{n+1}=e_1$, 所以$\|A^n\|\geqslant\dfrac{\|A^n e_{n+1}\|_p}{\|e_{n+1}\|_p}=1$. 因而 $\{A^n\}$ 不一致收敛于零.

例 2 (弱收敛而不强收敛的算子序列) 在 $l^p(p>1)$中作算子序列$\{A_n\}$如下: 当 $x=(x_1, x_2, \cdots)\in l^p$ 时

$$A_n x=x_1 e_n, \quad n=1, 2, \cdots$$

其中 e_n 是例 1 中取的向量. 显然 A_n 是有界线性算子, 且

$$\|A_n x-A_m x\|_p=\|x_1 e_n-x_1 e_m\|_p=|x_1|\,2^{\frac{1}{p}}$$

所以当 $x_1\neq 0$ 时, $\{A_n\}$不是强收敛的. 然而, 对 l^p 上任何连续线性泛函 y (必属于 l^q), 即 $y=(y_1, y_2, \cdots)$, 而且 $y(x)=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}x_\nu y_\nu$. 那末

$$y(A_n x)=y(x_1 e_n)=x_1 y_n$$

由于 $\sum|y_n|^q<\infty$，因而 $y_n\to 0$，即 $y(A_n x)\to 0$．这说明$\{A_n\}$弱收敛于零．

引理1 设X是赋范线性空间，Y是Banach空间，$T_n\in\mathfrak{B}(X\to Y)$，$n=1,2,\cdots$．如果有常数$M$使得$\|T_n\|<M$，$n=1,2,\cdots$，而且有$X$的稠密子集$\mathscr{D}$，当$x\in\mathscr{D}$时使得$\{T_n x\}$收敛，那末必存在算子$T\in\mathfrak{B}(X\to Y)$，使得$\{T_n\}$强收敛于$T$，而且

$$\|T\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|$$

证 任取$x\in X$，由于$\overline{\mathscr{D}}=X$，对每个$\varepsilon>0$，存在$x'\in\mathscr{D}$，使得

$$\|x-x'\|<\frac{\varepsilon}{3M}$$

又由于$\{T_n x'\}$是收敛的，所以必有自然数N，使得当$n,m\geqslant N$时

$$\|T_m x'-T_n x'\|<\frac{\varepsilon}{3}$$

于是

$$\begin{aligned}\|T_m x-T_n x\|&\leqslant\|T_m x-T_m x'\|+\|T_m x'-T_n x'\|+\|T_n x'-T_n x\|\\&\leqslant(\|T_m\|+\|T_n\|)\|x-x'\|+\frac{\varepsilon}{3}\\&\leqslant 2M\|x-x'\|+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon\end{aligned}$$

所以$\{T_n x\}$是Banach空间Y中的基本点列，它是收敛的．作$X\to Y$的算子T如下：对于$x\in X$，令

$$x\longmapsto Tx=\lim_{n\to\infty}T_n x$$

容易证明T是线性算子．由于当$x\in X$时

$$\|Tx\|=\lim_{n\to\infty}\|T_n x\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|\|x\|$$

所以T是有界的，并且有

$$\|T\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|$$

对于泛函我们也引入类似的收敛概念.

定义 设$\{f_n\}$是赋范线性空间X上一列连续线性泛函. 如果有$f\in X^*$,使得$\|f_n-f\|\to 0(n\to\infty)$, 称泛函序列$\{f_n\}$**强收敛于**$f$, 记为$f_n\to f$或$f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$. 如果对每个$x\in X$, $f_n(x)\to f(x)$, 称泛函序列**弱*收敛于**f, 记做$f_n\xrightarrow{弱^*}f$, 或$f=(弱^*)\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ 或 $f=(W^*)\lim\limits_{n\to\infty}f_n$.

注 如果把泛函看成算子的特殊情况,即Y是一维空间时, 算子序列的一致收敛概念就相当于泛函序列的强收敛. 而算子的强收敛和弱收敛都相当于泛函序列的弱*收敛.

对于赋范线性空间X中的序列$\{x_n\}$, 通常可以引入下面两种收敛概念:

定义 设X是赋范线性空间, $\{x_n\}\subset X$, $x_0\in X$. 如果$\|x_n-x_0\|\to 0$时, 称$\{x_n\}$**强收敛于**x_0. 如果对任何$f\in X^*$, $f(x_n)\to f(x_0)$时, 称$\{x_n\}$**弱收敛于**x_0, 记为$x_n\xrightarrow{弱}x_0$, 或$x_0=(弱)\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 或 $x_0=(W)\lim x_n$.

按定义, 算子序列的一致收敛、泛函序列的强收敛、向量序列的强收敛等分别就是通常的算子序列、泛函序列、向量序列的按范数收敛.

定理 3 设X、Y是赋范线性空间, $\{A_n\}\subset\mathfrak{B}(X\to Y)$. 如果$\{A_n\}$弱收敛于$A\in\mathfrak{B}(X\to Y)$, 那末极限算子$A$是唯一的. 特别, 如果$\{f_n\}$是$X$上一列有界线性泛函, 弱*收敛于$f$, 那末$f$是唯一的.

证 (i) 如果有A、A', 使得$A_n\xrightarrow{弱}A$, $A_n\xrightarrow{弱}A'$, 显然就有

$$f(Ax)=f(A'x),\quad x\in X, f\in Y^*$$

从而$f(Ax-A'x)=0$, 对一切$f\in Y^*$成立, 所以$Ax-A'x=0$(如果不对, $(A-A')x\neq 0$. 根据泛函延拓定理, 必有$f_0\in Y^*$, 使得$f_0((A$

$-A')x_0)\neq 0)$．既然对一切 $x\in X$, $Ax-A'x=0$, 所以 $A=A'$．当 Y 是一维空间 R^1 时，就得到泛函的结论．证毕．

现在再举一个弱*收敛的泛函序列而不强收敛的例子．

例 3 考察 $L^1[0,2\pi]$ 上的泛函序列

$$f_n(x)=\int_0^{2\pi} x(t)\sin nt\,dt,\ x\in L^1[0,2\pi],\ n=1,2,\cdots$$

它弱* 收敛于零（这个命题称为**黎曼-勒贝格引理**），而不强收敛于零．

事实上，由 §1 中(1.15)式知道 $\|f_n\|=\max\limits_{t\in[0,2\pi]}|\sin nt|=1$，所以 $\{f_n\}$ 并不强收敛于零．今证 $\{f_n\}$ 弱*收敛于零：当 $x(t)$ 是三角多项式时，用分部积分可直接验证：当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)=\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} x'(t)\cos nt\,dt\to 0$．再利用 $\|f_n\|=1$, $n=1,2,\cdots$，和三角多项式全体在 $L^1[0,2\pi]$ 中的稠密性，立即得到对任何 $x\in L^1[0,2\pi]$，

$$f_n(x)=\int_0^{2\pi} x(t)\sin nt\,dt\to 0$$

一般说来，算子序列的强收敛、弱收敛的概念不能容纳在度量空间中按距离收敛概念之中，所以对算子收敛的描述可按拓扑线性空间方法引入下面几种拓扑：

定义 设 X、Y 是赋范线性空间，在线性空间 $\mathfrak{B}(X\to Y)$ 上用下面三种方式引入半范数族成为局部凸拓扑线性空间：

(i) 取范数 $\|\cdot\|$，由它引入的拓扑称为一致拓扑；

(ii) 取半范数族 $\{\|Ax\|\mid x\in X\}$，由它们引入的拓扑称为强拓扑；

(iii) 取半范数族 $\{|y(Ax)|\mid x\in X,\ y\in Y^*\}$，由它们引入的拓扑称为弱拓扑．

显然，$\mathfrak{B}(X\to Y)$ 中一列算子 $\{A_n\}$ 按定义所说的一致(强、弱)收敛于 A 分别等价于按一致(强、弱)拓扑收敛于 A．

一致拓扑强于强拓扑，强拓扑强于弱拓扑．而例 1、例 2 告诉我们，在一般情况下，一致拓扑不同于强拓扑，强拓扑不同于弱拓扑．

自然，对于一个赋范线性空间 X 的共轭空间 X^* 来说，可以引入强拓扑

和弱*拓扑的概念. 即

(i) 用范数$\|f\|$, $f\in X^*$, 所引入的拓扑称为 X^* 上的强拓扑;

(ii) 用半范数族$\{|f(x)|\,|x\in X\}$所引入的拓扑, 称为 X^* 上的弱*拓扑.

3. 弱致密性(弱列紧性) 虽然在共轭空间 X^* 中序列的弱*收敛概念, 一般是不能容纳在度量空间中按距离收敛的概念中, 但我们仍然可以仿照度量空间致密集的定义来定义弱* 极限意义下的致密性.

定义 设Φ是X的共轭空间 X^* 的子集. 如果Φ中任意点列$\{f_n\}$, 一定含有在X上弱*收敛的子序列$\{f_{n_k}\}$, 就称Φ是**弱*致密(弱*列紧)**。如果一定含有强收敛的子序列$\{f_{n_k}\}$, 就称Φ是**强致密(强列紧)**, 或者按度量空间一般术语称为致密(列紧).

由于强收敛蕴涵弱* 收敛, 所以强致密集必是弱*致密集. 正如同弱*收敛不必是强收敛一样, 一般说来, 弱*致密集不一定是强致密集. 例如, 例 3 中的集$\{\sin nt\}$就是 $L^1[0,2\pi]^*$中的弱*致密集, 但不是强致密集.

在 Banach 空间中, 要有界集具有致密性, 只有当空间是有限维才是可能的. 但由于弱*致密性要求较弱, 当空间X是可析时, 在共轭空间 X^*中的点集的有界性和弱*致密性却是一致的.

定理 4 如果赋范线性空间X是可析的, 那末共轭空间X^*中的任意有界集①E 是弱*致密的.

证 设Φ是 X^* 中的有界集. 任意在Φ中取一列$\{\varphi_n\}$, 那末存在常数$M\geqslant 0$, 使得

$$\|\varphi_n\|\leqslant M,\ n=1,2,\cdots \tag{3.1}$$

由于X是可析的, 设 $\{x_n\}\subset X$ 并在X中稠密. 由 (3.1), 数列$\{\varphi_n(x_1)\}$之中存在收敛子序列:

$$\varphi_{n_{11}}(x_1),\ \varphi_{n_{12}}(x_1),\ \cdots,\ \varphi_{n_{1\nu}}(x_1),\ \cdots$$

① 即数集$\{\|f\|\,|f\in E\}$是有界的.

为书写方便，把$\{\varphi_{n_{1\nu}}\}$改写为$\{\varphi_{1\nu}\}$．下面也类似地采用简单足标．而在x_2上，泛函数值$\{\varphi_{1\nu}(x_2)\}$也是有界的，所以其中又含有收敛子列

$$\varphi_{21}(x_2),\ \varphi_{22}(x_2),\ \cdots,\ \varphi_{2n}(x_2),\ \cdots$$

如此继续下去，得到如下可列个泛函序列：

$$\begin{array}{l}\varphi_{11},\ \varphi_{12},\ \cdots,\ \varphi_{1\nu},\ \cdots\\ \varphi_{21},\ \varphi_{22},\ \cdots,\ \varphi_{2\nu},\ \cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_{\nu1},\ \varphi_{\nu2},\ \cdots,\ \varphi_{\nu\nu},\ \cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\tag{3.2}$$

其中$\{\varphi_{k\nu}\}\subset\{\varphi_{k-1,\nu}\}$，$k=2,3,\cdots$，而且对于每个$x_k$，存在

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{kn}(x_k)$$

从(3.2)中挑出对角线上的泛函组成序列

$$\varphi_{11},\ \varphi_{22},\ \cdots,\ \varphi_{\nu\nu},\ \cdots$$

容易知道$\{\varphi_{\nu\nu}\}$在$\{x_k\}$上收敛．又因为$\{x_k\}$是稠密的，并且$\|\varphi_{\nu\nu}\|\leqslant M$．由引理1知道必存在$\varphi\in X^*$，使得$\{\varphi_{\nu\nu}\}$在$X$上弱*收敛于$\varphi$．证毕．

可见，可析赋范线性空间X的共轭空间X^*中单位球面是弱*致密的．但是当赋范空间X是无限维时，X^*也是无限维的，由第四章§9定理14，X^*中的单位球面不是强致密的．

对空间X不一定可析时，也有如下的定理：

定理5　设X是赋范线性空间，那末共轭空间X^*中任何(按范数)有界弱*闭集按弱*拓扑都是紧的．

这个定理要利用拓扑学中的吉洪诺夫定理来证明，由于需要较多的准备知识，我们略去有关的证明，读者可参看[4]．这个定理也是赋范线性空间理论中的一个基本定理，它有不少应用．这个定理在局部凸拓扑线性空间理论中也有推广．我们还要强调指出一点，这个定理是一般拓扑学应用在泛函分析中的最重要的成就之一．

类似地我们可以在X中引入弱致密集的概念，也可以类似地讨论X中的有界集与弱致密集的关系。

4. 共轭算子 设E为n维线性空间，e_1、…、e_n为E中一组基。E'表示E上线性泛函全体所成的线性空间。在E'中可选出一组基f_1、f_2、…、f_n，使得

$$f_\mu(e_\nu)=\delta_{\mu\nu},\ \mu,\nu=1,2,\cdots,n$$

这时称$\{f_\mu\}$是$\{e_\nu\}$的对偶基。设A是E上线性算子，在基$\{e_\nu\}$下，相应于阵$(a_{\mu\nu})$。任取$x=\sum_{\nu=1}^n x_\nu e_\nu$，$h=\sum_{\nu=1}^n y_\nu f_\nu$，那末

$$\begin{aligned}h(Ax)&=\sum_{\mu,\nu}x_\nu y_\mu f_\mu(Ae_\nu)=\sum_{\mu,\nu}y_\mu a_{\mu\nu}x_\nu\\&=\sum_{\mu=1}^n g_\mu x_\mu=\sum_{\mu=1}^n g_\mu f_\mu(x)=g(x)\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中$g_\mu=\sum_{\nu=1}^n a_{\nu\mu}y_\nu$，$g=\sum_1^n g_\mu f_\mu$。由此对每个$h\in E'$，就相应地产生一个$g\in E'$，并且$h\to g$是线性算子，记$g=A^*h$。根据线性代数知道，$A^*$是$E'\to E'$的线性算子而且它在基$\{f_\nu\}$之下所相应的阵正好是$(a_{\mu\nu})$的转置阵$(a_{\mu\nu})^T$。(3.3)式又可写为

$$h(Ax)=(A^*h)(x)$$

现在将这个概念推广到一般赋范线性空间上去。

定义 设A是赋范线性空间X到赋范线性空间Y的有界线性算子，如果有Y^*到X^*的算子A^*，使得对任何$h\in Y^*$，$x\in X$

$$(A^*h)(x)=h(Ax)\tag{3.4}$$

那末就称A^*是A的**共轭算子**，或**伴随算子**。

由前所述，在n维赋范线性空间中线性算子的共轭算子相应于转置阵。

定理 6 设X和Y是赋范线性空间，那末

(i) 对每个 $A\in\mathfrak{B}(X\to Y)$，共轭算子存在且唯一；

(ii) 映照 $A\longmapsto A^*$，是由 $\mathfrak{B}(X\to Y)$ 到 $\mathfrak{B}(Y^*\to X^*)$ 的保范线性算子；

(iii) $I_{X^*}=I_X^*$①；

(iv) 又设 Z 是赋范线性空间，$B\in\mathfrak{B}(Y\to Z)$，那末

$$A^*B^*=(BA)^* \tag{3.5}$$

证　(i) 对每个 $h\in Y^*$，由于

$$|h(Ax)|\leqslant\|h\|\|Ax\|\leqslant\|h\|\|A\|\|x\|$$

泛函 $x\longmapsto h(Ax)$，显然是 X 上的有界线性泛函，把它记为 A^*h. 因此

$$\|A^*h\|\leqslant\|A\|\|h\| \tag{3.6}$$

显然，$h\longmapsto A^*h$，$h\in Y^*$ 是线性的，所以 $A^*\in\mathfrak{B}(Y^*\to X^*)$. 显然满足(3.4)的算子 A^* 是由 A 唯一决定的. 由(3.6)有

$$\|A^*\|\leqslant\|A\|$$

(ii) 再利用泛函延拓定理来证明 $\|A^*\|\geqslant\|A\|$：如果 $A=0$，显然 $\|0^*\|\geqslant 0$. 所以只要对 $A\neq 0$ 来证明. 对任何 $x\in X$，如果 $Ax\neq 0$，根据泛函延拓定理，必有 $h\in Y^*$，$\|h\|=1$，使得 $h(Ax)=\|Ax\|$，于是

$$\|Ax\|=h(Ax)=(A^*h)(x)\leqslant\|A^*h\|\|x\|\leqslant\|A^*\|\|h\|\|x\|$$

对于 $Ax=0$ 的 x，上式自动成立. 所以上式对一切 x 都成立，即有 $\|A\|\leqslant\|A^*\|$. 因此，$\|A\|=\|A^*\|$，即映照 $A\longmapsto A^*$ 是保范的.

设 α、β 是数，$C\in\mathfrak{B}(X\to Y)$. 从 A、C 和 h 的线性就得到

$$\begin{aligned}[(\alpha A+\beta C)^*h](x)&=h[(\alpha A+\beta C)x]\\&=\alpha h(Ax)+\beta h(Cx)\\&=[(\alpha A^*+\beta C^*)h](x)\end{aligned}$$

因此 $A\longmapsto A^*$ 是线性算子.

---

① I_X、I_{X^*} 分别表示赋范空间 X 及其共轭空间 X^* 上的单位算子.

(iii) 对任何 $h\in X^*$, $x\in X$, 由(3.4), $(I_X^*h)(x)=h(I_Xx)=h(x)$, 即 $I_X^*h=h$, 对一切 $h\in X^*$ 成立, 所以 I_X^* 是 X^* 上的单位算子 I_{X^*}.

(iv) 对任何 $g\in Z^*, x\in X$

$$[(BA)^*g](x)=g[(BA)x]=g[B(Ax)]$$
$$=(B^*g)(Ax)=[A^*(B^*g)](x)$$

由于对一切 $x\in X$ 上式成立, 所以

$$(BA)^*g=A^*(B^*g), g\in Z^*$$

这就得到(3.5). 证毕.

既然映照 $x\longmapsto x^{**}$ 将 X 中的向量 x 嵌入第二共轭空间, 自然也可以把算子"嵌入"第二共轭空间.

设 A 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的有界线性算子. A^* 是 Y^* 到 X^* 的有界线性算子, 而且 $\|A^*\|=\|A\|$. 这样, 算子 $A^{**}=(A^*)^*$ 就是 X^{**} 到 Y^{**} 的有界线性算子, 而且 $\|A^{**}\|=\|A^*\|$. 于是当 $x\in X, f\in Y^*$ 时

$$(A^{**}x^{**})(f)=x^{**}(A^*f)=A^*f(x)=f(Ax)=(Ax)^{**}(f)$$

由此得到

$$(Ax)^{**}=A^{**}x^{**}$$

如果把 X 嵌入 X^{**}, Y 嵌入 Y^{**}, 那末上式便是

$$Ax=A^{**}x$$

这样便得到

定理 7 设 X、Y 是赋范线性空间, A 是 X 到 Y 的有界线性算子. 当 X、Y 分别嵌入 X^{**}, Y^{**} 时, 那末 A^{**} 便是算子 A 在 X^{**} 上的延拓, 而且 $\|A\|=\|A^{**}\|$.

习 题

1. 证明: 当 X 是自反空间时, $X^*=X^{***}=X^{5*}=\cdots=X^{(2n+1)*}=\cdots$,

$X^{**}=X^{4*}=\cdots=X^{(2n)*}=\cdots$.

2. 证明空间 $C[a, b]$ 中点列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 的充要条件是存在常数 M, 使得 $\|x_n\|\leqslant M$, $n=1, 2, \cdots$, 而且对每个 $t\in[a, b]$

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t)=x_0(t)$$

(注: 在证明 $\|x_n\|\leqslant M(n=1, 2, \cdots)$ 是必要的时候, 不要用下一节的共鸣定理, 而应直接证明)。

3. 设 X 是赋范线性空间, M 是 X 的闭线性子空间. 证明: 如果 $\{x_n\}\subset M$, 而且当 $n\to\infty$ 时, $x_0=(\text{弱})\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 那末 $x_0\in M$.

4. 证明 l^1 不是自反的.

5. 证明 l^1 中任何弱收敛的点列必是强收敛的.

6. 设 A 是 $l^p(\infty>p\geqslant 1)$ 上有界线性算子, 如果适合 $Ae_n=e_{n+1}$, $n=1, 2, \cdots$, 而 $e_n=(\overbrace{0, \cdots, 0}^{n}, 1, 0\cdots)$. 证明 A 是有界的, 并求出 $\|A\|$ 及 A^*.

7. 设 X、Y 是两个赋范线性空间, $\{A_n\}\subset\mathfrak{B}(X\to Y)$, $A\in\mathfrak{B}(X\to Y)$.

(i) 证明: 如果 $A_n\xrightarrow{\text{一致}} A$, 则 $A_n^*\xrightarrow{\text{一致}} A^*$.

(ii) 如果 $A_n\xrightarrow{\text{强}} A$, 问是否 $A_n^*\xrightarrow{\text{强}} A^*$?

(iii) 如果 $A_n\xrightarrow{\text{强}} A$, 是否对每个 $y^*\in Y^*$, $A_n^*y^*\xrightarrow{\text{弱}^*} A^*y^*$?

8. 设 $K(x, y)\in L^2[0, 1; 0, 1]$, 作 $L^2[0, 1]$ 上有界线性算子

$$(Kf)(x)=\int_0^1 K(x, y)f(y)dy, \quad f\in L^2[0, 1]$$

求出 K^* 的表达式.

9. 证明自反的 Banach 空间 X 是可析的充要条件是 X^* 是可析的.

10. 设 L 是赋范线性空间 X 的线性子空间. 令 $L^\perp=\{x^*|x^*\in X^*, x^*(x)=0, x\in L\}$. 证明 $L^*=X^*/L^\perp$ (提示: 用泛函延拓定理证明 $\tilde{f}\mapsto f|_L$ 是 $X^*/L^\perp$ 到 L^* 的线性保距同构, 其中 $f\in\tilde{f}$, $f/_L$ 是 f 在 L 上限制). 如果 L 是闭线性子空间, 那末 $(X/L)^*=L^\perp$ (提示: 对任何 $f\in L^\perp$, 定义 $\tilde{f}(\tilde{x})=f(x)$, $x\in\tilde{x}\in X/L$. 证明 $f\longmapsto\tilde{f}$ 是线性保距同构).

11. 证明 Banach 空间 X 是自反的充要条件是 X 的任何闭线性子空间是自反的.

12. 自反空间 X 中任何有界集必弱致密.

13. X 是自反的充要条件是 X^* 是自反的.

14. 设 X 是 Banach空间, Y 是赋范线性空间. 证明 $\mathfrak{B}(X\to Y)$ 弱完备的充要条件是 Y 是弱完备的(这里弱完备是指弱基本序列必弱收敛).

15. 设 X、Y 是两个赋范线性空间, $\{A_n\}\subset\mathfrak{B}(X\to Y)$. 如果对任何 $x\in X$, $\{A_nx\}$ 为 Y 中基本点列, 称 $\{A_n\}$ 为**强基本序列**; 如果对任何 $x\in X$, $f\in Y^*$, $\{f(A_nx)\}$ 为基本数列, 称 $\{A_n\}$ 为**弱基本序列**.

证明 (i) 如果 $\{A_n\}$ 按算子范数是基本的序列, 并且弱收敛, 那末 $\{A_n\}$ 必按算子范数收敛.

(ii) 如果 $\{A_n\}$ 是强基本序列, 并且弱收敛, 那末 $\{A_n\}$ 必强收敛.

§4 逆算子定理和共鸣定理

在这一节中我们将介绍关于 Banach 空间中算子的另外一些基本的定理, 如逆算子定理、共鸣定理以及闭图象定理等.

1. 逆算子定理 在 §1 中我们介绍了线性算子的加、减以及乘法运算. 这一段就是要考察一下算子的"除"法运算. 这是很重要的运算, 因为它和解各种方程密切相关.

设 E 及 F 为两个集, B 为一个算子, 其定义域 $\mathscr{D}(B)\subset E$, 值域 $\mathscr{R}(B)\subset F$. 如果 B 是可逆映照, 即 $\mathscr{D}(B)$ 上到 $\mathscr{R}(B)$ 上一对一的映照. 由第一章 §2 知道 B 的逆算子 B^{-1} 存在, 它以 $\mathscr{R}(B)$ 为定义域, 以 $\mathscr{D}(B)$ 为值域. 容易证明当 B 是线性算子时, B^{-1} 也是线性算子.

定义 设 X、Y 是两个赋范线性空间, 又设 B 为线性算子, $\mathscr{D}(B)\subset X$, $\mathscr{R}(B)\subset Y$. 如果逆算子 B^{-1} 存在, 而且 $\mathscr{R}(B)=Y$, 以及 B^{-1} 是有界线性算子, 那末称 B 是**正则算子**.

设 B 是线性算子, $\mathscr{D}(B)\subset X$, $\mathscr{R}(B)\subset Y$, 并且 B^{-1} 存在, 显然

$$B^{-1}B=I_{\mathscr{D}(B)},\quad BB^{-1}=I_{\mathscr{R}(B)}$$

其中 $I_{\mathscr{D}(B)}$、$I_{\mathscr{R}(B)}$ 分别是子空间 $\mathscr{D}(B)$、$\mathscr{R}(B)$ 上恒等算子. 反之, 如果有 Y 到 X 的线性算子 C, 使得

$$CB = I_{\mathscr{D}(B)}, \quad BC = I_{\mathscr{D}(C)} \tag{4.1}$$

那末 B^{-1} 必存在，而且 $B^{-1}=C$. 事实上，因为对任何 x_1、$x_2 \in \mathscr{D}(B)$，如果 $Bx_1 = Bx_2$，那末 $x_1 = CBx_1 = CBx_2 = x_2$，所以 B 是可逆的. 由于 $BC = I_{\mathscr{D}(C)}$，因此对任何 $y \in \mathscr{D}(C)$ 必有 $x = Cy$，使得 $Bx = y$，即 $\mathscr{R}(B) \supset \mathscr{D}(C)$. 另一方面，又从 $CB = I_{\mathscr{D}(B)}$ 得到 $\mathscr{R}(B) \subset \mathscr{D}(C)$. 从而 $\mathscr{R}(B) = \mathscr{D}(C)$. 由此立即得

$$B^{-1} = (CB)B^{-1} = CBB^{-1} = C$$

特别，当 $\mathscr{D}(C) = Y$，并且 C 是有界线性算子时，由上面事实立即得下列命题.

引理 1 设 X、Y 是两个赋范线性空间，$B \in \mathfrak{B}(X \to Y)$，$B$ 为正则算子的充要条件是存在 $C \in \mathfrak{B}(Y \to X)$ 适合(4.1).

系 设 X、Y 是两个赋范线性空间，又设 $A \in \mathfrak{B}(X \to Y)$ 是正则的. 那末 A^* 也是正则的，而且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

证 由于 $A^{-1} \in \mathfrak{B}(Y \to X)$，而且

$$AA^{-1} = I_Y, \ A^{-1}A = I_X$$

再根据 §3 定理 6 的(iii)和(iv)，对上式两边取*(共轭)就得到

$$(A^{-1})^* A^* = I_{Y^*}, \ A^*(A^{-1})^* = I_{X^*}$$

由引理 1 得知 A^* 是正则的，而且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. 证毕.

定理 1 设 X、Y、Z 都是赋范线性空间，如果 $A \in \mathfrak{B}(X \to Y)$，并且是正则算子，$B \in \mathfrak{B}(Y \to Z)$，也是正则算子，那末 BA 是 X 到 Z 上的正则算子，并且 $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

证 根据假设，存在定义在 Y 和 Z 上的有界线性算子 B^{-1} 和 A^{-1}. 显然

$$(A^{-1}B^{-1})(BA) = I_X, \quad (BA)(A^{-1}B^{-1}) = I_Y$$

由引理 1，$A^{-1}B^{-1}$ 就是 $(BA)^{-1}$. 它是定义在 Z 上的有界线性算子，所以 BA 是正则的. 证毕.

如果 X、Y 都是赋范线性空间，B 是 X 到 Y 上的有界线性算

子，并且实现X到Y上的一一对应. 这时，逆算子B^{-1}存在，而且是Y到X上的线性算子. B^{-1}是不是有界算子呢？一般说，即使X是完备的，B^{-1}并不一定是有界的. 下面是一个反例.

例 1 设B是定义在$C[a,b]$中的积分算子：

$$(B\varphi)(t)=\int_a^t \varphi(\tau)d\tau,\quad \varphi\in C[a,b]$$

而X是$C[a,b]$中具有连续导函数$y'(t)$，而且$y(a)=0$的函数$y(t)$的全体，它按照$C[a,b]$中的范数成为赋范线性空间. 这时B是由Banach空间$C[a,b]$到X上的一对一的有界线性算子. 但是$(B^{-1}y)(t)=y'(t)$. B^{-1}就是§1例8中的算子D，那里已说过它不是有界的.

然而，如果值域也是完备的，情况就不同了. 这时有下面的Banach逆算子定理，它是深刻而应用广泛的定理.

定理 2 (Banach) 设X和Y都是Banach空间，B是X到Y上的有界线性算子，并且实现X到Y上的一一对应. 那末，逆算子B^{-1}必是有界算子.

证 显然，B^{-1}存在并且是线性的. 主要要证明B^{-1}是有界的. 证明这一点的关键在于（其实是等价于）证明X中闭单位球$S_X(0,1)$① 的象$BS_X(0,1)$能包含着Y中某个开球$O_Y(0,\varepsilon)$①(此地ε是某个正数). 如能做到

$$BS_X(0,1)\supset O_Y(0,\varepsilon) \tag{4.2}$$

便有$B^{-1}S_Y\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)\subset S_X(0,1)$，即对任何$y\in S_Y\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ $\|B^{-1}y\|\leqslant 1$，从而$\|B^{-1}\|\leqslant\frac{2}{\varepsilon}$，即$B^{-1}$有界. 下面分两步（作为两个引理）来证(4.2).

① 因为这里有两个空间X、Y，所以用下标区分属于那个空间的球. 读者注意到这点后，从引理2开始，为了简单起见，常把下标X、Y省掉

引理 2　设 B 是 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的有界线性算子，而且 $BX=Y$. 那末对任何一个 $a>0$，必有 $\delta>0$，使得 $BS(0,a)$ 在 $O(0,a\delta)$ 中稠密.

证　由于 $X=\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}S(0,\nu)$，所以 $Y=BX=\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}BS(0,\nu)$. 因为完备度量空间是第二类型的集(第四章 §7 定理 2)，所以必有一个正整数 ν，使得 $BS(0,\nu)$ 在 Y 的某个球 $O(y_0,\eta)$ 中稠密. 取 $\delta=\dfrac{\eta}{\nu}$，今证 $BS(0,a)$ 在 $O(0,a\delta)$ 中稠密. 这只要经过相似变换和平移就行了. 事实上，任取 $y\in O(0,a\delta)$，那末向量

$$y_0-\frac{\nu}{a}y,\quad y_0+\frac{\nu}{a}y$$

属于球 $O(y_0,\eta)$. 因此必有 $S(0,\nu)$ 中点列 $\{x_k\}$ 及 $\{x'_k\}$，使得

$$Bx_k\to y_0-\frac{\nu}{a}y,\quad Bx'_k\to y_0+\frac{\nu}{a}y\quad (k\to\infty)$$

所以 $B\left(a\dfrac{x'_k-x_k}{2\nu}\right)\to y$. 但是，显然 $a\dfrac{x'_k-x_k}{2\nu}\in S(0,a)$，所以 $BS(0,a)$ 在 $O(0,a\delta)$ 中稠密. 证毕.

当然，就引理 2 本身来讲，只要 X 是赋范线性空间，结论仍然成立.

特别在引理 2 中取 $a=1$，得到 $BS(0,1)$ 在 $O(0,\delta)$ 中稠密. 下面利用逼近的想法证明 $BS(0,1)\supset O(0,\varepsilon)$，此地 $\varepsilon=\dfrac{\delta}{2}$.

引理 3　设 B 是 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的有界线性算子，而且 $BX=Y$. 那末，必存在 $\varepsilon>0$，使得 $BS(0,1)\supset O(0,\varepsilon)$.

证　取 $\varepsilon=\dfrac{\delta}{2}$，这个 δ 就是引理 2 中所说的 δ. 任取 $y_0\in O(0,\varepsilon)$，

因为$BS\left(0,\frac{1}{2}\right)$在$O\left(0,\frac{\delta}{2}\right)$中稠密，必有$x_1\in S\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得

$$\|y_0-Bx_1\|<\frac{\delta}{2^2}$$

因此$y_1=y_0-Bx_1\in O\left(0,\frac{\delta}{2^2}\right)$，由于$BS\left(0,\frac{1}{2^2}\right)$在$O\left(0,\frac{\delta}{2^2}\right)$中稠密，必有$x_2\in S\left(0,\frac{1}{2^2}\right)$，使得

$$\|y_1-Bx_2\|<\frac{\delta}{2^3}$$

即$y_2=y_1-Bx_2=y_0-B(x_1+x_2)\in O\left(0,\frac{\delta}{2^3}\right)$. 这样继续下去，得到一列$x_n\in S\left(0,\frac{1}{2^n}\right)$，$n=1,2,\cdots$，使得

$$\|y_0-B(x_1+x_2+\cdots+x_n)\|<\frac{\delta}{2^{n+1}}$$

因此$x_0=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\in X$，而且

$$\|x_0\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\leqslant 1$$

同时，由B的连续性

$$y_0=\lim_{n\to\infty}B(x_1+x_2+\cdots+x_n)=Bx_0$$

即$BS(0,1)\supset O(0,\varepsilon)$. 证毕.

利用引理2、3立即就完成逆算子定理的证明.

对于非一对一的有界线性算子B，有着比定理2略广的，也是常被引用的所谓开映象原理.

定理3（**开映象原理**） 设B是Banach空间X到Banach空间Y的有界线性算子. 如果$BX=Y$，那末B是开映照①.

---

① 开映照定义见第四章§5.

证　设K是X中任一开集，任取BK中一点Bx_0，$x_0\in K$，只要证明Bx_0是BK的内点好了．由于K是开集，必有x_0的b-环境$O(x_0,b)\subset K$．任取正数$a<b$，这时$S(x_0,a)\subset O(x_0,b)\subset K$，因此

$$BS(x_0,a)\subset BK$$

当x是一向量，A是一向量集时，记$x+A=\{x+y\mid y\in A\}$，那末$S(x_0,a)=x_0+S(0,a)$．因此，由引理3，有$BS(x_0,a)=Bx_0+BS(0,a)\supset Bx_0+O(0,\ a\varepsilon)=O(Bx_0,a\varepsilon)$．所以，$Bx_0$是$BK$的内点．证毕．

在本章§4、§5中将给出逆算子定理在算子谱理论方面的某些应用．这里先给出它在范数等价性问题上的应用．

定义　设X是线性空间，在X上赋以两个范数$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$．如果存在正数c，使得

$$\|x\|_1\leqslant c\|x\|_2,\quad x\in X \tag{4.3}$$

称$\|\cdot\|_1$对$\|\cdot\|_2$**是连续的**，也称$\|\cdot\|_1$**弱于**$\|\cdot\|_2$，或$\|\cdot\|_2$**强于**$\|\cdot\|_1$．

如果$\|\cdot\|_1$既弱于$\|\cdot\|_2$，又强于$\|\cdot\|_2$，这就是第四章§9所定义的$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$等价．

例如，在$C[a,b]$中取$\|x\|_2=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$，$\|x\|_1=\int_a^b|x(t)|dt$．由于

$$\|x\|_1=\int_a^b|x(t)|dt\leqslant\|x\|_2(b-a)$$

所以$\|\cdot\|_1$弱于$\|\cdot\|_2$．

引理4　设$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$是线性空间X上的两个范数．下列命题成立．

(i)　$\|\cdot\|_1$弱于$\|\cdot\|_2$的充要条件是$\|\cdot\|_1$是赋范线性空间$(X,\|\cdot\|_2)$上的连续函数．

(ii)　如果$\|\cdot\|_1$弱于$\|\cdot\|_2$，则$(X,\|\cdot\|_1)^*\subset(X,\|\cdot\|_2)^*$，这里“$\subset$”是集合论的包含关系；并且存在正数$c$，使得任何$f\in(X,\|\cdot\|_1)^*$，

$\|f\|_2\leqslant c\|f\|_1$，这里$\|f\|_i(i=1,2)$表示 f 在$(X,\|\cdot\|_i)^*$上范数.

(iii) 如果$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价，那末$(X,\|\cdot\|_1)^*=(X,\|\cdot\|_2)^*$，这里"="是集合论等式；并且存在正数 c_1、$c_2(c_2\geqslant c_1)$，使得对任何 $f\in(X,\|\cdot\|_1)^*$，$c_1\|f\|_1\leqslant\|f\|_2\leqslant c_2\|f\|_1$.

证 (i) 必要性 对任何 x、$y\in X$，由于(4.3)，

$$|\|x\|_1-\|y\|_1|\leqslant\|x-y\|_1\leqslant c\|x-y\|_2$$

所以$\|\cdot\|_1$是$(X,\|\cdot\|_2)$上连续函数.

充分性 如果(4.3)不成立，那末必存在$\{x_n\}\subset X$，$\|x_n\|_2=1$，$n=1,2,\cdots$，使得$\|x_n\|_1\to\infty$. 因而$\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|_1}\right\}$按$\|\cdot\|_2$收敛于$0\in X$. 但是$\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|_1}\right\|_1=1$，$n=1,2,\cdots$，从而$\left\{\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|_1}\right\|_1\right\}$不收敛于$\|0\|_1$，这与$\|\cdot\|_1$是$(X,\|\cdot\|_2)$上的连续函数的假设相矛盾. 充分性证得.

(ii) 设 f 是 X 上的线性泛函，并且 $f\in(X,\|\cdot\|_1)^*$. 如果 X 中的点列$\{x_n\}$按$\|\cdot\|_2$收敛于 x，由(4.3)，那末$\|x_n-x\|_1\to0$，从而$|f(x_n)-f(x)|\to0$，即 $f\in(X,\|\cdot\|_2)^*$，这就是说，$(X,\|\cdot\|_1)^*\subset(X,\|\cdot\|_2)^*$.

对每个 $f\in(X,\|\cdot\|_1)^*$，由于(4.3)，所以

$$\|f\|_2=\sup_{\|x\|_2=1}|f(x)|\leqslant\|f\|_1\sup_{\|x\|_2=1}\|x\|_1\leqslant c\|f\|_1$$

(iii) 由于$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$等价的充要条件是$\|\cdot\|_1$弱于$\|\cdot\|_2$，$\|\cdot\|_2$弱于$\|\cdot\|_1$同时成立. 由此可知(iii)是(ii)的推论. 证毕.

下面是 Banach 空间上有关范数等价性的定理.

定理 4 设$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$是线性空间 X 上的两个范数. 如果 X 按这两个范数都成为 Banach 空间，并且$\|\cdot\|_1$弱于$\|\cdot\|_2$，那末$\|\cdot\|_2$必也弱于$\|\cdot\|_1$. 从而$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$必等价.

证 视 X 上恒等算子 I 为$(X,\|\cdot\|_2)\to(X,\|\cdot\|_1)$的线性算子，由于(4.3)，

$$\|Ix\|_1=\|x\|_1\leqslant c\|x\|_2$$

所以 I 是 Banach 空间 $(X,\|\cdot\|_2)$ 到 $(X,\|\cdot\|_1)$ 的有界线性算子. 显然, I 是 $(X,\|\cdot\|_2)$ 到 $(X,\|\cdot\|_1)$ 上的一一对应. 由逆算子定理 $I^{-1}(=I)$ 也是有界的, 因而存在正数 c_1(例如 $c_1=\|I^{-1}\|$), 使得

$$\|x\|_2=\|I^{-1}x\|_2\leqslant c_1\|x\|_1$$

这就是说 $\|\cdot\|_2$ 弱于 $\|\cdot\|_1$. 证毕.

定理 4 既是逆算子定理的推论, 也是泛函分析中常用的定理.

定理 5 (闭图象定理)　设 X、Y 是两个 Banach 空间, T 是 $\mathscr{D}(T)(\subset X)$ 到 Y 的闭线性算子, 如果 $\mathscr{D}(T)$ 是 X 中的闭线性子空间, 那末 T 是连续的.

证　显然乘积空间 $X\times Y$ 按范数 $\|(x,y)\|=\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}$ 成为赋范线性空间, 而且很容易证明它是完备的. T 的图象 $G(T)=\{(x,Tx)\mid x\in\mathscr{D}(T)\}$, 由于 T 是线性算子, 易知 $G(T)$ 是 $X\times Y$ 中线性子空间. 由假设 $G(T)$ 是 $X\times Y$ 中的闭集, 所以 $G(T)$ 本身按范数 $\|(x,y)\|$ 成为 Banach 空间. 又 $\mathscr{D}(T)$ 作为 X 的线性子空间也是闭的, 即 $\mathscr{D}(T)$ 本身也可以看成 Banach 空间. 我们作 $G(T)$ 到 $\mathscr{D}(T)$ 的算子 B 如下:

$$B:(x,Tx)\longmapsto x,\quad x\in\mathscr{D}(T)$$

这显然是线性算子, 而且

$$\|B(x,Tx)\|=\|x\|\leqslant\|(x,Tx)\|$$

所以 B 是有界的. 显然 $\mathscr{R}(B)=\mathscr{D}(T)$, 即 B 是 $G(T)$ 到 $\mathscr{D}(T)$ 上的算子. 再证 B 是一对一的: 事实上, 当 $x_1=x_2$ 时, 必然 $Tx_1=Tx_2$, 所以 $(x_1,Tx_1)=(x_2,Tx_2)$. 这说明 B 是可逆映照. 根据逆算子定理, B^{-1} 是有界的,

$$\|(x,Tx)\|=\|B^{-1}x\|\leqslant\|B^{-1}\|\|x\|$$

因此 $\|Tx\|\leqslant\|(x,Tx)\|\leqslant\|B^{-1}\|\|x\|$, 这说明 T 是有界的. 证毕.

闭图象定理在验证算子是连续算子时是常要用到的. 特别是

用泛函分析方法研究偏微分方程时这个定理比较重要．由于偏微分算子要直接验证它的连续性有时比较困难．但是我们可以用第四章§5所提供的算子成为闭算子的充要条件，来验证某些微分算子是闭算子，然后再利用闭图象定理来证明它是连续算子．此外在讨论 Hilbert 空间对称算子（参见第六章§9）时也要用到闭图象定理．这个定理在局部凸拓扑线性空间理论中也有进一步的推广．

2．共鸣定理 设 X、Y 是两个 Banach 空间，$\{T_\tau|\tau\in A\}$是 X 到 Y 的一族有界线性算子．所谓共鸣定理，就是：如果$\{T_\tau|\tau\in A\}$将X中每个点x映照成 Y 中的一个有界集$\{T_\tau x|\tau\in A\}$（即$\{\|T_\tau x\||\tau\in A\}$有界），那末算子族$\{T_\tau|\tau\in A\}$是一致有界的（即$\{\|T_\tau\||\tau\in A\}$是有界数集）．这个定理也是Banach 空间重要定理之一．从上一世纪中叶开始，在几个不同的数学领域里发现这个定理的一些特殊情形．例如 Fourier 级数理论中迪·布瓦·雷蒙（P. du Bois Reymond, 1876）给出了连续函数的 Fourier 级数发散的例子，陶普里茨（O. Toeplitz）和斯坦因豪斯（H. Steinhaus, 1911）等人关于级数求和法的结果（见后面例 4），Hahn(1918) 关于插值问题的研究，以及勒贝格、许耳(I. Schur, 1920)、Hahn(1922)等人关于求和法与奇异积分问题的研究，在这些工作中都发现了同类的定理．在这个基础上，Banach 与 Steinhaus 共同提出了这个一般定理．有时也称它为有界线性算子的一致有界性原理．

共鸣定理由于来源广泛，它的证明方法也很多．我们这里先应用定理 4 来证明它．

定理 6（共鸣定理，Banach-Steinhaus定理） 设X是Banach 空间，Y 是赋范线性空间，$\{T_\tau,\ \tau\in A\}$是从X到 Y 的一族有界线性算子，如果对每个 $x\in X$

$$\sup_{\tau\in A}\|T_\tau x\|<\infty \tag{4.4}$$

那末数集$\{\|T_\tau\|, \tau\in\Lambda\}$是有界的.

证 任取一个指标$\alpha\bar{\in}\Lambda$, 令$\Lambda_1=\Lambda\cup\{\alpha\}$, 规定$T_\alpha=I$. 在Banach空间$X$上再规定一个范数:

$$\|x\|_1=\sup_{\tau\in\Lambda_1}\|T_\tau x\|=\max(\|x\|, \sup_{\tau\in\Lambda}\|T_\tau x\|), x\in X$$

由于$\|T_\alpha x\|=\|x\|$, 所以$\|x\|_1\geqslant\|x\|$, 又由(4.4), $\|x\|_1<\infty$, $\|\cdot\|_1$显然满足对范数的正齐性以及从$\|x\|_1=0$推出$x=0$的要求. 今证三角不等式也满足: 事实上, 由于

$$\|T_\tau(x+y)\|\leqslant\|T_\tau x\|+\|T_\tau y\|\leqslant\sup_{\tau\in\Lambda_1}\|T_\tau x\|+\sup_{\tau\in\Lambda_1}\|T_\tau y\|$$
$$=\|x\|_1+\|y\|_1$$

因此

$$\|x+y\|_1\leqslant\sup_{\tau\in\Lambda_1}\|T_\tau(x+y)\|\leqslant\|x\|_1+\|y\|_1$$

现在证明X按$\|\cdot\|_1$成为Banach空间. 事实上, 如果$\{x_n\}$按$\|\cdot\|_1$为基本的, 由于$\|\cdot\|\leqslant\|\cdot\|_1$, 所以$\{x_n\}$按$\|\cdot\|$也是基本的, 因此有$x_0$, 使得$\|x_n-x_0\|\to0$. 今证$\{x_n\}$按$\|\cdot\|_1$收敛于$x_0$: 对任何$\varepsilon>0$, 必存在$N$, 当$n, m\geqslant N$时

$$\|x_n-x_m\|_1<\frac{\varepsilon}{2}$$

即当$\tau\in\Lambda_1$时, $\|T_\tau(x_n-x_m)\|<\frac{\varepsilon}{2}$. 令$m\to\infty$就得到

$$\|T_\tau(x_n-x_0)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

所以当$n\geqslant N$时

$$\|x_n-x_0\|_1\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

即$\{x_n\}$按$\|\cdot\|_1$收敛于x_0.

根据定理4必存在$c>0$, 使得$\|x\|_1\leqslant c\|x\|$对一切$x\in X$成立, 也就是说$\{\|T_\tau\| \mid \tau\in\Lambda\}$是有界数集, 上界不超过$c$. 证毕.

下面是不用逆算子定理的证明方法.

证 作X上的泛函

$$p(x)=\sup_{\tau\in\Lambda}\|T_\tau x\|$$

这个泛函具有下述性质:

(i) $p(x)$是拟范数;

(ii) 对任一$M>0$, 集$\{x\mid p(x)\leqslant M\}$是闭的.

性质(i)是显然的. 今证(ii): 因为$\{x\mid \|T_\tau x\|\leqslant M\}$是$X$中的闭集, 因此

$$\{x\mid p(x)\leqslant M\}=\bigcap_{\tau\in\Lambda}\{x\mid \|T_\tau x\|\leqslant M\}$$

是一族闭集的交集, 因而也是闭集.

记 $X_k=\{x\mid p(x)\leqslant k\}$, 那末$X=\sum_{k=1}^{\infty}X_k$. 但$X$是第二类型集, 所以必有一个$X_k$在某一球$O(x_0,\varepsilon)$中稠密. 又由(ii), X_k是闭集, 因此$X_k\supset O(x_0,\varepsilon)$, 所以对于$X_k$中任一点$x\neq 0$, 必然

$$x_0-\frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|},\ x_0+\frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|}\in O(x_0,\varepsilon)$$

从而

$$p\left(x_0+\frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|}\right)\leqslant k,\qquad p\left(x_0-\frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|}\right)\leqslant k$$

由拟范数的性质, 立即得到

$$p\left(\varepsilon\frac{x}{\|x\|}\right)\leqslant p\left(x_0+\frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|}\right)+p\left(\frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|}-x_0\right)\leqslant 2k$$

再由拟范数的齐次性就有$p(x)\leqslant\frac{2k}{\varepsilon}\|x\|$, 即$\|T_\tau x\|\leqslant M\|x\|$, $M=\frac{2k}{\varepsilon}$, 这就是$\|T_\tau\|\leqslant M\ (\tau\in\Lambda)$. 证毕.

利用共鸣定理和§3引理1证明中有关极限算子范数的估计.

立即得到 Banach-Steinhaus 另一个定理.

定理 7 设X是 Banach 空间, Y是赋范线性空间, $\{T_n\}\subset\mathfrak{B}(X\to Y)$. 又设对每个$x\in X$, $\{T_nx\}$收敛, 那末必存在$T\in\mathfrak{B}(X\to Y)$, 使得$\{T_n\}$强收敛于T, 而且 $\|T\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|$.

利用共鸣定理可以讨论 Banach 空间及其共轭空间中集的有界性.

定义 设Φ是赋范线性空间X的共轭空间X^*的子集, 当按泛函的范数有界时(即存在常数M, 使得对一切$f\in\Phi$, $\|f\|\leqslant M$), 称Φ是强有界的. 如果对每个$x\in X$, 数集$\{f(x)\mid f\in\Phi\}$有界, 就称Φ是弱*有界的. 设A是X的子集, 当A是有界集时, 我们也称A是**强有界**的, 而如果对每个$f\in X^*$, $\{f(x)\mid x\in A\}$有界时, 称A是**弱有界**的.

显然, 由Φ、A的强有界可以分别推出弱*有界、弱有界. 又因为致密的数集是有界的, 所以Φ的弱*致密性必导致弱*有界性. 利用"强有界"、"弱有界"、"弱*有界"以及$X\subset X^{**}$和共鸣定理, 立即可得下列系.

系 设X是 Banach 空间, 那末X^*中弱*有界集必是强有界集. 特别, 可以得到

(i) X^*中弱有界集必是强有界集;

(ii) X^*中弱*致密集必是强有界集;

(iii) 赋范线性空间X上任何弱有界集必是强有界集.

由上面的系可知, 赋范线性空间X上集的强、弱有界是一致的, X^*上强、弱、弱*有界也是一致的, 所以在任何情况下, 只要"有界"概念就可以了.

3. 共鸣定理的应用 共鸣定理在谱理论中的应用我们将在§5 中给出. 下面给出共鸣定理在其它一些数学问题上的应用. 这种应用是很多的, 这里我们只略举一些.

例 2 设 $p\geqslant 1$, $\alpha(t)$ 是$[a, b]$($-\infty<a<b<+\infty$) 上可测函数. 假如对任何 $x\in L^p[a, b]$, 积分

$$\int_a^b \alpha(t)x(t)dt$$

存在, 那末 $\alpha(t)\in L^q[a, b]$, 此地$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$(当$p=1$时, $q=\infty$).

证 作有界函数$[\alpha]_n(t)$(见第三章 §3). 利用 $[\alpha]_n$, $n=1, 2, \cdots$, 作 $L^p[a, b]$上线性泛函

$$F_n(x)=\int_a^b x(t)[\alpha]_n(t)dt,\ x\in L^p[a, b]$$

利用 Hölder 不等式, 易知 F_n 是有界泛函. 既然$|x(t)[\alpha]_n(t)|\leqslant|\alpha(t)||x(t)|$, 而且已知$|\alpha(t)||x(t)|$可积, 所以根据控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\int_a^b x(t)\alpha(t)dt, \qquad x\in L^p[a, b]$$

由定理 7, $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)$是有界线性泛函. 再根据 $L^p[a, b]^*=L^q[a, b]$, 存在唯一的$\beta\in L^q[a, b]$使得$F(x)=\int_a^b x(t)\beta(t)dt$, $x\in L^p[a, b]$, 取 $x=\chi_{[a,t]}$就知道 $\alpha=\beta$, 所以$\alpha(t)\in L^q[a, b]$. 证毕.

例 3 机械求积公式的收敛问题. 在定积分近似计算中, 通常引用机械求积公式, 就是以泛函

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{k_n}A_k^{(n)}x(t_k^{(n)}),\ a\leqslant t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{k_n}^{(n)}\leqslant b \tag{4.5}$$

作为$x(t)$的积分$\int_a^b x(t)dt$的近似值. 例如梯形法, 辛普松(Simpson)方法等都是这种类型的近似方法.

给定了一列分点组$\{(t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \cdots, t_{k_n}^{(n)})\}$及一列常数组$\{(A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, \cdots, A_{k_n}^{(n)})\}$后, 等式(4.5)定义了空间$C[a, b]$上的连续线性泛函 f_n. 现在的问题是: 在怎样条件下, 泛函 f_n在每一点 $x\in C[a, b]$

上收敛于积分$\int_a^b x(t)\,dt$.

定理 8 (斯切克洛夫, 舍苟Стеклов-Szegö)机械求积公式$f_n(x)$对任一函数 $x\in C[a,b]$ (实空间) 收敛于$\int_a^b x(t)\,dt$的充要条件是:

(i) 有常数 M, $\sum_{k=0}^{k_n}|A_k^{(n)}|\leqslant M$;

(ii) 对任一多项式 $x=x(t)$, $f_n(x)\to\int_a^b x(t)\,dt\ (n\to\infty)$.

证 首先证明

$$\|f_n\|=\sum_{k=0}^{k_n}|A_k^{(n)}| \tag{4.6}$$

事实上, 显然成立着不等式

$$|f_n(x)|\leqslant\sum|A_k^{(n)}|\,\|x\|,\ x\in C[a,b]$$

另一方面, 对每个 n, 可取$[a,b]$上的连续函数 $x_n(t)$适合

$$x_n(t_k^{(n)})=\operatorname{sign}A_k^{(n)},\ k=0,1,2,\cdots,k_n$$

而且$\|x_n\|=1$, 于是

$$|f_n(x_n)|=\sum_{k=0}^{k_n}|A_k^{(n)}|$$

因此(4.6)成立.

利用(4.6)及共鸣定理便知(i)是必要的, 而(ii)的必要性是显然的.

反过来,如果给定的分点组序列和数组序列适合条件(i)、(ii), 其中 f_n是由 (4.5) 式所定义的 $C[a,b]$上的泛函. 因为多项式全体在空间 $C[a,b]$中稠密, 由 §3 引理 1, 必有 $C[a,b]$上连续线性泛函f, 使得对每个 $x\in C[a,b]$, $f_n(x)\to f(x)$. 但由条件(ii), 对多项式 $x(t)$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\int_a^b x(t)\,dt=f(x)$$

由 f 的连续性，对任意的 $x\in C[a, b]$，便有

$$f(x)=\int_a^b x(t)\,dt$$

证毕．

系 设 $A_k^{(n)}\geqslant 0$，那末对每个 $x\in C[a, b]$，$f_n(x)\to\int_a^b x(t)\,dt$ 的充要条件是对每个多项式 $x(t)$，$f_n(x)\to\int_a^b x(t)\,dt$，$(n\to\infty)$．

证 当 $A_k^{(n)}\geqslant 0$ 时，定理中条件(ii)含有条件(i)．事实上

$$\sum_{k=0}^{k_n}|A_k^{(n)}|=\sum_{k=0}^{k_n}A_k^{(n)}=f_n(1)\to\int_a^b 1\,dx=(b-a)$$

所以有 M，使(i)式成立．由定理 8 就得此系．

例 4 级数的广义求和问题 设有数项级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

其部分和是 $s_n=\sum_1^n a_\nu$，如果有数 $s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n$，我们就称级数 $\sum_1^\infty a_n$ 按 Cauchy 意义可求和．s 称为它的 Cauchy 和．这就是通常的级数和．

如果给定一个无限行，无限列的阵 (α_{nk})，$n, k=1, 2, \cdots$，作

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^\infty \alpha_{nk}s_k,\ n=1, 2, \cdots \tag{4.7}$$

假如对每个固定的 n，(4.7)中级数按 Cauchy 意义收敛，而且 $\{\sigma_n\}$ 也收敛，即有 σ，$\sigma_n\to\sigma$，就称级数 $\sum_1^\infty a_\nu$ 按阵 (α_{nk}) **广义可和**，并称 σ 是级数 $\sum_1^\infty a_\nu$（关于 (α_{nk})）的广义和．例如当 $\alpha_{nk}=\delta_{nk}$ 时，广义和就是 Cauchy 和．又如蔡查罗(Cesàro)的 $(C, 1)$ 求和法的求和阵是

$$(\alpha_{nk})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & 0 & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

相应于此阵的 σ_n 为:

$$\sigma_n=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}s_\nu$$

(它是 $\sum_1^\infty a_\nu$ 的前 n 个部分和的算术平均). 级数的广义求和法很多，是经典分析中一个重要分支.

设由阵 (α_{nk}) 给出一个广义求和法，如果每个按 Cauchy 意义收敛的级数 $\sum_1^\infty a_\nu$ 也是按 (α_{nk}) 可求和的，而且级数的广义和等于 Cauchy 和，就是说只要 $s_n\to s$，那末 $\sigma_n=\sum_{k=1}^\infty \alpha_{nk}s_k\to s$. 这时称这种广义求和法是正则的. 正则的求和阵 (α_{nk}) 称为 Toeplitz 阵或 T-阵. 例如 $(C,1)$ 求和就是正则的. 下面是 T-阵的特征.

定理 9 (Toeplitz, 1911) (α_{nk}) 成为 T-阵的充要条件是

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{nk}=0,\ k=1,2,\cdots$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^\infty \alpha_{nk}=1$;

(iii) $\sum_{k=1}^\infty |\alpha_{nk}|\le M,\ n=1,2,\cdots$.

为证明这个定理，先证一个类似于例3的引理.

引理 5 设 c 是收敛数列 $x=\{x_n\}$ 全体，按范数

$$\|x\|=\sup_{n\geq 1}|x_n|$$

所成的 Banach 空间. 又设 $\{\alpha_k\}$ 是一列数. 如果对每个 $x=\{x_n\}\in c$，数值

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu x_\nu$$

存在，那末 f 是 c 上的连续线性泛函，并且 $\|f\|=\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|<\infty$.

证 对每个自然数 n，令

$$f_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu x_\nu$$

那末 f_n 是 c 上的连续线性泛函. 由假设，对每个 $x\in c$，$f_n(x)\to f(x)$，所以由定理 7 知道 f 是 c 上的连续线性泛函. 根据 §2 习题 12，必然有 $\|f\|=\sum_{\nu=1}^{\infty}|\alpha_\nu|<\infty$. 证毕.

定理 9 的证明 必要性：设 (α_{nk}) 是 T-阵，那末对于每个 $x=(s_1, s_2, \cdots)\in c$，级数

$$g_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}s_k \tag{4.8}$$

收敛，如果记

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}g_n(x),\ x=(s_1, s_2, \cdots)\in c$$

那末当 $x\in c$ 时

$$\lim_{n\to\infty}g_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}s_k=g(x) \tag{4.9}$$

因为 $g_n(x)$ 是 Banach 空间 c 上的有界线性泛函，并且

$$\|g_n\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}|$$

由定理 6 就知道$\{\|g_n\|\}$有界，这就是(iii)。

做 c 中的点列 $e^{(0)}, e^{(1)}, \cdots, e^{(k)}, \cdots$如下：

$e^{(0)} = (1, 1, 1, \cdots)$（每个坐标都是 1）

$e^{(k)} = (0, \cdots, 0, 1, 0, 0, \cdots)$（第 k 个坐标是1，其余是 0）那末

$$g_n(e^{(0)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}, \quad g_n(e^{(k)}) = \alpha_{nk} \quad (n, k = 1, 2, \cdots)$$

由(4.9)知道，当$n \to \infty$时

$$g_n(e^{(0)}) \to g(e^{(0)}) = 1, \; g_n(e^{(k)}) \to g(e^{(k)}) = 0 \;\; (k \geqslant 1) \qquad (4.10)$$

这样就得到(ii)和(i)。

充分性：设(α_{nk})满足(i)、(ii)。令$\mathscr{D}$为点列$\{e^{(k)}\}$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$在 c 中的线性包。$\mathscr{D}$是只有有限项不为零的(收敛)数列全体，显然$\mathscr{D}$在 c 中稠密。由 (iii)，$g_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} x_k$，$x = \{x_k\} \in c$ 是 c 上有界线性泛函，且$\|g_n\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leqslant M$。易知如能证明对于$\mathscr{D}$中的 x，(4.9)成立，那末对 c 中任何 x，(4.9)也就成立。因而(α_{nk})就是 T-阵了。

由条件(i)、(ii)知道对于$\{e^{(k)}\}$诸点(4.9)成立，所以对于它们的任一线性组合，即 $x \in \mathscr{D}$，(4.9)式必成立。这正是所要求的结果。证毕。

此外，还有把共鸣定理用来研究插值问题以及连续参数类型的问题。这里不一一举例。

习 题

1. 证明定理 7 的系。

2. 设 X、Y 是两个赋范线性空间. $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$是一族 $X\to Y$ 的有界线性算子. 如果对任何 $x\in X$, $y^*\in Y^*$, 数集 $\{y^*(A_\alpha x)|\alpha\in\Lambda\}$ 是有界集, 那末称$\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$是**弱有界**. 证明: 当 X 是 Banach 空间时, 则从$\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$的弱有界性必可推出$\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$按算子范数的有界性.

3. 举例说明共鸣定理中空间完备性的假设不可除去.

4. 证明盖勒范德引理: 设 X 是 Banach 空间, $p(x)$是 X 上的泛函, 适合下面的条件:

(i) $p(x)\geqslant 0$;

(ii) α为非负数时, $p(\alpha x)=\alpha p(x)$;

(iii) $p(x_1+x_2)\leqslant p(x_1)+p(x_2)$;

(iv) 当 $x\in X$, $x_n\to x$ 时, $\varliminf_{n\to\infty} p(x_n)\geqslant p(x)$;

那末必有正数 M, 使得对一切 $x\in X$, $p(x)\leqslant M\|x\|$.

定义　设 X 是线性空间, P 是定义在 X 上的线性算子, 如果满足 $P^2=P$, 那末称 P 是 X 上**投影算子**. 当 X 是赋范线性空间时, 满足 $P^2=P$ 的有界线性算子称为投影算子.

定义　设 X 是线性空间, Y、Z 是 X 的两个线性子空间. 如果 X 中的任何 x, 必可唯一地分解成 $x=y+z$, $y\in Y$, $z\in Z$. 那末称 X 是 Y、Z 的**直接和**, 记为 $X=Y\dot{+}Z$.

5. 设 P 为 X 上投影算子. 证明(i) $I-P$ 也是 X 上投影算子. (ii)记$L_P=\{y|Py=y, y\in X\}$, $L_{I-P}=\{z|(I-P)z=z, z\in X\}$, 那末 $X=L_P\dot{+}L_{I-P}$.

反之, 设 $X=Y\dot{+}Z$, 作 X 上算子 P_Y: 当 $x=y+z$ 时, 规定 $P_Yx=y$. 证明 P_Y 是 X 上投影算子, 并且 $Y=\{y|P_Yy=y, y\in X\}$.

6. 设 X 是赋范线性空间. 证明: 如果 P 是投影算子(按定义, 它是有界线性算子, 并且 $P^2=P$), 那末 L_P、L_{I-P} 都是 X 的闭线性子空间.

反之, 当 Y、Z 是 Banach 空间 X 的两个闭线性子空间, 并且 $X=Y\dot{+}Z$ 时, 那末习题 5 中所定义的算子P_Y、P_Z是 X 上的投影算子(主要证明 P_Y、P_Z的有界性), 并且 $I=P_Y+P_Z$.

7. 试举一例: X 是 Banach 空间, Y 是 X 的闭线性子空间, Z 是 X 的线性子空间, 并且 $X=Y\dot{+}Z$, 但 Z 不是闭线性子空间(利用无限维赋范线性空间中存在定义在全空间上的(无界)线性泛函, 作出所要求的例子).

8. 设 X、Y 都是 Banach 空间, A 是 $X\to Y$ 的线性算子($\mathscr{D}(A)=X$).

证明：如果对每个 $y^*\in Y^*$，$y^*(Ax)$ 作为 X 空间上的泛函是连续线性泛函，那末 $A\in\mathfrak{B}(X\to Y)$。

9. X、Y、Z 都是 Banach 空间，$\Phi(x,y)$ 是 $X\times Y\to Z$ 上的映照，如果固定每个 x，$\Phi(x,y)$ 是 y 的线性映照；固定每个 y，$\Phi(x,y)$ 是 X 的线性映照，称 $\Phi(x,y)$ 是**双线性映照**。证明：如果对每个 $z^*\in Z^*$，$z^*(\Phi(x,\cdot))\in Y^*$，$z^*(\Phi(\cdot,y))\in X^*$，那末必存在常数 M，使得 $\|\Phi(x,y)\|\leqslant M\|x\|\|y\|$。

10. 设 X、Y 是 Banach 空间，$A\in\mathfrak{B}(X\to Y)$，并且 $AX=Y$。证明：存在常数 N，对任何 Y 中收敛于 y_0 的点列 $\{y_n\}$，必存在 $\{x_n\}\subset X$，使得 $\|x_n\|\leqslant N\|y_n\|$，$Ax_n=y_n(n=1,2,\cdots)$ 且 $x_n\to x_0$。（提示：应用开映象原理）

11. 设 $\{x_n\}$ 是 Banach 空间中一个点列，如果对每个 $x\in X$，总存在唯一数列 $\{\alpha_i(x)\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_ix_i\|=0$ $\left(\text{即 } x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_ix_i\right)$，称 $\{x_n\}$ 为 X 中的**基**，并称 X 是具有基的 Banach 空间。证明在有基 $\{x_i\}$ 的 Banach 空间 X 上，展开式 $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i(x)x_i$ 中的 $\alpha_i(x)\in X^*$。（提示：在 X 上作新范数 $\|x\|_1=\sup\limits_n\|\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(x)x_i\|$，则 $(x,\|\cdot\|_1)$ 是 Banach 空间）。

12. 设 $(E,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，$(F,\|\cdot\|_1)$ 是赋范线性空间，$\|\cdot\|_2$ 是 F 上第二个范数，并且 $(F,\|\ \|_2)$ 成为 Banach 空间。如果 $\|\cdot\|_2$ 强于 $\|\cdot\|_1$，那末任何 $(E,\|\cdot\|)\to(F,\|\cdot\|_1)$ 的有界线性算子 T 必是 $(E,\|\cdot\|)\to(F,\|\cdot\|_2)$ 的有界线性算子（提示：用闭图象定理）

13. T 是 $L^2[0,1]$ 上有界线性算子。证明：如果 T 把 $L^2[0,1]$ 中连续函数映照成连续函数，则 T 是 $C[0,1]$ 上有界线性算子。

定义 设 Γ 是平面上 Jordan 曲线，$f(z)$ 是定义在 Γ 上取值于 Banach 空间 X 上的抽象值（向量值）函数，如果存在 X 上的元 x，使对一切 $x^*\in X^*$，

$$x^*(x)=\int_\Gamma x^*(f(z))\,dz$$

称 $f(z)$ 在 Γ 上**弱可积**（或在 Γ 上 **Pettis 可积**），又称 x 为 $f(z)$ 在 Γ 上的**弱**（或 **Pettis**）**积分**，记为

$$x=\int_\Gamma f(z)\,dz$$

在 Γ 上任取一分点组 $z_0,z_1,\cdots,z_n$，如果存在 $x\in X$，使得

$$(强)\lim_{\lambda\to 0}\sum f(\xi_i)(z_i-z_{i-1})=x$$

其中 $\lambda=\max_i|z_i-z_{i-1}|$，$\xi_i$ 是弧 $\widehat{z_{i-1}z_i}$ 上任一点，称 $f(z)$ 在 Γ 上**强可积**，又称 x 为 $f(z)$ 在 Γ 上**强积分**，仍记为

$$x=\int_{\Gamma}f(z)dz$$

14. 设 Γ 是平面上 Jordan 曲线[①]，$f(z)$ 是定义在 Γ 上取值于 Banach 空间 X 上的抽象值函数. 证明：当 $f(z)$ 是 Γ 上(强) 连续函数时，$f(z)$ 在 Γ 的强、弱积分存在，并且两个积分相等.

15. 设 G 是平面上一个区域，$f(z)$ 是定义在 G 上取值于 Banach 空间 X 上的抽象值函数. 证明：如果对每个 $x^*\in X^*$，$x^*(f(z))$ 是 G 上(数值)解析函数，那末对任何 $\xi\in G$，

$$(强)\lim_{z\to\xi}\frac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi}$$

存在，并且在 G 中每点 z_0 的近旁，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 成立，这里 $a_n\in X$，级数是强收敛.

16. 设 X 是线性空间，$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 分别是 X 上的范数. 如果对任何关于 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 都收敛的序列 $\{x_n\}$ 必有相同的极限点，那末称 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 是符合的.

证明：如果 X 分别按 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 成为 Banach 空间，并且 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 是符合的，那末 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

17. X 为线性空间，$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 分别是 X 上的范数. 如果凡对 $\|\cdot\|_1$ 为连续的线性泛函，也必为 $\|\cdot\|_2$ 连续，那末必存在数 $\alpha>0$，使对一切 $x\in X$，$\|x\|_1\leqslant\alpha\|x\|_2$.

18. 设 X、Y、Z 及 $E(\neq\{0\})$ 都是赋范线性空间，并且 $Z=X\dot{+}Y$. 显然，$Z\to E$ 的任何一个线性算子 T 必可表示成 $TZ=T_Xx+T_Yy$，其中 $z=x+y$，$x\in X$，$y\in Y$，而 T_X、T_Y 分别是 $X\to E$，$Y\to E$ 的线性算子.

证明：$T\in\mathfrak{B}(Z\to E)$ 等价于 $T_X\in\mathfrak{B}(X\to E)$ 及 $T_Y\in\mathfrak{B}(Y\to E)$ 同时成立的充要条件是存在 $\alpha>0$，$\beta>0$，使得对任何 $z=x+y\in Z$，

$$\beta(\|x\|+\|y\|)\leqslant\|z\|\leqslant\alpha(\|x\|+\|y\|)$$

19. 举例说明定理 4 中假设范数 $\|\cdot\|_1$ 弱于 $\|\cdot\|_2$ 是必要的.

---

① 此地 Jordan 曲线是指可求长的.

§5 线性算子的正则集与谱，不变子空间

在泛函分析中，对线性算子的谱的研究是很重要的一个研究方向，在这一节中，我们将对这方面最基本的概念作一简单介绍.与算子谱论相联系的重要问题就是算子的不变子空间，这个问题近年来讨论很多，并取得了重要的进展，在下一节我们将介绍这方面的成果，为此我们在这一节还要介绍一下不变子空间及超不变子空间等概念.

1. 特征值与特征向量 有限维线性空间上线性变换的特征值及特征向量的概念是大家了解的. 在微分方程和积分方程中也有特征值和特征函数的概念. 现在把它拓广到一般的线性空间上来. 就有限维空间看，线性变换的特征值一般是复的，所以算子谱论一般总是在复空间上进行讨论.

定义 设 X 是线性空间，λ 为一数，A 是 $X\to X$ 的线性算子. 如果有 X 中非零向量 $x\in\mathscr{D}(A)$，使得

$$Ax=\lambda x \tag{5.1}$$

那末就称 λ 是 A 的**特征值**(或**本征值**)，而称 x 为 A(相应于特征值 λ)的**特征向量**(或**本征向量**).

设 E_λ 为算子 A 的(相应于特征值 λ 的)特征向量全体，再加入零向量，称 E_λ 为算子 A 的(相应于特征值 λ 的)**特征向量空间**.

显然，相应于非零特征值的特征向量在算子值域中.

E_λ 是方程(5.1)的所有解的全体. 容易看出 E_λ 是 X 的线性子空间. 如果 X 是赋范线性空间，A 是连续算子，那末也很容易知道 E_λ 是闭子空间.

称 E_λ 的维数($\dim E_\lambda$)为特征值 λ 的**重复度**. 这就是方程(5.1)的最大线性无关解组中向量的个数.

例如线性空间 X 上相似算子 αI 的特征值只有 α，而且全空间

X就是特征向量空间.

例1 设X是n维向量空间, A为X上到X的线性算子. 在X中任取一组基$\{e_1, \cdots, e_n\}$, A相应于阵$(a_{\mu\nu})$, 如果记

$$Ax=y, \quad x=\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu e_\nu, \quad y=\sum_{\mu=1}^{n} y_\mu e_\mu$$

那末, $y_\mu=\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu$. 这时方程(5.1)立即改写成线性方程组

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu=\lambda x_\mu, \ \mu=1, 2, \cdots, n \tag{5.2}$$

因此, λ为算子A的特征值的充要条件是λ为阵$(a_{\mu\nu})$的特征值. 而λ的重复度也就是线性方程组(5.2)的线性独立的最大解组中解的个数. 如果系数阵$(\lambda\delta_{\mu\nu}-a_{\mu\nu})$的秩为$n-r$, 那末重复度就是$r$.

下面考察两个二阶微分算子.

例2 设X是$C[0, 1]$, $\mathscr{D}(A)$是$[0, 1]$上具有二阶连续导函数而且适合边界条件$x(0)=x(1)$, $x'(0)=x'(1)$的函数$x(t)$全体. 定义$\mathscr{D}(A)$到X上的微分算子A如下: 当$x\in\mathscr{D}(A)$时

$$Ax=-x''$$

由于微分方程$-x''=\lambda x$的通解是

$$x(t)=a\cos\sqrt{\lambda}\, t+b\sin\sqrt{\lambda}\, t$$

当$\lambda\neq(2n\pi)^2$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$时, 上述通解中除恒为0的以外, 不可能有函数属于$\mathscr{D}(A)$(即适合边界条件$x(0)=x(1)$, $x'(0)=x'(1)$).

当$\lambda=(2n\pi)^2$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$时, 上述通解全体属于$\mathscr{D}(A)$. 因此算子$A$具有特征值$(2n\pi)^2$, 与它相应的特征向量空间具有基$\cos 2n\pi t$, $\sin 2n\pi t$.

例3 设X是$[-1, 1]$上的连续函数全体, $\mathscr{D}(A)$是在$[-1, 1]$

上具有二阶连续导函数的函数 $x(t)$ 的全体. 在$\mathscr{D}(A)$上定义算子 A 如下: 当 $x\in\mathscr{D}(A)$时

$$Ax=[(t^2-1)x']'$$

(t 为$x(t)$的自变数). 由二阶微分方程理论易知, 方程

$$[(t^2-1)x']'-\lambda x=0$$

当 $\lambda\neq n(n+1)$时, 没有二阶连续可微的非零解 $x(t)$. 而当 $\lambda=n(n+1)$时, 上述方程的解必为

$$x(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(t^2-1)^n$$

的常数倍($x(t)$称为 n 阶的 Legendre 多项式), 因此算子 A 只具有特征值$n(n+1)$, $n=1, 2, \cdots$. 而相应的特征向量, 除一常数因子外为 Legendre 多项式.

例 4 设 $X=L^2(0,\infty)$(复值的), $\mathscr{D}(A)=\{x\,|\,x\in X, x''\in X\}$, 作$\mathscr{D}(A)$到 X 中的算子 A 如下:

$$Ax=\frac{d^2}{dt^2}x(t),\ x\in\mathscr{D}(A)$$

由于$\frac{d^2}{dt^2}x(t)=k^2x(t)$ 的通解为 $x=C_1e^{kt}+C_2e^{-kt}$, 这种函数 $x\in\mathscr{D}(A)$的充要条件是(i)$\mathrm{Re}k>0, C_1=0$, 或 $\mathrm{Re}k<0, C_2=0$. 因此 λ 为算子 A 的特征值的充要条件为 $\lambda=k^2$, $\mathrm{Re}k\neq0$, 也就是 λ 不是负数, 而且相应的特征向量形如

$$x(t)=ae^{\sqrt{\lambda}t},\ \mathrm{Re}\sqrt{\lambda}<0$$

因而重复度是1.

此例说明特征值全体可以组成区域.

例 5 取 $X=C[a,b]$, A 为

$$Ax=\int_a^t x(\tau)d\tau,\ x\in C[a,b]$$

从方程

$$\int_a^t x(\tau)d\tau=\lambda x(t),\ x\in C[a,b] \tag{5.3}$$

容易看出：对任何 λ，(5.3)只有解 $x(t)\equiv 0$，所以 A 没有特征值.

例6 取 $X=C[a,b]$，设 $K(s,t)$是 $a\leqslant s\leqslant b$，$a\leqslant t\leqslant b$ 上二元连续函数. 作 $C[a,b]$上算子 A 如下：

$$(Ax)(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)dt \quad x\in C[a,b]$$

那末 λ 是 A 的特征值的充要条件是积分方程

$$\lambda x(s)-\int_a^b K(s,t)x(t)dt=0 \tag{5.4}$$

具有非零解. 如果$K(s,t)$形如$\sum_{\nu=1}^n f_\nu(s)g_\nu(t)$，而且 f_1、…、f_n 是 $C[a,b]$中线性独立的向量组，那末方程(5.4)化成

$$\lambda x(s)-\sum_{\nu=1}^n\int_a^b g_\nu(t)x(t)dt f_\nu(s)=0 \tag{5.5}$$

当 $\lambda=0$ 时，由(5.5)，x 为特征向量的充要条件是$x\in C[a,b]$，而且适合条件

$$\int_a^b g_\nu(t)x(t)dt=0,\ \nu=1,2,\cdots,n$$

的非零函数. 容易看出，这时相应于特征值零的特征向量空间是无限维的. 如果$\lambda\neq 0$，那末(5.5)的解必可表示为

$$x(s)=\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu f_\nu(s) \tag{5.6}$$

以此再代入(5.5)，利用f_1、…、f_n的线性独立性可知(5.5)的解(5.6)中的 α_ν 必须适合线性方程组

$$\sum_{\mu=1}^n \alpha_\mu\int_a^b g_\nu(t)f_\mu(t)dt=\lambda\alpha_\nu,\ \nu=1,2,\cdots,n \tag{5.7}$$

因而当 $\lambda\neq 0$ 时，λ 为特征值的充要条件是 λ 为方程组(5.7)（以

α_1、…、α_n 为未知数)的特征值，而且 λ 的重复度与(5.7)的线性独立最大解组中解的个数一致．这时如要求出相应的特征向量，只要在(5.7)中解出一组不全为零的 α_1、…、α_n 代入(5.6)就是了．

由上述各例可见，算子的特征值及特征向量概念是概括了线性代数、微分方程、积分方程的特征值及特征函数的概念．不仅许多经典的数学物理问题(如微分方程、积分方程、变分方程问题)可以归结为求特征值、特征向量问题，在量子物理学中许多重要问题也是要求出特征值及特征向量的问题．

在数学物理(例如微分方程)问题中，除去求解形如

$$(\lambda I-A)x=0$$

的齐次方程外，还经常遇到非齐次方程

$$(\lambda I-A)x=f$$

其中 A 是给定的算子，f 是已知向量，x 是未知向量．为了研究这种方程的求解问题，很自然地要引进算子 A 的正则点和谱点的概念．

2. 算子的正则点与谱点 在§4的开头就介绍了正则算子概念，现在利用正则算子概念来定义算子的谱．

定义 设 X 是复的赋范线性空间，B 是 X 的线性子空间 $\mathscr{D}(B)$ 到 X 中的线性算子，又设 λ 是一复数，如果 $(\lambda I-B)$ 是正则算子，即 $\lambda I-B$ 是 $\mathscr{D}(B)$ 到 X 上的一对一的线性算子，而且它的逆算子 $(\lambda I-B)^{-1}$ 是 X 到 X 中的有界线性算子时，那末称 λ 是 B 的**正则点**，并称 $R_\lambda(B)=(\lambda I-B)^{-1}$ 是 B 的**豫解算子**．不是正则点的复数 λ，称为 B 的**谱点**．复平面上正则点全体称为 B 的**正则集**①(或**豫解集**)，记为 $\rho(B)$；谱点全体称为 B 的**谱集**，或称为**谱**，记为

① 有的书中，称$\{\lambda \mid \mathscr{R}(\lambda I-B)$在$X$中稠密，$(\lambda I-B)^{-1}$存在且连续$\}$为 B 的豫解集，比本书中正则集(豫解集)概念略广泛，本书中用法与[4]中一致．如果 B 是闭算子时，两者概念一致．

$\sigma(B)$.

显然 $\sigma(B)\cup\rho(B)$ 就是整个复平面.

根据正则点和谱点的定义我们立即得到一些简单性质.

引理1 设 B 是复赋范线性空间 X 上的有界线性算子. (i) λ 是 B 的正则点的充要条件是方程

$$(\lambda I-B)g=f \tag{5.8}$$

对任何 $f\in X$ 都有解, 而且存在正的常数 m, 使得 $\|g\|\leqslant m\|f\|$.

(ii) λ 不是 B 的特征值的充要条件是 $\lambda I-B$ 是 X 到 $(\lambda I-B)X$ 上的一一对应(即 $\lambda I-B$ 是可逆算子); 设 λ 不是 B 的特征值, 又如果 X 是有限维空间, 那末 λ 便是 B 的正则点.

证 (i) 必要性: 因为 $\mathscr{R}(\lambda I-B)=X$, 所以对 X 中任何 f, 必有 g, 使得(5.8)成立. 又由于 $(\lambda I-B)^{-1}$ 是有界的, 所以

$$\|g\|=\|(\lambda I-B)^{-1}f\|\leqslant\|(\lambda I-B)^{-1}\|\|f\|$$

只要取 $m=\|(\lambda I-B)^{-1}\|$ 就可以了.

充分性: 首先由(5.8)知道 $\mathscr{R}(\lambda I-B)=X$, 其次证 $(\lambda I-B)$ 是一一对应: 事实上, 如果对某个 f, 有 $(\lambda I-B)g_1=f$, $(\lambda I-B)g_2=f$. 那末 $(\lambda I-B)(g_1-g_2)=0$, 即 g_1-g_2 的象是0. 因此 $\|g_1-g_2\|\leqslant m\|0\|$, 就得到 $g_1=g_2$. 所以 $(\lambda I-B)$ 是一一对应, 从而 $(\lambda I-B)^{-1}$ 存在, 又根据假设 $\|g\|\leqslant m\|f\|$, 立即知道 $\|(\lambda I-B)^{-1}f\|\leqslant m\|f\|$, 即 $\|(\lambda I-B)^{-1}\|\leqslant m$.

(ii) 如果 λ 不是特征值, 那末当 $(\lambda I-B)g_1=(\lambda I-B)g_2$ 时, $B(g_1-g_2)=\lambda(g_1-g_2)$, 因此 $g_1=g_2$, 即 $(\lambda I-B)$ 是可逆算子. 反过来, 可逆算子一定将非零向量变成非零向量, 因而不存在 $g\neq0$, 使得 $(\lambda I-B)g=0$, 所以 λ 不是 B 的特征值.

当 X 是有限维空间, 并且 λ 不是 B 的特征值时, 由此 $A=(\lambda I-B)$ 是可逆映照. 容易证明 A 的象 $\mathscr{R}(A)=X$. 事实上, 在 X 中取一组基 e_1、…、e_n, 那末 $(B-\lambda I)e_1$、…、$(B-\lambda I)e_n$ 必是 X 中线性

无关组．因此$\{(B-\lambda I)e_i\}$也是X中的基，从而$\mathscr{R}(A)=X$．但是有限维赋范线性空间是 Banach 空间，由逆算子定理知$(B-\lambda I)^{-1}$是有界的，即$\lambda\in\rho(B)$．

然而当X是无限维赋范线性空间时，如果λ不是B的特征值，这时，λ不但可能不是B的正则点，甚至$\lambda I-B$都不是X到X上的映照．例如，例 5 中算子A，它没有特征值，因而 0 不是特征值，但$0I-A$的值域是所有形如$\int_0^t x(\tau)d\tau$的函数全体，显然$\mathscr{R}(0I-A)$不是全空间．在无限维空间中算子谱的情况是复杂的．

引理 1 的(i)说明，对于B的正则点，方程(5.8)对任何右端项f有唯一的解g，而且解g是连续地依赖于右端项，即如果$\{f_n\}$是一列向量，$f_n\to f$时，那末相应于f_n的解g_n，也有$g_n\to g$，g是相应于f的解．

下面我们要着重讨论算子的谱．从方程的可解性来分类，谱一般可以分为三类：

(i) λ是算子B的特征值．

这时算子$\lambda I-B$就不是可逆的，因而特征值是谱点．算子的特征值全体称做算子的**点谱**，记做$\sigma_p(B)$．

(ii) λ不是算子B的特征值，然而算子的值域$\mathscr{R}(\lambda I-B)\neq X$．也就是说$(\lambda I-B)^{-1}$虽然存在，但$\mathscr{D}((\lambda I-B)^{-1})\neq X$（就是齐次方程$(\lambda I-B)x=0$没有非零解，但是非齐次方程$(\lambda I-B)x=f$不是对每个右端项$f\in X$都存在解）．

(iii) 算子$(\lambda I-B)^{-1}$在全空间有定义，但不是有界的（这就是说，虽然对每个$f\in X$，方程$(\lambda I-B)x=f$有唯一的解x，但x不连续地依赖于右端项f）．

不是特征值的谱点全体称为算子的**连续谱**，记做$\sigma_c(B)$．（注意，有的书中将满足：$(\lambda I-B)$是一对一的，并且$\mathscr{R}(\lambda I-B)$在

X中稠密的λ称为连续谱）

引理1的(ii)说明在有限维空间中，情况属于(ii)、(iii)的谱不出现．但在无限维空间中，例5的算子说明情况(ii)是出现的．下面的例子说明(iii)是会出现的．

例7 l_0表示l^1中只有有限个坐标不为零的元素全体，即当$x\in l_0$时，$x=(x_1, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)$．$l_0$上范数就取为$\|x\|=\sum_i |x_i|$．在$l_0$上定义算子

$$B(x_1, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)=\left(x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, 0, 0, \cdots\right)$$

显然B是l_0到l_0上的一对一的线性有界算子，即$\lambda=0$不是B的特征值．易知

$$B^{-1}(x_1, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)=(x_1, 2x_2, \cdots, nx_n, 0, 0, \cdots)$$

显然B^{-1}是定义在整个l_0上，但在l_0上是无界的算子．

然而如果X是Banach空间，B是X到X上的有界线性算子而且B是可逆算子时，根据逆算子定理，这时B^{-1}就是有界线性算子．所以在X是Banach空间时，情况(iii)是不出现的．

利用谱的分类可以得到如下性质．

引理2 设$p(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i t^i$是$t$的多项式，$B$是复赋范线性空间$X$到$X$的有界线性算子，记$p(B)=\sum_{i=0}^{n} a_i B^i\ (B^0=I)$，又记$p(\sigma(B))=\{p(\lambda) \mid \lambda\in\sigma(B)\}$，那末$\sigma(p(B))=p(\sigma(B))$．

证 分二步：

第一步，先证$p(\sigma(B))\subset\sigma(p(B))$：事实上，对任何$\lambda\in\sigma(B)$，今证$p(\lambda)$不是$p(B)$的正则点．假如不对，存在全空间定义的有界线性算子$(p(\lambda)I-p(B))^{-1}$．但是，由于

$$p(\lambda)I-p(B)=(\lambda I-B)Q(B,\lambda)=Q(B,\lambda)(\lambda I-B)$$

其中 $Q(t,\lambda)=\dfrac{p(\lambda)-p(t)}{\lambda-t}$，它是 t 和 λ 的多项式．由上式可知

$$[(p(\lambda)I-p(B))^{-1}Q(B,\lambda)](\lambda I-B)$$
$$=(\lambda I-B)[Q(B,\lambda)(p(\lambda)I-p(B))^{-1}]=I$$

但是 $(p(\lambda)I-p(B))^{-1}Q(B,\lambda)=Q(B,\lambda)(p(\lambda)I-p(B))^{-1}$．所以算子 $Q(B,\lambda)\ (p(\lambda)I-p(B))^{-1}$ 成为算子 $(\lambda I-B)^{-1}$．然而 $Q(B,\lambda)(p(\lambda)I-p(B))^{-1}$ 是全空间有定义而且有界，即 $(\lambda I-B)^{-1}$ 是在全空间定义而且有界的算子．这就是说 λ 是正则点，和假设 $\lambda\in\sigma(B)$ 冲突．所以 $p(\sigma(B))\subset\sigma(p(B))$．

第二步，再证 $\sigma(p(B))\subset p(\sigma(B))$：事实上，对任何 $\lambda\overline{\in}p(\sigma(B))$，设

$$\lambda-p(t)=a(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n),\ a\neq0$$

当 $t\in\sigma(B)$ 时，$\lambda-p(t)\neq0$．所以 $t-\lambda_i\neq0$，$i=1,2,\cdots,n$．这说明 $\lambda_i\overline{\in}\sigma(B)$，由此得到 λ_i 是算子 B 的正则点，因此 $(B-\lambda_iI)^{-1}$ 是定义在全空间的有界算子．再由

$$\lambda I-p(B)=a(B-\lambda_1I)(B-\lambda_2I)\cdots(B-\lambda_nI)$$

根据 § 4定理1，就得到 $(\lambda I-p(B))^{-1}$ 是全空间定义的有界线性算子，所以 $\lambda\overline{\in}\sigma(p(B))$，从而 $\sigma(p(B))\subset p(\sigma(B))$．证毕．

引理 2 的结论还可以推广到 $p(t)$ 为解析函数的情况，这里不拟介绍了．

对于一个具体算子要决定出它的谱是不容易的事．往往需要深入地研究才能得到一些定性的结果．下面介绍正则集和谱的一些最基本的性质．

如果数 a 满足 $|a|<1$，那末 $(1-a)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n$．这个熟知的事实却可以推广到算子的情况，其实，还可以推广到 Banach 代数上

去．不仅如此，还可从这一简单事实出发发展出谱论中很重要的结果．

类似于算子，我们先引入 Banach 代数中元素的正则点和谱点的概念．

定义 设 $\mathfrak{A}$ 是具有幺元（幺元记为I）的复Banach代数，$A\in\mathfrak{A}$，λ是复数，如果存在 $C\in\mathfrak{A}$，使得

$$C(A-\lambda I)=I, \qquad (A-\lambda I)C=I$$

称 λ 是 A 的正则点，正则点全体记为 $\rho(A)$．不是 A 的正则点的λ称为 A 的谱点，谱点全体记为 $\sigma(A)$．

引理 3 设 $\mathfrak{A}$ 是具有幺元的复 Banach 代数，$A\in\mathfrak{A}$，并且

$$r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}<1 \tag{5.9}$$

那末(i) $1\in\rho(A)$；

(ii) $(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n$；

(iii) 当 $\|A\|<1$ 时，$\|(I-A)^{-1}\|\leqslant 1/(1-\|A\|)$．

证 根据§1定理10的系，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}$存在．先利用$r<1$，证明 $\sum_{n=0}^{\infty}A^n$按范数收敛：任取$\varepsilon>0$，使得$r+\varepsilon<1$，对于这个ε，必存在N，当 $n\geqslant N$ 时，

$$\sqrt[n]{\|A^n\|}<r+\varepsilon(\text{即}\|A^n\|<(r+\varepsilon)^n)$$

由 $\mathfrak{A}$ 的完备性以及当 $m\geqslant N$时，

$$\left\|\sum_{n=m}^{\infty}A^n\right\|\leqslant\sum_{n=m}^{\infty}\|A^n\|\leqslant\sum_{n=m}^{\infty}(r+\varepsilon)^n$$

$$=(r+\varepsilon)^m(1-r-\varepsilon)^{-1}$$

立即知道$\sum_{n=0}^{\infty}A^n$ 按范数收敛，记其和为$C=\sum_{n=0}^{\infty}A^n$．显然要证明

(i)、(ii)只要验证

$$C(I-A)=(I-A)C=I \tag{5.10}$$

好了．为此，记 $C_m=\sum_{n=0}^{m}A^n$，易知

$$C_m(I-A)=(I-A)C_m=I-A^{m+1} \tag{5.11}$$

但是$\|C_m-C\|\to 0$，而当 $m\geqslant N$ 时，$\|A^{m+1}\|\leqslant(r+\varepsilon)^{m+1}\to 0\ (m\to\infty)$．在(5.11)中令 $m\to\infty$，立即得到(5.10)，即(i)、(ii)成立．

在假设$\|A\|<1$ 条件下，再由(ii)，

$$\|(I-A)^{-1}\|=\|C\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\|A^n\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\|A\|^n=1/(1-\|A\|).$$

即(iii)成立．证毕．

如果引进参数 λ，立即得到如下结果．

定理1 设 $\mathfrak{A}$ 是具有幺元的复 Banach 代数，$A\in\mathfrak{A}$．记 $r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}$．那末

(i) 任何$|\lambda|>r$ 的 λ 必是 A 的正则点；

(ii) 当$|\lambda|>r$ 时，

$$(\lambda I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \tag{5.12}$$

(iii) 当$|\lambda|>\|A\|$时，不仅(5.12)成立，而且$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant(|\lambda|-\|A\|)^{-1}$．

证 对任何 $\lambda\neq 0$，由于

$$(\lambda I-A)=\lambda\left(I-\frac{A}{\lambda}\right) \tag{5.13}$$

显然，$\lambda\in\rho(A)$等价于 $1\in\rho\left(\frac{A}{\lambda}\right)$．用$\frac{A}{\lambda}$代替引理 3 中的 A，根据引理 3，立即得到，当

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left\|\frac{A^n}{\lambda^n}\right\|}=\frac{1}{|\lambda|}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}<1$$

时，即当 $|\lambda| > \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|} = r$ 时，$1 \in \rho\left(\dfrac{A}{\lambda}\right)$，并且

$$\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^n}$$

从(5.13)得到

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \quad (|\lambda| > r)$$

即定理中的(i)、(ii)成立.

同样，当 $|\lambda| > \|A\|$ 时，$\left\|\dfrac{A}{\lambda}\right\| < 1$. 由引理 3 中的 (iii) 就得到

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| < \frac{1}{|\lambda|}\left(1 - \left\|\frac{A}{\lambda}\right\|\right)^{-1} = (|\lambda| - \|A\|)^{-1}.$$

即(iii)成立，证毕.

特别，我们有

系 设 A 是复 Banach 空间 X 上有界线性算子，记 $r = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}$. 那末对于算子 A，定理 1 中的(i)、(ii)、(iii)成立.

证 因为 $\mathfrak{B}(X\to X)$ 是具有幺元的 Banach 代数，对于 $A \in \mathfrak{B}(X\to X)$，$A$ 作为 Banach 代数 $\mathfrak{B}(X\to X)$ 中元和作为 $X\to X$ 的有界线性算子时的谱和正则点的概念是一致的. 由定理 1 立即可知本系成立. 证毕.

下面的定理对具有幺元的 Banach 代数是成立的（从而对 Banach 空间 X 上的有界线性算子也成立）.

定理2 设 A 是复 Banach 空间 X 上的线性算子（或是具有幺元的复 Banach 代数 $\mathfrak{A}$ 中元素），那末

(i) $\rho(A)$ 必是开集;

(ii) 当 $\rho(A)$ 非空时，对每个 $\lambda_0 \in \rho(A)$，如记

$$r_{\lambda_0}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|(\lambda_0 I-A)^{-n}\|}\text{①},$$

则一切适合 $|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{r_{\lambda_0}}$② 的 λ 都是 A 的正则点，并且

$$(\lambda I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda_0 I-A)^{-(n+1)}(\lambda-\lambda_0)^n$$

证　显然，只要在 $\rho(A)\neq\varnothing$ 的假定下证明定理成立．由于在 $\mathscr{D}(A)$ 上，有

$$\begin{aligned}\lambda I-A&=(\lambda-\lambda_0)I+(\lambda_0 I-A)\\&=[I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}](\lambda_0 I-A)\end{aligned}\qquad(5.14)$$

注意，$(\lambda_0 I-A)^{-1}$ 是在全空间 X 上有定义的有界线性算子，用 $-(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}$ 代替引理 3 中的 A，由引理 3 立即知道，当

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|[-(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}]^n\|}<1$$

即 $|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{r_{\lambda_0}}$ 时，$[I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}]^{-1}$ 存在并且是有界的．由§4定理 1 可知，当 $|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{r_{\lambda_0}}$ 时，$\lambda\in\rho(A)$，即 $\rho(A)$ 是开集．再由(5.14)和引理 3 的(ii)得到

$$\begin{aligned}(\lambda I-A)^{-1}&=(\lambda_0 I-A)^{-1}[I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}]^{-1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda_0 I-A)^{-(n+1)}(\lambda-\lambda_0)^n\end{aligned}$$

证毕．

由定理 1、2 可得下面重要的系．

系　设 $\mathfrak{A}$ 是具有幺元的复 **Banach** 代数，$A\in\mathfrak{A}$．那末

(i) $\sigma(A)$ 是闭集；

---

① A^{-n} 表示 $(A^{-1})^n$．

② 当 $r_{\lambda_0}=0$ 时，规定 $\frac{1}{r_{\lambda_0}}=\infty$．

(ii) 下列不等式成立，

$$\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|} \tag{5.15}$$

(iii) 当 A 是复 Banach 空间 X 上线性算子(可能无界)时，本系的(i)成立，即 $\sigma(A)$ 是闭集．当 A 有界时，系的(ii)也成立．

证 因为 $\rho(A)\cup\sigma(A)$ 是整个平面，从定理 2 可知(i)、成立．又根据定理 1 的(i)，立即有

$$\sigma(A)\subset\{\lambda\,|\,|\lambda|\leqslant r,\ r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}\}$$

即(ii)成立．(iii)是显然的．证毕．

下面我们将给出 Banach 代数中元素的谱半径公式．

定义 设 X 是赋范线性空间，A 是 X 到 X 的有界线性算子，或者 A 是具有幺元的 Banach 代数 $\mathfrak{A}$ 中元素．记

$$r(A)=\max_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|$$

称 $r(A)$ 是 A 的**谱半径**．

显然，$r(A)$ 就是以原点为圆心包含 $\sigma(A)$ 的最小圆的半径．从解方程来看，谱半径具有以下明显的意义：当 $|\lambda|>r(A)$ 时，λ 必是 A 的正则点，即方程(5.8)

$$(\lambda I-A)g=f$$

对任何 $f\in X$ 都有唯一的解 g．而对于 $|\lambda|\leqslant r(A)$，就不能保证上述方程对任何 f 都有解了．

在数学物理和计算数学的一些问题中，为了确定谱的范围，往往需要估计谱半径．由(5.15)式立即可得到一个简单的估计式

$$r(A)\leqslant\|A\|$$

从应用上讲，这个估式虽是方便的，但不精确．例子如下：

例8 我们考察复的二维欧几里得空间 E^2．设 e_1、e_2 是 E^2 的线性基，并且 $\|x_1e_1+x_2e_2\|=(|x_1|^2+|x_2|^2)^{\frac{1}{2}}$．作 E^2 上线性算子 A：

$$A(x_1e_1+x_2e_2)=bx_2e_1$$

其中 b 是非零常数．在基 e_1、e_2 下，A 相应的阵是

$$\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

容易看出 $\sigma(A)$ 只有一点 0，所以 $r(A)=0$．但是 $\|A\|=|b|$．所以当 $b\neq 0$ 时

$$r(A)<\|A\|$$

但是估计式(5.15)是准确的，即(5.15)是不可改进的．其实还是一个等式．

为了证明这个事实，我们要引进解析函数的方法如下：

引理 4 设 $\mathfrak{A}$ 是具有幺元的复 Banach 代数，$A\in\mathfrak{A}$．f 是 Banach 空间 $\mathfrak{A}$ 上的连续线性泛函(即 $f\in\mathfrak{A}^*$)．那末 $f((\lambda I-A)^{-1})$ 是 λ 在 $\rho(A)$ 上的解析函数（这里所说的解析函数是定义在开集上，并不要求定义在区域上）．

证 由定理 2 的(ii)可知，对 $\lambda_0\in\rho(A)$，当 $|\lambda-\lambda_0|<\dfrac{1}{r_{\lambda_0}}$ 时，级数

$$(\lambda I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda_0 I-A)^{-(n+1)}(\lambda-\lambda_0)^n$$

按范数收敛．所以由 f 的连续性和线性得到

$$\begin{aligned}f((\lambda I-A)^{-1})&=\lim_{n\to\infty}f\left(\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}(\lambda_0 I-A)^{-\nu-1}(\lambda-\lambda_0)^{\nu}\right)\\&=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}f((\lambda_0 I-A)^{-\nu-1})(\lambda-\lambda_0)^{\nu}\end{aligned}$$

所以在 λ_0 的环境中，$f((\lambda I-A)^{-1})$ 可以展开成 $\lambda-\lambda_0$ 的幂级数，因此，λ_0 是它的解析点．证毕．

现在利用共鸣定理证明谱半径的准确公式．

定理 3（盖勒范德 И. М. Гельфанд） 设 $\mathfrak{A}$ 是具有幺元的复 Banach 代数，$A\in\mathfrak{A}$. 那末

$$r(A)=\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}$$

证 由定理 2 的系，$r(A)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}$. 因而只要证明

$$r(A)\geqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}$$

由于当 $|\lambda|>\|A\|$ 时

$$(\lambda I-A)^{-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{A^\nu}{\lambda^{\nu+1}} \tag{5.16}$$

任取 $f\in\mathfrak{A}^*$，由(5.16)得到，当 $|\lambda|>\|A\|$ 时，函数

$$f((\lambda I-A)^{-1})=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f(A^\nu)}{\lambda^{\nu+1}} \tag{5.17}$$

是 λ 的解析函数. 由于当 $|\lambda|>r(A)$ 时，λ 是 A 的正则点，根据引理 4，$\{\lambda|\,|\lambda|>r(A)\}$ 是在函数 $f((\lambda I-A)^{-1})$ 的解析范围之内，因而函数 $f((\lambda I-A)^{-1})$ 的 Laurent 展开式(5.17)在 $|\lambda|>r(A)$ 时成立. 记 $r(A)$ 为 a，因此，对任何 $\varepsilon>0$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{|f(A^\nu)|}{(a+\varepsilon)^{\nu+1}}<\infty \tag{5.18}$$

记 $B_\nu=\dfrac{A^\nu}{(a+\varepsilon)^\nu}$，那末(5.18)说明，对任何 $f\in\mathfrak{A}^*$

$$\sup_{\nu\geqslant 1}|f(B_\nu)|<\infty$$

即 Banach 空间 $\mathfrak{A}$ 中序列 $\{B_\nu\}$ 是弱有界的，由共鸣定理(或参见 §4 定理 7 的系的(iii))，$\{B_\nu\}$ 必强有界，即存在常数 M，使得

$$\|B_\nu\|\leqslant M$$

从而 $\|A^\nu\|\leqslant(a+\varepsilon)^\nu\|B_\nu\|\leqslant(a+\varepsilon)^\nu M$. 因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}\leqslant(a+\varepsilon)$$

再令 $\varepsilon\to 0$，就得到 $r(A)=a\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}$。证毕。

在泛函分析这门学科中，象算子的谱半径公式这种定量的基本结果是不多的。

用整函数的柳维尔(Liouville) 定理可以证明谱不空的定理。

定理 4 (盖勒范德) 设 $\mathfrak{A}$ 是具有非零元和幺元的复 Banach 代数，$A\in\mathfrak{A}$，那末 $\sigma(A)\neq\varnothing$。

证 如果 $\sigma(A)=\varnothing$，由于 $\mathfrak{A}$ 是 Banach 空间，并且 $\mathfrak{A}\neq\{0\}$，所以 $I\neq 0$，I 作为非零元，根据泛函延拓定理，存在 $f\in\mathfrak{A}^*$，使得 $f(I)\neq 0$。

可是又根据定理 2，对任何 $\lambda_0\in\rho(A)$ 总存在 r_{λ_0}，当 $|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{r_{\lambda_0}}$ 时

$$(\lambda I-A)^{-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}(\lambda_0 I-A)^{-(\nu+1)}(\lambda-\lambda_0)^{\nu}$$

从而

$$f((\lambda I-A)^{-1})=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}f((\lambda_0 I-A)^{-(\nu+1)})(\lambda-\lambda_0)^{\nu}$$

根据假设 $\sigma(A)=\varnothing$，所以 $f((\lambda I-A)^{-1})$ 是全平面的解析函数（又称为整函数）。但当 $|\lambda|>\|A\|$ 时，根据定理 1，可得

$$f((\lambda I-A)^{-1})=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f(A^{\nu})}{\lambda^{\nu+1}}\tag{5.19}$$

所以当 $|\lambda|\geqslant\|A\|+1$ 时

$$|f((\lambda I-A)^{-1})|\leqslant\sum_{\nu=0}^{\infty}\|f\|\frac{\|A^{\nu}\|}{|\lambda|^{\nu+1}}\leqslant\|f\|\frac{1}{|\lambda|-\|A\|}\leqslant\|f\|$$

即整函数 $f((\lambda I-A)^{-1})$ 是有界的。由 Liouville 定理，$f((\lambda I-A)^{-1})$ 必为常数。但是(5.19)中 $\frac{1}{\lambda}$ 项的系数为 $f(I)\neq 0$，这是不可

能的. 所以$\sigma(A)$不空，即A至少有一个谱点. 证毕.

定义 设$\mathfrak{A}$是具有幺元的复 Banach 代数，$A\in\mathfrak{A}$. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}=0$$

那末就称A是**广义幂零元**，如果A是 Banach 空间X上有界线性算子，并满足上述条件时，称A是**广义幂零算子**.

它是有限维空间中幂零算子概念在无限维空间中的推广，是算子谱论中一类重要的算子. 根据定理 3 及谱半径的定理，立即知道广义幂零算子只有一个谱点 0，即$\sigma(A)=\{0\}$. 根据定理 1 知道A的豫解算子$R_\lambda A$在全平面除去$\lambda=0$外，都有

$$(\lambda I-A)^{-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{A^\nu}{\lambda^{\nu+1}}$$

例如本节中例 5 的算子A:

$$(Ax)(t)=\int_a^t x(\tau)d\tau,\quad x\in C[a,b]$$

当把A看成 Banach 空间$C[a,b]$到$C[a,b]$的算子时，由于

$$A^nx=\int_a^t\int_a^{t_1}\cdots\int_a^{t_{n-1}}x(\tau)d\tau dt_{n-1}\cdots dt_1$$

这时，$|(A^nx)(\tau)|\leqslant\|x\|\int_a^t\int_a^{t_1}\cdots\int_a^{t_{n-1}}d\tau dt_{n-1}\cdots dt_1$，所以

$$\|A^nx\|\leqslant\frac{1}{n!}(b-a)^n\|x\|,\quad x\in C[a,b]$$

因此A是广义幂零算子. 而且谱点$\lambda=0$不是A的特征值.

在算子谱论的研究中还常常用到下面一种谱点概念.

定义 设A是复赋范线性空间X到X的有界线性算子，λ是一复数，如果存在一列单位向量$x_n\in X$，$n=1,2,\cdots$，使得

$$(\lambda I-A)x_n\to 0$$

就称λ是A的**近似谱点**. A的近似谱点全体记为$\sigma_a(A)$，非近似

谱点的谱点称为**剩余谱点**[①]，剩余谱点全体记为$\sigma_r(A)$.

$\sigma(A)$、$\sigma_a(A)$、$\sigma_p(A)$以及$\sigma_r(A)$等有如下基本的关系.

定理5 设A是复Banach空间X上有界线性算子，则下列命题成立.

(i) $\sigma_p(A)\subset\sigma_a(A)$;

(ii) $\sigma_a(A)\cap\sigma_r(A)=\varnothing$，并且$\sigma_a(A)\cup\sigma_r(A)=\sigma(A)$;

(iii) $\sigma_r(A)$是开集;

(iv) $\partial\sigma(A)\subset\sigma_a(A)$，此地$\partial\sigma(A)$表示$\sigma(A)$的境界[②];

(v) $\sigma_a(A)$是闭集，并且非空.

证 (i) 当$\lambda\in\sigma_p(A)$时，必有$x\neq 0$，使得$(A-\lambda I)x=0$. 不妨设$\|x\|=1$，取$x_n=x$, $n=1, 2, \cdots$, 那末就有$\|x_n\|=1(n=1, 2, \cdots)$，并且

$$(A-\lambda I)x_n\to 0$$

即$\lambda\in\sigma_a(A)$，从而$\sigma_p(A)\subset\sigma_a(A)$.

(ii) 从$\sigma_r(A)$的定义可知$\sigma_a(A)\cap\sigma_r(A)=\varnothing$，并且$\sigma_a(A)\cup\sigma_r(A)=\sigma(A)$.

(iii) 当$\lambda\in\sigma_r(A)$时，$\lambda\overline{\in}\sigma_a(A)$，从而必存在某个正数$\alpha$，使得

$$\|(A-\lambda I)x\|\geqslant\alpha\|x\|,\quad x\in X$$

因此，当$|\lambda'-\lambda|<\frac{\alpha}{2}$时，对任何$x\in X$

$$\|(A-\lambda'I)x\|\geqslant\|(A-\lambda I)x\|-|\lambda'-\lambda|\|x\|\geqslant\frac{\alpha}{2}\|x\| \tag{5.20}$$

这就是说，对任何λ'，只要$|\lambda'-\lambda|<\frac{\alpha}{2}$，$\lambda'$就不可能是$A$的近似谱

---

① 有的文章中将不是A的特征值，并且$\mathscr{R}(A-\lambda I)$在X中不稠密的λ称为剩余谱点. 它包含我们这里定义的剩余谱.

② 根据第四章记号，集$\sigma(A)$的境界应记为$\Gamma(\sigma(A))$，但用$\partial\sigma(A)$表示$\sigma(A)$的境界也是文献中常用的.

点．因此如能证明：当$|\lambda'-\lambda|<\frac{\alpha}{2}$时，$\lambda'$也不是$A$的正则点．那就说明$\lambda'\in\sigma_r(A)$，即$\lambda$是$\sigma_r(A)$的内点，从而$\sigma_r(A)$是开集．

现在证明：当$|\lambda'-\lambda|<\frac{\alpha}{2}$时，$\lambda'\overline{\in}\rho(A)$．如果不对，有某个$\lambda_0$，$|\lambda_0-\lambda|<\frac{\alpha}{2}$，而$\lambda_0\in\rho(A)$，在(5.20)中取$\lambda'=\lambda_0$，由此可知

$$\|(A-\lambda_0 I)^{-1}\|\leqslant 2/\alpha$$

但根据定理2的(ii)，当$|\mu-\lambda_0|<\frac{1}{r_{\lambda_0}}$时，$\mu$都应是$A$的正则点．而这时

$$r_{\lambda_0}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|(\lambda_0 I-A)^{-n}\|}\leqslant\|(\lambda_0 I-A)^{-1}\|=2/\alpha$$

特别，取$\mu=\lambda$时，因为

$$|\mu-\lambda_0|=|\lambda-\lambda_0|<\frac{\alpha}{2}<\frac{1}{r_{\lambda_0}}$$

因而$\lambda\in\rho(A)$．这与(iii)的最初假设$\lambda\in\sigma_r(A)$矛盾了．

(iv) 当$\lambda\in\partial\sigma(A)$时，因$\sigma(A)$是闭集，所以$\lambda\in\sigma(A)$．但$\lambda$决不是$\sigma_r(A)$中的点，因为如果$\lambda\in\sigma_r(A)$，由(iii)，则必存在$\lambda$的一个环境$O(\lambda)\subset\sigma_r(A)$，但$\lambda\in\partial\sigma(A)$，所以$\lambda$的环境$O(\lambda)$必含有$\rho(A)$中的点，这与$O(\lambda)\subset\sigma_r(A)$相矛盾．

(v) 因为$\sigma_a(A)=\sigma(A)-\sigma_r(A)$，所以$\sigma_a(A)$是闭集．

又因为$\partial\sigma(A)\subset\sigma_a(A)$，而$\sigma(A)\neq\varnothing$，从而$\partial\sigma(A)$和$\sigma_a(A)$都不空，证毕．

3．不变子空间 算子谱分析或算子结构的研究中一个重要的方面就是研究算子的不变子空间．

定义 设B是线性空间X到X的线性算子，L是X的一个线性子空间，如果BL①$\subset L$，称L是B的**不变子空间**．

① BL表示L经B映照后的象，见第一章§2.

线性算子的不变子空间这一概念，是有限维线性空间中线性变换的不变子空间概念在一般线性空间情况下的推广。

下面是有关不变子空间的一些简单性质。

引理5　设B是线性空间X上的线性算子，那末

1° $\{0\}$、X是B的不变子空间；

2° 如果$\{L_\mu | \mu\in\Lambda\}$（$\Lambda$是指标集）中每个$L_\mu$是$B$的不变子空间，那末由一切$L_\mu$，$(\mu\in\Lambda)$中的向量张成的线性空间①$L$以及它们的交①$L'=\bigcap\limits_{\mu\in\Lambda}L_\mu$，都是$B$的不变子空间；

3° $\mathscr{R}(B)$以及$\mathscr{N}(B)=\{x|Bx=0\}$②是$B$的不变子空间；

4° 如果L是相应于B的某个特征值的某些特征向量张成的线性空间，那末L是B的不变子空间；特别相应于特征值λ的特征子空间E_λ是不变子空间；

5° 如果B是赋范线性空间X中的有界线性算子，L是B的不变子空间，那末$\bar{L}$也是B的不变子空间，特别$\overline{\mathscr{R}(B)}$是不变子空间。

证　1°、2°及4°是明显的。

今证3°　由于$\mathscr{R}(B)=BX$，所以

$$B\mathscr{R}(B)=BBX\subset BX=\mathscr{R}(B)$$

类似地可知$\mathscr{N}(B)$也是不变的。

最后来证5°　设$x\in\bar{L}$，必存在$x_n\in L$，$n=1,2,\cdots$，$x_n\to x$。由于B是连续的，$Bx_n\in L$，得到

$$Bx=B\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}Bx_n\in\bar{L}$$

证毕。

空间X本身和$\{0\}$是X上一切线性算子的不变子空间，称它们

① 一般著作中也用记号$L=\bigvee\limits_{\mu\in\Lambda}L_\mu$，以及$L'=\bigwedge\limits_{\mu\in\Lambda}L_\mu$。

② 我们总是用$\mathscr{N}(B)$表示算子B的零空间$\{x|Bx=0\}$。

是平凡的不变子空间．人们感兴趣的是，是否有非平凡的不变子空间．

引理6 设X是线性空间，A和B是X上的两个可交换的线性算子，那末$\mathscr{R}(A)$、$\mathscr{N}(A)$必是B的不变子空间．

证 设A与B是可交换的，即$BA=AB$，那末

$$BAX=ABX\subset AX$$

即$\mathscr{R}(A)=AX$是B的不变子空间．再证$\mathscr{N}(A)$是B的不变子空间：对任何$x\in\mathscr{N}(A)$，必有

$$ABx=BAx=0$$

即$Bx\in\mathscr{N}(A)$．这就是说$\mathscr{N}(A)$是B的不变子空间．证毕．

系 在引理6的假设下，1° 如果λ是A的特征值，那末相应于λ的A的特征子空间E_λ必是B的不变子空间；

2° 记$E_n=\mathscr{R}(B^n)$，$N_n=\mathscr{N}(B^n)$，$n=1,2,\cdots$，那末$\{E_n\}$，$\{N_n\}$都是B的不变子空间．

证 1° 因为$BA=AB$，所以

$$(\lambda I-A)B=B(\lambda I-A)$$

用$(\lambda I-A)$代替引理6中的A，就得到1°的结论．

2° 对任何自然数n，B^n是可以和B交换的．由引理6就得到2°的结论．证毕．

不仅研究一个算子的不变子空间，而且还要研究一族算子的公共不变子空间，特别是一族交换算子的公共不变子空间．

定义 设X是线性空间，$\mathfrak{A}$是$X\to X$的某些线性算子组成的算子集，如果L是X的一个线性子空间，并且它对集$\mathfrak{A}$中每个算子都是不变的，就称L是$\mathfrak{A}$的不变子空间．设X是赋范线性空间，$B\in\mathfrak{B}(X\to X)$，$\mathfrak{B}(X\to X)$中一切与B可交换的算子全体记为$\mathfrak{A}_B$，如果X的线性子空间L是$\mathfrak{A}_B$的不变子空间，就称L是B的超不变子空间

显然，因为 $B\in\mathfrak{A}_B$，所以 B 的超不变子空间必是 B 的不变子空间.

引理7　设 $B\in\mathfrak{B}(X\to X)$，X 是赋范线性空间，那末

$1°$ $\{0\}$、X 是 B 的超不变子空间；

$2°$ 如果 $\{L_\mu|\mu\in\Lambda\}$（Λ是指标集）中每个 L_μ 是 B 的超不变子空间，那末 $\{L_\mu|\mu\in\Lambda\}$ 全体张成的线性子空间以及它们的交都是 B 的超不变子空间；

$3°$ 如果 L 是 B 的超不变子空间，那末 $\bar{L}$ 也是 B 的超不变子空间；

$4°$ $\mathscr{N}(B)$、$\mathscr{R}(B)$ 是 B 的超不变子空间；

$5°$ 如果 B 有特征值 λ，那末相应于 λ 的特征子空间 E_λ 是 B 的超不变子空间.

证　因为 B 的超不变子空间就是 $\mathfrak{A}_B$ 的不变子空间，即 $\mathfrak{A}_B$ 里的任何一个算子的不变子空间，根据引理 5、6 及它们的推论，易知本引理中 $1°$—$5°$ 所指出的空间都是 $\mathfrak{A}_B$ 中每个算子的不变子空间。所以 $1°$—$5°$ 中所指出的空间都是 B 的超不变子空间. 证毕.

$\{0\}$、X 是任何有界线性算子的平凡的超不变子空间.

引理8　在赋范线性空间 X 上，$\mathfrak{B}(X\to X)$ 的每个不变子空间必是平凡的.

换句话说，倍单位算子 αI 的每个超不变子空间必是平凡的.

证　显然当 $B=\alpha I$ 时，$\mathfrak{A}_B=\mathfrak{B}(X\to X)$. 现在证明 $\mathfrak{B}(X\to X)$ 仅有平凡的不变子空间. 事实上，对任何 $y\in X$，$y\neq 0$，以及 X 上的任何一个向量 z，根据泛函延拓定理，存在 $f\in X^*$，$f(y)=1$. 作算子 A：

$$Ax=f(x)z$$

显然，由于 $\|Ax\|\leqslant|f(x)|\|z\|\leqslant\|f\|\|z\|\|x\|$. 因此 $A\in\mathfrak{B}(X\to X)$，$Ay=z$. 这就证明了对 X 中任何一个非零向量 y，$\{Ay|A\in\mathfrak{B}(X\to$

$X)\}=X$. 任取 $\mathfrak{B}(X\to X)$的不变子空间 L, 如果 $L\neq\{0\}$, 必有 $y\neq 0$, $y\in L$. 由 L的不变性, $L\supset\{Ay\mid A\in\mathfrak{B}(X\to X)\}=X$. 所以 $L=X$. 因此, $\mathfrak{B}(X\to X)$的不变子空间必是平凡的. 证毕.

例9 设X是有限维(复)赋范线性空间, 那末X中每个线性算子 B, 如果不是倍单位算子, 那末它必有非平凡的超不变子空间.

事实上, 这时B在X上有特征值λ和特征向量空间E_λ. 根据引理7的5°, E_λ是B的超不变子空间. 根据特征值的定义, $E_\lambda\neq\{0\}$. 另一方面 $E_\lambda\neq X$, 因为如果 $E_\lambda=X$, 那末B就是λI. 这与假设矛盾, 因此, E_λ是非平凡的. 证毕.

下面我们要介绍常用的一种不变子空间或超不变子空间.

定义 设X是线性空间, $\mathfrak{A}$ 是 $X\to X$ 的某些线性算子所成的一个线性空间, 对任一个向量 $y\in X$, 称集$\{\mathfrak{A}y\}=\{Ay\mid A\in\mathfrak{A}\}$ 是由向量 y 经$\mathfrak{A}$循环产生的子空间, 当X是赋范线性空间时, 称集$\overline{\{\mathfrak{A}y\}}$是由向量 y 经 $\mathfrak{A}$ 循环产生的闭子空间.

引理9 设X是 Banach 空间, $B\in\mathfrak{B}(X\to X)$, 那末对任何 $y\in X$, $y\neq 0$, 由 y 经 $\mathfrak{A}_B$产生的线性子空间 $\{\mathfrak{A}_By\}$ 和线性闭子空间 $\overline{\{\mathfrak{A}_By\}}$分别是$B$的包含 y 的最小超不变子空间和超不变闭子空间.

证 根据§1定理9的证明, 知道 $\mathfrak{A}_B$是一个代数, 因此 $\mathfrak{A}_By$是线性子空间而且对 $\mathfrak{A}_B$中任何一个算子 C

$$C(\{Ay\mid A\in\mathfrak{A}_B\})=\{CAy\mid A\in\mathfrak{A}_B\}\subset\{A'y\mid A'\in\mathfrak{A}_B\}$$

即 $\mathfrak{A}_By$ 是B的超不变子空间. 根据引理7的3°, $\overline{\{\mathfrak{A}_By\}}$也是$B$的超不变子空间.

由于 $I\in\mathfrak{A}_B$, 所以 $y\in\{\mathfrak{A}_By\}$. 显然, 如果 $\mathfrak{A}_B$ 有另外一个包含向量 y 的不变子空间 L, 那末由 $y\in L$, 并且 $\mathfrak{A}_BL\subset L$, 立即推出$L\supset\{\mathfrak{A}_By\}$, 所以$\{\mathfrak{A}_By\}$是包含 y 而又是B的超不变子空间中最小的. 同样 $\overline{\{\mathfrak{A}_By\}}$是包含 y 而又是B的超不变闭子空间中最小的. 证

毕.

对于赋范线性空间中的有界线性算子，最感兴趣的不是一般的不变子空间，而是闭的不变子空间. 只要将引理 7 中所出现的不变子空间凡是不闭的取它的闭包，并注意到在 Banach 空间中有界线性算子 B 的零空间 $\mathscr{N}(B)$ 和特征子空间 E_λ 本来都是闭集，以及引理 7 中所提供的事实，立即得到下面的

定理6 设 X 是 Banach 空间，$B\in\mathfrak{B}(X\to X)$，那末

1° $\{0\}$、X 是 B 的超不变闭子空间；

2° 任意个 B 的不变（超不变）闭子空间所张成的闭子空间或交都是 B 的不变(超不变)闭子空间；

3° $\mathscr{N}(B)$、$\overline{\mathscr{R}(B)}$ 是 B 的超不变闭子空间；

4° 如果 B 有特征值 λ，相应于 λ 的特征子空间 E_λ 是 B 的超不变闭子空间；

5° 对任何 $y\in X$，$\overline{\{\mathfrak{A}_B y\}}$ 是 B 的超不变闭子空间.

我们知道，对于有限维线性空间 X 上的线性算子 B，有 Jordan 块的理论，根据这个理论，可以把 X 分解成 B 的不变(也是超不变)子空间 X_1、…、X_m 的直接和使得当我们把 B 限制在 X_i 上时，所得到的线性算子 B_i 只有一个谱点——就是特征值 λ_i，这时 X_i 包含算子 B 的特征向量空间 E_{λ_i}，而且 B_i 有很简单的结构. 这就是有限维空间上一般线性算子的谱分析.

我们自然希望对照这个理论，对于无限维 Banach 空间上的有界线性算子搞清楚算子的结构，建立起相应的谱分析. 这个问题的研究一直是泛函分析的一个重要课题. 在本世纪的二十、三十年代已经在两个方面建立起基本理论. 其一是相当于有限维空间中的自共轭阵，酉阵，正常阵的对角化，建立起 Hilbert 空间中正常算子(特别是自伴算子、酉算子)的谱分解理论，这是本书第六章的主要内容. 其二是由对积分方程的研究产生的全连续算子的

谱分析，这是本章§6的主要内容之一．自五十年代以来对别的一些类型的有界线性算子的谱分析的研究又有了较多的进展．但是由于一般有界线性算子的结构比较复杂，很多基本问题都没有解决，例如在算子谱分析中总是要考虑在某种意义下把空间分解成为某些类型的不变子空间的某种"和"，或者在X中划分出一些不变的闭子空间，使得算子在这些子空间上变得结构简单些，谱来得集中些．对于有界线性算子，要研究算子的结构或算子的谱分析，因此首先是要提出如下的

问题1：在无限维的复Banach空间中，是否每个有界线性算子都一定存在非平凡的不变闭子空间？

这个问题迄今没有解决．但是对于全连续算子或正常算子的情况都已解决(分别参看本章§6和第六章§10)．

习　题

1. 设λ为线性算子A^n的特征值，那末λ的n次根μ中至少有一个是算子A的特征值．

2. 设A为复Banach空间X上有界线性算子，$\lambda_0\in\rho(A)$，又设A_n为X上一列有界线性算子，并适合$\|A-A_n\|\to 0$．证明n充分大后，A_n也以λ_0为正则点，而且$\|(\lambda_0 I-A_n)^{-1}-(\lambda_0 I-A)^{-1}\|\to 0$．

3. 设X是复赋范线性空间，并且X是线性子空间M、N的直接和，而且M、N都是X上有界线性算子A的不变子空间．证明$\sigma(A_M)\subset\sigma(A)$（此地$A_M$是$A$在$M$上的限制）．

4. 设T是复$C[0,1]$上有界线性算子：$(Tx)(t)=tx(t)$，$x(t)\in C[0,1]$，求出$\rho(T)$、$\sigma(T)$、$\sigma_a(T)$、$\sigma_p(T)$、$\sigma_r(T)$．

5. 设T是$L^2([0,1],\ B,g)$上有界线性算子：

$$(Tx)(t)=tx(t),\ x(t)\in L^2([0,1],B,g).$$

求出$\rho(T)$、$\sigma(T)$、$\sigma_a(T)$、$\sigma_p(T)$、$\sigma_r(T)$．(分三种情况考察：t_0是函数$g(t)$的跳跃点；存在t_0的环境$O(t_0)$，使得$g(t)$在$O(t_0)$上是常数；以及t_0是$g(t)$连续点，但不存在$O(t_0)$、使$g(t)$为常数．)

6. 证明：对复 Banach 空间上有界线性算子 T，成立

$$\sigma_r(T)\subset\sigma_p(T^*)$$

7. 设 A、B 是复 Banach 空间 X 上两个有界线性算子．证明

(i) $r(AB)=r(BA)$；

(ii) 当 A，B 可交换时，$r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)$．

并举例说明(ii)中不等式对非交换情况不成立．

8. 设 X 是复 Banach 空间，A 是 X 上有界线性算子．设 $\{\lambda_n\}$ 为一列数

$$|\lambda_n|>\|A\|$$

且 $\lambda_n\to\lambda_0$，$|\lambda_0|>\|A\|$．记 $M_{\{\lambda_n\}}(x)$ 是由向量 $\{(\lambda_n I-A)^{-1}x\}$ 张成的闭子空间，证明

(i) 如果有另一个序列 $\{\lambda'_n\}$，$|\lambda'_n|\geqslant\|A\|$，$\lambda'_n\to\lambda'_0$，$|\lambda'_0|>\|A\|$，那末

$$M_{\{\lambda_n\}}(x)=M_{\{\lambda'_n\}}(x)$$

(ii) $M_{\{\lambda_n\}}(x)$ 是包含 x 的关于 A 不变的闭子空间．

(iii) $M_{\{\lambda_n\}}(x)$ 是包含 x 的关于 A 不变的闭子空间中最小的．

9. 设 X 是复 Banach 空间，$\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}(X\to X)$，并且 $\mathfrak{A}$ 是一代数，对任何 $y\in X$，$y\neq0$，$\{\mathfrak{A}y\}$ 是否一定是 $\mathfrak{B}$ 的最小不变子空间？

10. 设 T 是 $X=L^2([a,b],B,g)$ 上有界线性算子：

$$(T\varphi)(t)=t\varphi(t),\qquad \varphi\in X$$

证明 $\{T^nf\,|\,n=0,1,\cdots\}$ 所张成的线性闭子空间 $L=X$，其中 $f(t)$ 处处不为零．

11. 设 T 是复 Banach 空间 X 上有界线性算子，并且存在 Jordan 曲线构成的围道 $\Gamma\subset\rho(T)$，Γ 按一定的定向，使得 $\sigma(T)$ 分割成在 Γ 内部部分 $\sigma_1(T)$ 和外部部分 $\sigma_2(T)$．记

$$E_1=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{dt}{t-T}$$

(这个积分的含义见 §4 习题 14 前的定义)．证明下列命题成立．

(i) $E_1\in\mathfrak{B}(X\to X)$；

(ii) $E_1^2=E_1$(从而 $(I-E_1)^2=I-E_1$)；

(iii) $E_1T=TE_1$；

(iv) $TE_1=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma\frac{t\,dt}{t-T}$，

(v) $\sigma(T|_{E_1X})=\sigma_1(T)$，这里 $T|_{E_1X}$ 表示 T 在不变闭子空间 E_1X 上的限制．

§6 关于全连续算子的谱分析

(本节所讨论的内容是Banach空间的全连续算子谱分析，比较抽象一点，初学时可以跳过，等到学完第六章的大部分内容，特别是Hilbert空间的算子谱分析以后，再回过来读这一节，就可能比较容易接受。)

1. 全连续算子的定义和基本性质 在一般无限维Banach空间中，关于算子谱的研究，全连续算子是已经为人们研究得最清楚的一种算子，这种算子最初来源于积分方程的研究，是积分方程中Fredholm理论的一般化. 在这一节里，我们要介绍把Fredholm理论推广到全连续算子情况下的大部分结果.

定义 设A是映照线性空间X到线性空间Y的线性算子. 如果AX是Y中有限维子空间，就称A为**有限秩算子**.

例1 设f_1、…、f_k为X上线性泛函，从Y中取k个向量y_1、…、y_k，作算子A：对任何x

$$Ax=f_1(x)y_1+\cdots+f_k(x)y_k \tag{6.1}$$

这个算子A就是$X\to Y$的有限秩算子.

反过来，也很容易证明$X\to Y$的任何一个有限秩算子A必为(6.1)的形式. 事实上，因为AX是Y中有限维线性空间，从中可以取出有限个线性无关而且个数极大的向量组y_1、…、y_k. 由于$Ax=\alpha_1(x)y_1+\alpha_2(x)y_2+\cdots+\alpha_k(x)y_k\in Y$，并由于$\{y_i\}$的线性无关性，很容易知道，$\alpha_i(x)$看作$X$上泛函时确实是线性泛函.

如果X、Y是赋范线性空间，f_1、…、f_k是X^*中一组向量，按(6.1)方式所作算子A就是$X\to Y$的有界的有限秩算子. 事实上，从

$$\|Ax\|=\left\|\sum_{i=1}^{k}f_i(x)y_i\right\|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|\|y_i\|\right)\|x\|$$

立即知道线性算子 A 是有界的.

反过来，$X\to Y$ 的任何有界线性的有限秩算子必是 (6.1)形式，其中 $f_i\in X^*$, $i=1,2,\cdots,k$. 事实上，前面根据 A 的线性已经证明

$$Ax=\alpha_1(x)y_1+\cdots+\alpha_k(x)y_k$$

y_1、$\cdots$、y_k 取为线性无关的，并且 α_1、$\cdots$、α_k 是 X 的线性泛函. 现在只需利用 A 的有界性来证明 α_i 是 X^* 的向量就可以了. 这一点可以利用泛函延拓定理来证. 令 y_1、$\cdots$、y_{k-1} 张成的子空间为 L_k, 显然 $y_k\overline{\in}L_k$, 所以存在连续线性泛函 f_k, 使得 $f_k(L_k)=0$,而 $f_k(y_k)=1$. 因而

$$f_k(Ax)=f_k\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(x)y_i\right)=\alpha_k(x)$$

由此得到 $|\alpha_k(x)|\leqslant\|f_k\|\|A\|\|x\|$, 即 α_k 是 X 的连续线性泛函. 同样可以证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-1}\in X^*$. 证毕.

定义　设 A 是赋范线性空间 X 映照到赋范线性空间 Y 中的算子，如果它把 X 中任何有界集映照成致密集，称 A 是**全连续算子**(也称做**致密算子**或**紧算子**).

本书凡是提到全连续算子都假设是线性的，而且不再说明.

由于赋范空间中致密集是有界的，所以全连续算子是有界的.

例2　设 $K(s,t)$ 是 $a\leqslant s\leqslant b$, $a\leqslant t\leqslant b$ 上二元连续函数，我们作 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 中的算子 K 如下：当 $\varphi\in C[a,b]$ 时，令

$$(K\varphi)(s)=\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$$

这个算子 $K:\varphi\longmapsto K\varphi$ 称为 Fredholm 算子，或称为积分算子. 它是积分方程论中非常重要的研究对象.

K 是 $C[a,b]$ 上的全连续算子. 事实上，设 M 是 $C[a,b]$ 上一有界集，即存在常数 L, 使得当 $\varphi\in M$ 时，$\|\varphi\|\leqslant L$. 由此得到

$$|(K\varphi)(s_1)-(K\varphi)(s_2)|\leqslant\int_a^b|K(s_1,t)-K(s_2,t)||\varphi(t)|dt$$
$$\leqslant L\int_a^b|K(s_1,t)-K(s_2,t)|dt$$

因为 $K(s,t)$ 是二元连续函数，所以对任何 $\varepsilon>0$，必有 $\delta>0$，使得当 $|s_1-s_2|<\delta$ 时

$$|K(s_1,t)-K(s_2,t)|<\frac{\varepsilon}{L(b-a)}$$

于是对一切 $\varphi\in M$，有

$$|(K\varphi)(s_1)-(K\varphi)(s_2)|<\varepsilon$$

换句话说，在映照 K 之下，有界集 M 的象 KM 是 $C[a,b]$ 中有界的等度连续的集．由第四章§9定理6，知道 KM 是 $C[a,b]$ 中的致密集，即 K 是 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的全连续算子．

例3 赋范线性空间 X 上有界的有限秩算子 A 是全连续算子．事实上，X 中有界集 M 的象 AM，根据 A 是有界的，所以 AM 是 X 中有界集．而任何有限维赋范线性空间中的有界集一定是致密集(见第四章§9定理13)．所以 A 是全连续算子．

我们用 $\mathfrak{C}(X\to Y)$ 表示赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的全连续算子全体．

定理1 设 X、Y 是两个赋范线性空间，那末 $\mathfrak{C}(X\to Y)$ 是 $\mathfrak{B}(X\to Y)$ 的线性子空间．如果 Y 是 Banach 空间，那末 $\mathfrak{C}(X\to Y)$ 是 Banach 空间 $\mathfrak{B}(X\to Y)$ 的闭子空间．

证 设 A、$B\in\mathfrak{C}(X\to Y)$．今证 $A+B\in\mathfrak{C}(X\to Y)$：任取 X 中一个有界集 M，对 $(A+B)M$ 中任何一个点列 $\{(A+B)f_n\}$，$f_n\in M$，由于 AM 是致密集，所以有子列，$\{Af_{n_\nu}\}$ 是收敛的．又由于 BM 是致密的，所以又有 $\{Bf_{n_\nu}\}$ 的收敛子列 $\{Bf_{n'_k}\}$．从而 $\{(A+B)f_n\}$ 的子列 $\{(A+B)f_{n'_k}\}$ 是收敛的．所以 $(A+B)M$ 是致密集．既对任何一个有界集 M，$(A+B)M$ 是致密集，因而 $(A+B)$ 是全连续的．

类似可以证明，对任何数 α，αA 也是全连续的. 这样便得到 $\mathfrak{C}(X\to Y)$ 是 $\mathfrak{B}(X\to Y)$ 的线性子空间.

当 Y 是 Banach 空间时，$\mathfrak{B}(X\to Y)$ 是 Banach 空间. 要证明 $\mathfrak{C}(X\to Y)$ 是闭子空间，就是要证明：如果 $A_n\in\mathfrak{C}(X\to Y)$，$n=1,2,\cdots$，而且 $\|A_n-A\|\to 0$ 时，那末 $A\in\mathfrak{C}(X\to Y)$. 事实上，设 M 是 X 的任何有界集，对任何 $\varepsilon>0$，必存在 N，当 $n\geqslant N$ 时

$$\|A_n-A\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3L}$$

其中 $L=\sup\limits_{\varphi\in M}\|\varphi\|$. 由于 A_NM 是致密的，所以在 A_NM 中存在有限个点 y_1、$\cdots$、y_k，它们构成集 A_NM 的 $\frac{\varepsilon}{3}$-网. 因为 $y_\nu\in A_NM$，所以有 $x_\nu\in M$，使得 $y_\nu=A_Nx_\nu$，$\nu=1,2,\cdots,k$。今证 $\{Ax_1,\cdots,Ax_k\}$ 是 AM 的 ε-网.

事实上，对任何 $y\in AM$，有 $x\in M$，适合 $y=Ax$. 因为 $A_Nx\in A_NM$，所以有 ν，使得 $A_Nx\in O\left(y_\nu,\frac{\varepsilon}{3}\right)$，因此

$$\begin{aligned}\|y-Ax_\nu\|&\leqslant\|(A-A_N)x\|+\|A_Nx-A_Nx_\nu\|+\|(A_N-A)x_\nu\|\\&\leqslant 2\|A-A_N\|L+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon\end{aligned}$$

即 AM 是致密集. 因而 $A\in\mathfrak{C}(X\to Y)$. 证毕.

利用定理 1，我们可以考察 $L^2[a,b]$ 上的积分算子的全连续性.

例4 设 $K(s,t)\in L^2(R)$，其中 R 是 $[a,b]\times[a,b]$，$-\infty<a<b<\infty$. 在 $L^2[a,b]$ 上，作算子

$$(K\varphi)(s)=\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt,\ \varphi\in L^2[a,b]$$

根据第四章 § 3 的例 1 知道：$K:L^2[a,b]\to L^2[a,b]$，并且是有界的线性算子. 事实上，由 Schwarz 不等式

$$\|K\varphi(s)\|=\left(\int_a^b|(K\varphi)(s)|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\int_a^b\left|\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt\right|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\int_a^b\int_a^b|K^2(s,t)|dt\|\varphi\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_a^b\int_a^b|K^2(s,t)|dsdt\right)^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|$$

就得到

$$\|K\|\leqslant\left(\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2dsdt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.2}$$

我们称K为 Fredholm 型算子. 今证K是全连续的.

事实上, 根据第四章 §6 习题 4 知道, 存在R上某些矩形集的特征函数的线性组合函数$K_n(s,t)$, 使得

$$\iint_R|K(s,t)-K_n(s,t)|^2dsdt\to 0 \tag{6.3}$$

根据(6.3), 并由$L^2[a,b]$上积分算子范数估计式(6.2), 得到

$$\|K_n-K\|\to 0$$

根据定理 1, 如能证明K_n是$L^2[a,b]$上的全连续算子, 那末K便是$L^2[a,b]$上的全连续算子. 然而

$$K_n(s,t)=\sum_{\nu=1}^m\alpha_\nu\chi_{R_\nu}(s,t)$$

其中 $R_\nu=(a_\nu,b_\nu)\times(c_\nu,d_\nu)\subset[a,b]\times[a,b]$, 所以$\chi_{R_\nu}(s,t)=\chi_{(a_\nu,b_\nu)}(s)\chi_{(c_\nu,d_\nu)}(t)$. 因此, 对任何$\varphi\in L^2[a,b]$

$$(K_n\varphi)(s)=\int_a^b K_n(s,t)\varphi(t)dt$$

$$=\sum_{\nu=1}^m\alpha_\nu\chi_{(a_\nu,b_\nu)}(s)\int_a^b\chi_{(c_\nu,d_\nu)}(t)\varphi(t)dt$$

这就是说K_n的值是落在$\{\chi_{(a_\nu,b_\nu)}(s)\}$ $(\nu=1,2,\cdots,m)$张成的线性子空间内, 它是有限维的. 根据例 3 所说, K_n是$L^2[a,b]$上的

全连续算子，所以K是全连续算子.

全连续算子还有如下一些常用的性质.

定理2　设X、Y是赋范线性空间，$A\in\mathfrak{C}(X\to Y)$，那末

1° AX必是Y中的可析集；

2° 如果G是赋范线性空间，$B\in\mathfrak{B}(Y\to G)$，$C\in\mathfrak{B}(G\to X)$，那末$BA\in\mathfrak{C}(X\to G)$，$AC\in\mathfrak{C}(G\to Y)$；

3° $A^*\in\mathfrak{C}(Y^*\to X^*)$.

证　1° 记S_n为X中以0为球心，半径为n的球. 由于$AX=\sum\limits_{n=1}^{\infty}AS_n$，而每个集$AS_n$是致密集，根据第四章§9定理5的系，它是可析的，所以AX是可析的.

2° 设M是X的一个有界集，AM便是Y的致密集. 由于B是连续映照，根据第四章§9定理11的系1，它把致密集AM映照成致密集，所以象BAM是G的致密集，即BA是全连续的. 同样，如果M是G中有界集，因为C是有界的，所以CM是X中有界集，因而ACM是Y中致密集，即AC是全连续的.

3° 设$\{\varphi_n\}$为Y^*中任意一有界点列，今证必有子序列$\{\varphi_{n_\nu}\}$，使得$\{A^*\varphi_{n_\nu}\}$在X^*中按范数收敛：设G是AX在Y中的包，那末G是闭的，并且是可析的. 设$\{y_n\}\subset G$，$n=1,2,\cdots$，并在G中稠密，把泛函序列$\{\varphi_n\}$限制在$\{y_n\}$上，$\{\varphi_n(y)\}$便是$\{y_n\}$上的一列函数，由于对任何y_k，数集$\{\varphi_n(y_k)\}$是有界的，而$\{y_n\}$是一可列集. 用类似于第三章§6引理2或本章§3定理4的"对角线方法"，可以抽出子序列$\{\varphi_{n_\nu}\}$在$\{y_n\}$上处处收敛. 由于$\{\|\varphi_{n_\nu}\|\}$有界，$\{y_n\}$在G中稠密，根据本章§3引理1就得到：存在G上的连续线性泛函φ，使得对任何$y\in G$

$$\varphi_{n_\nu}(y)\to\varphi(y)\tag{6.4}$$

再按泛函延拓定理，将φ保持范数不变地延拓成Y上的连续线性

泛函，仍记为φ. 今证明

$$\|A^*\varphi_{n_\nu}-A^*\varphi\|\to 0,\ (\nu\to\infty)$$

事实上，设S是X的单位球面，那末

$$\|A^*\varphi_{n_\nu}-A^*\varphi\|=\sup_{x\in S}|\varphi_{n_\nu}(Ax)-\varphi(Ax)|=\sup_{y\in AS}|\varphi_{n_\nu}(y)-\varphi(y)|$$

由于$\{\varphi_n\}$是有界序列，所以存在M，使得$\|\varphi_n\|\leqslant$M，$\|\varphi\|\leqslant$M. 对任何$\varepsilon>0$，由于AS是致密的，所以存在y_1、…、y_m构成$\frac{\varepsilon}{3(\mathrm{M}+1)}$网. 因此对任何$x\in S$，必存在某个$k$，使得$\|Ax-y_k\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3(\mathrm{M}+1)}$，所以

$$|\varphi_{n_\nu}(Ax)-\varphi(Ax)|\leqslant|\varphi_{n_\nu}(Ax-y_k)-\varphi(Ax-y_k)|$$

$$+|\varphi_n(y_k)-\varphi(y_k)|\leqslant 2\mathrm{M}\cdot\frac{\varepsilon}{3(\mathrm{M}+1)}+|\varphi_{n_\nu}(y_k)-\varphi(y_k)|$$

根据(6.4)，对于y_1、…、y_k，必存在ν_0，当$\nu\geqslant\nu_0$时

$$|\varphi_{n_\nu}(y_k)-\varphi(y_k)|<\frac{\varepsilon}{3},\ k=1,2,\cdots,m$$

所以当$\nu\geqslant\nu_0$时，对任何$x\in S$，都有

$$|\varphi_{n_\nu}(Ax)-\varphi(Ax)|<\varepsilon$$

因而当$\nu\geqslant\nu_0$时，$\sup\limits_{x\in S}|\varphi_{n_\nu}(Ax)-\varphi(Ax)|\leqslant\varepsilon$，即$\|A^*\varphi_{n_\nu}-A^*\varphi\|\to 0$ $(\nu\to\infty)$成立. 证毕.

系 设X是Banach空间，那末$\mathfrak{C}(X\to X)$是Banach代数. 当X是无限维空间时，$\mathfrak{C}(X\to X)$是不含么元的Banach代数.

2. 全连续算子的谱 下面我们来研究全连续算子的谱. 首先注意有限维赋范线性空间上的线性算子是最简单的全连续算子，而这种算子的有关谱的许多性质大家都已经知道了. 例如每个谱点都是特征值(特征向量空间当然也是有限维的)等等. 现在我们就要研究有限维空间上线性算子的这些性质和结构如何推广到Banach空间(主要是无限维)上的全连续算子. 大体上说，全连续算子的非零谱点的结构，很接近于有限维空间上的线性算子.

定理 3　设 A 是复 Banach 空间 X 上的全连续算子，λ 是非零复数，如果 $(\lambda I-A)X=X$，那末 λ 是算子 A 的正则点.

证　当 X 是有限维空间时，结论是明显的. 所以不妨设 X 是无限维. 根据 §4 逆算子定理，只要证明 $(\lambda I-A)$ 是 X 到 X 上的一一对应就可以了. 为此只需证明当 $(\lambda I-A)x_1=0$ 时，必有 $x_1=0$.

令 $E_n=\{x\mid(\lambda I-A)^n x=0, x\in X\}$，由于 $(\lambda I-A)^n$ 是连续线性算子，显然 E_n 为 X 的线性闭子空间，又

$$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$$

如果 $E_1\neq\{0\}$，就有 $x_1\neq 0, x_1\in E_1$，根据 $(\lambda I-A)X=X$，所以必有 x_2，使得 $x_1=(\lambda I-A)x_2$. 依次类推，必有 x_n，使得 $(\lambda I-A)x_n=x_{n-1}$，$n=2, 3, \cdots$. 这时 $(\lambda I-A)^{n-1}x_n=x_1$. 所以 $x_n\in E_n$，而 $x_n\overline{\in} E_{n-1}$. 根据第四章 §9 的 F. Riesz 引理，在 E_n 中必有 y_n，使得

$$\|y_n\|=1, \rho(y_n, E_{n-1})>\frac{1}{2}, n=2, \cdots \tag{6.5}$$

如果 $p>q$，从 $E_{p-1}\supset E_q$，$(\lambda I-A)E_q\subset(\lambda I-A)E_p\subset E_{p-1}$ 得到 $y_q-\dfrac{(\lambda I-A)}{\lambda}y_q+\dfrac{(\lambda I-A)}{\lambda}y_p\in E_{p-1}$，因此从 (6.5) 得到

$$\|Ay_p-Ay_q\|=\lambda\left\|y_p-\left(y_q-\frac{\lambda I-A}{\lambda}y_q+\frac{\lambda I-A}{\lambda}y_p\right)\right\|>\frac{1}{2}|\lambda|$$

这和 A 是全连续的假设相矛盾. 证毕.

为了研究全连续算子的第 (i)、(ii) 类谱的情况，我们建立下面的引理.

引理 1　设 A 是 Banach 空间 X 上的全连续算子，λ 是非零复数，那末 $\mathscr{R}(\lambda I-A)$ 是 X 的闭子空间.

证　分四步进行. (I) 先假设 $f_n\in\mathscr{R}(\lambda I-A)$，并且是收敛点列，$g_n$ 是 f_n 的一个原象

$$(\lambda I-A)g_n=f_n \tag{6.6}$$

如果$\{g_n\}$是有界点列，那末$\{g_n\}$必有收敛子序列.

事实上，从(6.6)得到$g_n=\frac{1}{\lambda}(f_n+Ag_n)$，由$\{g_n\}$的有界性，所以有$\{g_{n_\nu}\}$，使得$\{Ag_{n_\nu}\}$收敛，从而$\{g_{n_\nu}\}$也收敛.

(II) 设$f\in(\lambda I-A)X$，我们证明在$\{g\mid(\lambda I-A)g=f\}$中向量$g$的范数的下确界$m=\inf\limits_{(\lambda I-A)g=f}\|g\|$是可达的. 事实上，设

$$(\lambda I-A)g_n=f$$

而且

$$\|g_n\|\to m$$

那末$\{g_n\}$是有界的，根据(I)必有$\{g_{n_\nu}\}$收敛于f'. 由$(\lambda I-A)$的连续性，$(\lambda I-A)f'=\lim\limits_{\nu\to\infty}(\lambda I-A)g_{n_\nu}=f$. 显然$\|f'\|=m$，即$f'$是达到范数下确界的向量（当然对给定的$f$，$f'$不必是唯一的）. 以后我们用$f'$表示达到范数下确界的向量.

(III) 证明存在常数M（与f无关），使得$\|f'\|\leqslant M\|f\|$：假如不对，就相应地有一列$f_n\in(\lambda I-A)X$，$n=1,2,\cdots$，使得

$$\|f'_n\|\geqslant n\|f_n\| \tag{6.7}$$

于是

$$(\lambda I-A)\frac{f'_n}{\|f'_n\|}=\frac{f_n}{\|f'_n\|}\to 0 \tag{6.8}$$

由(I) 又知道$\left\{\frac{f'_n}{\|f'_n\|}\right\}$必有收敛子序列$\frac{f'_{n_\nu}}{\|f'_{n_\nu}\|}\to f_0$，从而

$$(\lambda I-A)f_0=0 \tag{6.9}$$

因此，由(6.8)、(6.9)就得到

$$(\lambda I-A)(f'_n-\|f'_n\|f_0)=f_n$$

但f'_n是f_n的原象中范数达到下确界的，所以$\|f'_n\|\leqslant\|f'_n-\|f'_n\|f_0\|$，

$$\left\|\frac{f'_n}{\|f'_n\|}-f_0\right\|\geqslant 1$$

这和假设$\frac{f'_{n_\nu}}{\|f'_{n_\nu}\|}\to f_0$矛盾. 所以存在M, 使得$\|f'\|\leqslant M\|f\|$.

(IV) 证明$(\lambda I-A)X$是闭集: 如果$f_n\in(\lambda I-A)X$, $f_n\to f$, 那末有正数c, 使得$\|f_n\|\leqslant c$. 对每个f_n, 取相应的f'_n, 那末$\|f'_n\|\leqslant M\|f\|\leqslant Mc$. 根据(I), 可从$\{f'_n\}$中抽出收敛于$g$的子序列, 因而$(\lambda I-A)g=f$, 即$f\in(\lambda I-A)X$. 证毕.

利用这个引理, 来证明下面的定理.

定理 4　设A是复 Banach 空间X上全连续算子, $\lambda\neq 0$, 而且不是A的特征值, 那末λ必是A的共轭算子A^*的正则点.

证　设$F=(\lambda I-A)X$, 根据引理 1, 它是闭子空间. 又因λ不是A的特征值, 所以$(\lambda I-A)$是X到F上一对一的, 因而有F到X上的有界线性算子A_λ^{-1}, 它是$(\lambda I-A)$的逆算子.

今证$(\lambda I-A^*)X^*=X^*$: 设$f\in X^*$, 在F上造线性泛函ψ如下:

$$\psi(x)=f(A_\lambda^{-1}x),\ x\in F$$

由于$|\psi(x)|\leqslant\|A_\lambda^{-1}\|\|f\|\|x\|$, 所以$\psi$是$F$上连续线性泛函. 由泛函延拓定理, 将$\psi$延拓到$X$上. 因而由

$$((\lambda I-A)^*\psi)(y)=\psi((\lambda I-A)y)=f(y)$$

立即得到$(\lambda I-A)^*\psi=f$, 即$(\lambda I-A^*)X^*=X^*$. 而A^*是全连续的, 对A^*用定理 3, 便知道λ是A^*的正则点. 证毕.

定义　设X是赋范线性空间, X^*是它的共轭空间, 对于一对向量$x\in X$, $f\in X^*$, 如果

$$f(x)=0$$

便称x和f是相互**正交**的.

利用正交概念, 显然有如下引理:

引理 2　设A是赋范线性空间X上有界线性算子, 凡是和AX中所有向量正交的$f\in X^*$, 必满足$A^*f=0$. 特别, 当AX在X

中不稠密时，0 必是 A^* 的特征值.

证 由于 f 和 AX 的正交性，当 $y\in AX$ 时

$$0=f(y)=f(Ax)=(A^*f)(x),\ x\in X$$

这就是说 $A^*f=0$. 特别，当 AX 在 X 中不稠密时，根据泛函延拓定理，必有非零 f，使得 $f(Ax)=0,x\in X$. 从而 $A^*f=0$，即 f 是 A^* 相应于特征值 0 的特征向量. 证毕.

下面是黎斯-啸德尔(Riesz-Schauder) 关于全连续算子的特征值和特征向量空间的理论①.

定理 5 设 X 是复 Banach 空间，A 是 X 上全连续算子. 那末

1° 当 X 是无限维空间时，0 必是 A 的谱点；

2° 全连续算子的非零谱点必是特征值；

3° 当 $\lambda\neq 0$，而且是 A 的特征值时，与 λ 相应的特征向量空间必是有限维的；

4° 设 λ_1、…、λ_n 是 A 的不同的特征值，x_1、…、x_n 是相应的特征向量，那末 x_1、…、x_n 是线性无关的；

5° $\sigma(A)$ 的极限点只可能是 0 (因而 $\sigma(A)$ 是有限集或可列集).

证 1° 当 X 是无限维时，如果 $0\overline{\in}\sigma(A)$，那末 A^{-1} 便是 X 上的有界线性算子. 根据定理 2，$I=A^{-1}A$ 是全连续算子，这样 X 中单位球要致密了，这和第四章 §9 定理 14 的结论相冲突. 所以 $0\in\sigma(A)$.

2° 设 $\lambda\neq 0$，而且 $\lambda\in\sigma(A)$，根据引理 1 及定理 3，$\mathscr{R}(\lambda I-A)$ 是 X 的真闭子空间，所以 $\mathscr{R}(\lambda I-A)$ 在 X 中不稠密. 由引理 2，0是

---

① 通常将定理 5 和定理 6 的内容统称为 Riesz-Schauder 理论，严格说来，定理 5、6 的大部分结论为 Riesz 所得，Schauder 最终完成的是有关共轭算子的解的某些讨论.

$(\lambda I-A)^*=\lambda I-A^*$的特征值，所以$\lambda$不是$A^*$的正则点．再根据定理4，$\lambda$必是$A$的特征值．

3°　设λ是A的非零特征值，记E_λ为相应的特征向量空间．对任何$x\in E_\lambda$，显然$Ax=\lambda x$，即A限制在E_λ上是λI．如果E_λ是无限维，根据Riesz引理，E_λ的单位球面S就不致密，所以$\lambda S=AS$就不致密，但这和假设A是全连续的相冲突，因此E_λ只能是有限维．

4°　设λ_1、…、λ_n是不相同的特征值，如果x_1、…、x_n线性相关，不妨设$x_n=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i$，利用$(\lambda_i I-A)(\lambda_j I-A)=(\lambda_j I-A)(\lambda_i I-A)$，便得到

$$(\lambda_1-\lambda_n)\cdots(\lambda_{n-1}-\lambda_n)x_n=(\lambda_1 I-A)\cdots(\lambda_{n-1}I-A)x_n$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i(\lambda_1 I-A)\cdots(\lambda_{n-1}I-A)x_i=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i(\lambda_1-\lambda_i)\cdots(\lambda_{n-1}-\lambda_i)x_i$$
$$=0$$

然而上式左边$\neq 0$，这是矛盾．所以x_1、…、x_n线性无关．

5°　设$\{\lambda_n\}$是A的一列不同的特征值，而且$\lambda_n\to\lambda_0\neq 0$．不妨设$\lambda_n\neq 0$，$n=1,2,\cdots$，那末必有常数$M$，使得$\left|\frac{1}{\lambda_n}\right|<M$，$n=1,2\cdots$．设$x_n$是相应于$\lambda_n$的特征向量，记$M_n$为$x_1,\cdots,x_n$张成的$X$的子空间，由4°，$M_n$是$n$维子空间，$M_n\subset M_{n+1}$，而且$M_n\neq M_{n+1}$．由Riesz引理就得到一列$\{y_n\}$如下：

$$y_n\in M_n,\ \|y_n\|=1,\ \rho(y_n,M_{n-1})>\frac{1}{2}$$

设$y_n=\sum_{i=1}^{n}\beta_{in}x_i$，显然

$$(\lambda_n I-A)y_n=\sum_{i=1}^{n-1}\beta_{in}(\lambda_n-\lambda_i)x_i\in M_{n-1}$$

所以 $y_n-A\frac{y_n}{\lambda_n}\in M_{n-1}$, 因此当 $n>m$ 时, $z=y_n-A\frac{y_n}{\lambda_n}+A\frac{y_m}{\lambda_m}\in M_{n-1}$. 然而 $A\frac{y_n}{\lambda_n}-A\frac{y_m}{\lambda_m}=y_n-z$, 所以

$$\left\|A\frac{y_n}{\lambda_n}-A\frac{y_m}{\lambda_m}\right\|=\|y_n-z\|\geqslant\rho(y_n,\ M_{n-1})>\frac{1}{2}$$

但是 $\left\|\frac{y_n}{\lambda_n}\right\|\leqslant M$, 由 A 的全连续性, 必有 $\left\{A\frac{y_n}{\lambda_n}\right\}$ 的子列 $\left\{A\frac{y_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right\}$ 收敛. 这和 $\left\|A\frac{y_n}{\lambda_n}-A\frac{y_m}{\lambda_m}\right\|\geqslant\frac{1}{2}$ 相冲突. 所以 $\sigma(A)$ 最多只能以 0 为极限点. 证毕.

下面是 Riesz-Schauder 理论中讨论全连续算子 A 与 A^* 的关系的部分.

定理 6 设 X 为复 Banach 空间, A 为 X 上全连续算子, 那末

1° $\sigma(A)=\sigma(A^*)$, 即 $\sigma(A^*)=\{\lambda|\lambda\in\sigma(A)\}$;

2° 当 $\lambda\in\sigma(A)(=\sigma(A^*))$, 并且 $\lambda\neq 0$ 时, 那末空间 $\mathscr{N}(A-\lambda I)$ 与 $\mathscr{N}(A^*-\lambda I)$ 具有相同的维数;

3° $\lambda\neq\mu$, 那末 A 的相应于 λ 的特征向量 x 与 A^* 的相应于 μ 的特征向量 f 正交, 即 $f(x)=0$;

4° 假设 λ 是 A 的非零特征值, 那末方程

$$(\lambda I-A)x=y$$

可解的充要条件是: y 与 A^* 的任一相应于 λ 的特征向量 f 正交;

5° 如果 λ 为 A 的非零特征值, 那末, 共轭方程

$$(\lambda I-A^*)\varphi=f$$

可解的充要条件是: f 与 A 的任一相应于 λ 的特征向量 y 正交.

当 X 是有限维空间时, 定理 6 就是普通线代数中的 Fredholm 定理. 这时可由线代数知识来直接验证.

证 1° 当 X 是有限维时, A 是方阵, A^* 是转置阵, 那末 $\lambda\in\sigma(A)$

等价于 $\det(\lambda I-A)=0$. 这显然和 $\det(\lambda I-A^*)=0$ 等价，而这又等价于 $\lambda\in\sigma(A^*)$. 下面考察 X 是无限维的情况. (i) 当 $\lambda=0$ 时，根据定理 5 的 1°知道 $0\in\sigma(A)$. 这时 X^* 也是无限维(见 § 2习题 7). 根据定理 2 的 3°, A^* 也是全连续的，所以 $0\in\sigma(A^*)$. (ii) 当 $\lambda\neq 0$ 时，因为 $\lambda\in\rho(A)$ 时，必有 $\lambda\in\rho(A^*)$，因此总有 $\sigma(A^*)\subset\sigma(A)$. 反过来，当 $\lambda\in\sigma(A)$, $\lambda\neq 0$ 时，由定理 5 的 2°的证明过程已经得到 $\lambda\in\sigma(A^*)$，所以 $\sigma(A)=\sigma(A^*)$.

2° 留给读者证明(参见习题 6，在那里有提示，它是证明 2°的方法之一).

3° 是显然的. 因为当 $(\lambda I-A)x=0$, $(\mu I-A^*)f=0$ 时

$$\mu f(x)=(A^*f)(x)=f(Ax)=f(\lambda x)=\lambda f(x)$$

所以当 $\lambda\neq\mu$ 时，$f(x)=0$.

4° 必要性：如果 $(\lambda I-A)x=y$，f 为 A^* 相应于特征值 λ 的特征向量，那末 $(\lambda I-A^*)f=0$，而且

$$f(y)=f((\lambda I-A)x)=((\lambda I-A)^*f)(x)=0$$

充分性：如果对满足条件 $(\lambda I-A^*)f=0$ 的一切 f，都有 $f(y)=0$，今证 $y\in\mathscr{R}(\lambda I-A)$. 用反证法，如果 $y\overline{\in}(\lambda I-A)X$，由于 $(\lambda I-A)X$ 是闭子空间，由泛函延拓定理，必存在 $f\in X^*$，使得 $f((\lambda I-A)X)=0$，而 $f(y)\neq 0$. 因此，当 $x\in X$ 时

$$((\lambda I-A)^*f)(x)=f((\lambda I-A)x)=0$$

即 f 是 A^* 的相应于 λ 的一个特征向量，然而 $f(y)\neq 0$. 这和假设冲突. 所以 $y\in\mathscr{R}(\lambda I-A)$.

5° 必要性：证法与4°的必要性类似.

充分性：设 f 是满足5°条件，在 $(\lambda I-A)X$ 上，作泛函

$$\varphi(x)=f(y),\ x\in(\lambda I-A)X \tag{6.10}$$

其中 y 是适合 $(\lambda I-A)y=x$ 的向量. 如果又有 y_1，满足 $(\lambda I-A)y_1=x$，那末 $(y-y_1)$ 是 A 的相应于 λ 的特征向量，所以 $f(y-y_1)=0$,

因此 $\varphi(x)$ 是由 x 而确定的. 显然它是 $(\lambda I-A)X$ 上的线性泛函.

取 x' 为方程

$$(\lambda I-A)y=x \qquad (x\in\mathscr{R}(\lambda I-A))$$

的解 y 中范数最小的一个向量, 就有 $\|x'\|\leqslant M\|x\|$, 此地 M 是和 x 无关的常数. 所以 $\varphi(x)=f(x')$. 由此得到

$$|\varphi(x)|=|f(x')|\leqslant\|f\|\|x'\|\leqslant M\|f\|\|x\|$$

从而 $\varphi(x)$ 是 $(\lambda I-A)X$ 上连续线性泛函. 再将 φ 延拓成 X 上连续线性泛函, 由此对任何 $y\in X$, 并根据(6.10)就得到

$$((\lambda I-A^*)\varphi)(y)=\varphi((\lambda I-A)y)=f(y)$$

所以 φ 是方程 $(\lambda I-A^*)\varphi=f$ 的解. 证毕.

3. 全连续算子的不变闭子空间 现在我们着手讨论 § 5 最后一段提出的问题 1, 考察无限维复 Banach 空间上哪些有界线性算子存在非平凡的不变子空间. 这个问题是 von Neumann 首先研究的, 他证明了在无限维 Hilbert 空间(它的定义见第六章)上每个全连续算子有非平凡的不变子空间, 后来 N. Aronszajn 和 K. Smith (参见[11])对一般的复 Banach 空间上的全连续算子证明了非平凡的不变闭子空间的存在性, 但是他们的证明比较复杂. 我们先来看一下这个问题的实质在什么地方. 当全连续算子 B 有非零谱点 λ 时, 由定理 5, λ 是 B 的特征值, 那末相应的特征子空间 E_λ 就是 B 的不变子空间. 由此立即可以得到 B 的非平凡的不变子空间了. 因此只要讨论当 B 的谱点只有零的情况, 就是说这个问题的实质在于证明: 广义幂零的全连续算子有非平凡的不变闭子空间. 近来, 有人认为整个不变子空间的解决关键是在于搞清楚广义幂零算子的不变子空间.

在 N. Aronszajn 和 K. Smith 之后, 较多的学者在研究更广泛的一类算子(能与某个非零全连续算子交换的线性有界算子)的不变闭子空间的存在性. 更进一步就是要研究一个全连续算子是

否有非平凡的超不变闭子空间. 在这个方向上, 问题的最一般的提法如下:

问题 2. 在无限维的复 Banach 空间中是否每个有界线性算子都有非平凡的超不变闭子空间.

这两个问题有密切的联系. 由于超不变闭子空间必是不变的, 所以如果问题 2 的回答是肯定的, 那末问题 1 的回答自然是肯定的. 如果问题 1 的回答是否定的, 那末问题 2 的回答更是否定的.

最近罗蒙诺索夫(В. И. Ломоносов)(参见[12]) 对于问题 2 进行了研究, 他证明了全连续算子 (以及与某个非零全连续算子可交换的任何有界线性算子) 不仅有非平凡的不变闭子空间, 而且有非平凡超不变闭子空间. 他所引进的方法是较有意思的, 比 Aronszajn-Smith 的方法简单, 但是结论要强得多. 当然, 这种方法并不能完全代替 Aronszajn-Smith 方法上的价值.

定理 7 (罗蒙诺索夫) 设 X 是复的 Banach 空间, $B\in\mathfrak{B}(X\to X)$, $B\neq\alpha I$(α 是常数), 如果有一个非零的全连续算子 A 与 B 交换, 那末 B 必有非平凡的超不变闭子空间.

证 分下面几步加以证明.

(I) 令 $\mathfrak{A}_B$ 是 $\mathfrak{B}(X\to X)$ 中与 B 可交换的算子全体. 我们先说明问题的实质是在于 X 是无限维空间, 而且对每个非零向量 $y\in X$, $\{\mathfrak{A}_B y\}$ 在 X 中稠密的情况.

事实上, 如果 X 是有限维空间, 根据 §5 例 9 知道, 这时对于任何 $B\neq\alpha I$, 必存在非平凡超不变子空间, 所以下面不妨设 X 是无限维的. 另外, 如果有某个非零向量 y, 使得 $\overline{\{\mathfrak{A}_B y\}}\neq X$. 那末根据 §5 引理 9, $\overline{\{\mathfrak{A}_B y\}}$ 便是 B 的超不变子空间. 由于 $\overline{\{\mathfrak{A}_B y\}}\neq X$, 以及 $y\in\overline{\{\mathfrak{A}_B y\}}$, 所以 $\overline{\{\mathfrak{A}_B y\}}$, 是非平凡的.

由此可见, 我们只要证明满足定理 7 条件的算子 B, 必存在非

零y，使得$\{\mathfrak{A}_B y\}$在X中不稠密.

为此，我们分三步(II)-(IV)先来完成下列命题的证明.

命题 设B是与非零全连续算子A可交换，如果对每个非零y，$\{\mathfrak{A}_B y\}$在X中稠密，那末必存在$T_0\in\mathfrak{A}_B$，使得T_0A具有特征值1.（注　这个命题是罗蒙诺索夫定理的核心）

(II) 由于$A\neq 0$，在X中必有一个向量x_0，使得$\|Ax_0\|-\|A\|>0$，因此当$\|z\|\leqslant 1$时，$\|A(x_0-z)\|\geqslant\|Ax_0\|-\|A\|>0$. 记$S$是以$x_0$为球心的单位闭球：$S=\{x\mid\|x-x_0\|\leqslant 1\}$. 当$x\in S$时

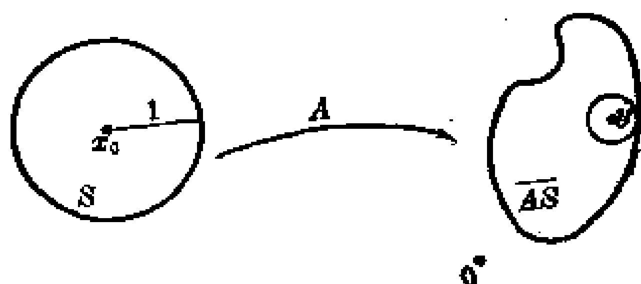


图 5.3

$$
\begin{aligned}
\|Ax\|&=\|Ax_0-A(x_0-x)\|\\
&\geqslant\|Ax_0\|-\|A\|\|x_0-x\|\geqslant\|Ax_0\|-\|A\|>0
\end{aligned}
$$

所以$0\overline{\in}(\overline{AS})$. 对任何$y\in(\overline{AS})$，因为$y\neq 0$，由命题的假设，$\{\mathfrak{A}_B y\}$在$X$中稠密，所以在$\mathfrak{A}_B$中必有$T$，使得

$$\|Ty-x_0\|<1$$

由于T是连续的，所以必存在y的环境$O(y,\ \varepsilon)\left(\text{例如取}\varepsilon<\dfrac{1-\|Ty-x_0\|}{\|T\|}\right)$使得当$z\in O(y,\varepsilon)$时，$\|Tz-x_0\|<1$. 因为$A$是全连续的，$AS$是致密集，所以$(\overline{AS})$是紧集. 而$\{O(y,\ \varepsilon)\mid y\in(\overline{AS})\}$是$(\overline{AS})$上一族开覆盖，因而可以从$\{O(y,\ \varepsilon)\}$中选出$O(y_1,\ \varepsilon_1)$、…、$O(y_n,\varepsilon_n)$，使得$\bigcup\limits_{i=1}^{n}O(y_i,\varepsilon_i)\supset(\overline{AS})$，而且对每个$O(y_i,\ \varepsilon_i)$有相

应的 $T_i\in\mathfrak{A}_B$，使得 $T_iO(y_i, \varepsilon_i)\subset S$. 就是说，当 $y\in O(y_i, \varepsilon_i)$时

$$\|T_iy-x_0\|<1 \quad (6.11)$$

(III) 作函数

$$f(t)=\begin{cases}0, & t\geqslant 1\\ 1-t, & 0\leqslant t<1\end{cases}$$

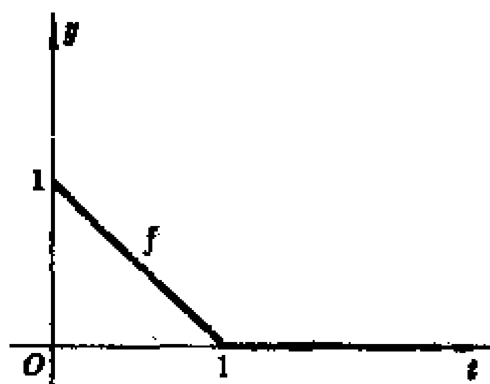


图 5.4

又作$\overline{(AS)}\to X$ 中的非线性映照 Φ 如下：当 $y\in\overline{(AS)}$时

$$\Phi(y)=\frac{\sum_{i=1}^{n}f(\|T_iy-x_0\|)T_iy}{\sum_{i=1}^{n}f(\|T_iy-x_0\|)} \qquad (6.12)$$

显然，由于对任何 $y\in\overline{(AS)}$，必有一个 i，使 $y\in O(y_i, \varepsilon_i)$，从而(6.11)成立. 因此分母中至少第 i 项是大于零，因而整个分母大于零. 因为(6.12)中分母、分子分别都是 y 的连续函数和连续映照，所以 Φ 是$\overline{(AS)}\to X$ 中的连续映照.

现在证明：当 $y\in\overline{(AS)}$时，$\Phi(y)\in S$. 事实上，因为

$$\begin{aligned}\Phi(y)-x_0&=\frac{\sum_i f(\|T_iy-x_0\|)T_iy-\sum_i f(\|T_iy-x_0\|)x_0}{\sum_i f(\|T_iy-x_0\|)}\\&=\frac{\sum_i f(\|T_iy-x_0\|)\ (T_iy-x_0)}{\sum_i f(\|T_iy-x_0\|)}\\&=\frac{\Sigma' f(\|T_iy-x_0\|)\ (T_iy-x_0)}{\sum_i f(\|T_iy-x_0\|)}\\&\quad+\frac{\Sigma'' f(\|T_iy-x_0\|)(T_iy-x_0)}{\sum_i f(\|T_iy-x_0\|)}\end{aligned}$$

Σ' 表示对 $\|T_i y-x_0\|\geqslant 1$ 的项求和，由函数 $f(t)$ 的定义，这种项的系数 $f(\|T_i y-x_0\|)=0$，所以 $\Sigma'=0$. 而 Σ'' 表示对 $\|T_i y-x_0\|<1$ 的项求和，显然

$$\frac{\|\Sigma''\|}{\sum\limits_i f(\|T_i y-x_0\|)}<\frac{\Sigma'' f(\|T_i y-x_0\|)}{\sum\limits_i f(\|T_i y-x_0\|)}\leqslant 1$$

因而 $\Phi(y)\in S$.

(IV) 利用映照 Φ，作 $S\to S$ 的映照 Ψ 如下：

$$\Psi(x)=\Phi(Ax)=\frac{\sum\limits_i f(\|T_i Ax-x_0\|)T_i Ax}{\sum\limits_i f(\|T_i Ax-x_0\|)},\ x\in S$$

因为 $Ax\in\overline{(AS)}$，由(III)的结论，$\Psi(x)\in S$. 又由于 Φ、A 是连续映照，所以 Ψ 是 $S\to S$ 的连续映照. 由于 AS 是致密集，根据第四章 §9 定理 11 系 1，连续映照把致密集映照成致密集，所以 Φ 把 AS 映照成致密集，即 $\Psi(S)=\Phi(AS)$ 是致密集. 又显然 S 是凸闭的集. 根据 Schauder 不动点原理(第四章 §8)必存在 $\bar{x}\in S$，使得

$$\frac{\sum\limits_i f(\|T_i A\bar{x}-x_0\|)T_i A\bar{x}}{\sum\limits_i f(\|T_i A\bar{x}-x_0\|)}=\bar{x} \tag{6.13}$$

取定这个 $\bar{x}$，并记 $\alpha_i=\dfrac{f(\|T_i A\bar{x}-x_0\|)}{\sum\limits_i f(\|T_i A\bar{x}-x_0\|)}$，考虑 X 上的方程：

$$\sum_i \alpha_i T_i Az=z,\ z\in X \tag{6.14}$$

(6.13)说明方程(6.14)有非零解 $z=\bar{x}$，由于 A 是全连续的，所以 $C\equiv\Sigma\alpha_i T_i A$ 也是 X 上全连续算子. 这样(6.13)、(6.14)说明取 $T_0=\Sigma\alpha_i T_i$ 时，$C=T_0 A$ 有一个特征值 1. 这就完成命题的证明.

(V) 利用上述命题证明定理成立. 事实上，如果对一切非零 y，$\{\mathfrak{A}_R y\}$ 在 X 中稠密，那末 IV 中 C 具有特征值 1. 根据定理 5 的

3°. 算子C相应于1的特征向量空间L_1是有限维的. 由于B与C可以交换, 根据本章§5引理6的系, $BL_1 \subset L_1$. 但L_1是有限维(复)空间, 所以B在L_1内必有特征值λ_0. 记相应的特征向量空间为E_{λ_0}. 显然闭子空间$E_{\lambda_0} \neq X$. 否则将会发生$B=\lambda_0 I$, 这与假设矛盾. 既然$E_{\lambda_0} \neq X$, 又根据本章§5定理6的4°, E_{λ_0}将是$\mathfrak{A}_B$的不变子空间, 这样一来, 当取$y \in E_{\lambda_0}$, $y \neq 0$时, $\overline{\{\mathfrak{A}_B y\}} \subset E_{\lambda_0} \neq X$. 这与$\overline{\{\mathfrak{A}_B y\}} = X$相矛盾. 因而$B$存在非平凡的超不变闭子空间. 证毕.

系1　设X是无限维复Banach空间, $B \neq 0$, 并且是全连续的, B必有非平凡超不变闭子空间, 因而B有非平凡的不变闭子空间.

证　因为B是非零、全连续, 所以B不是倍单位算子. 又由于B和B本身可以交换, 所以把定理7中A就取为B就可以了.

如果只要求达到系1的结论, 可以不用罗蒙诺索夫定理而直接给它简单的证明. 这个证明是H. M. Hilden给出的. 他部分地引用了罗蒙诺索夫技巧, 避免了用"不动点原理"这一深入的工具, 而只要用到Banach空间全连续算子的非零谱点必是特征值, 并且特征子空间是有限维及谱半径的定理. 下面就是他的证明(参见[12]).

证　B是全连续的, 如果B有非零谱点λ, 由§5引理7的性质5°易知特征子空间E_λ便是B的超不变而且是非平凡的子空间. 所以下面不妨设$r(B)=0$.

仍用反证法, 而且定理7的第(I)步仍有效, 第(II)步中A换为现在的B后也仍然有效. 由第(II)步得到: 存在$\mathfrak{A}_B$中有限个算子$T_1, \cdots, T_n$, 对任何$y \in \overline{BS}$, 必有某个T_i记为T_{i_1}, 使$y_1 = T_{i_1} y \in S$. 考察$BT_{i_1} y \in BS \subset \overline{BS}$. 重复应用(II)中所得到的事实, 必有$T_1, \cdots, T_n$中某个$T_{i_2}$, 使$y_2 = T_{i_2} BT_{i_1} y \in S, \cdots$, 这样得到

$$y_m = T_{i_m} BT_{i_{m-1}} \cdots BT_{i_1} y \in S,\ By_m \in BS,\ m=1, 2 \cdots$$

由于 $By_m \in BS$，所以 $\|By_m\| \geq \|Bx_0\| - \|B(x_0 - y_m)\| \geq \|Bx_0\| - \|B\| > 0$. 另一方面，记 $c = \max(\|T_1\|, \cdots, \|T_n\|)$ 时，利用 T_i 与 B 可交换，得有

$$\|By_m\| \leq c^m \|B\|^m \|y\|$$

根据谱半径定理应该有 $\lim \sqrt[n]{\|(cB)^n\|} = c\lim \sqrt[n]{\|B^n\|} = cr(B) = 0$，即 $\lim_{m\to\infty} \|By_m\| = 0$. 这就发生矛盾. 证毕.

系 2　设 X 是无限维复 Banach 空间，$B \in \mathfrak{B}(X \to X)$，如果存在非零多项式 $p(t)$，使得 $p(B)$ 为非零的全连续算子，那末 B 必有非平凡的超不变子空间.

证　因为 $p(B)$ 为非零全连续算子，所以 B 决不会是倍单位算子. 再取 $A = p(B)$，由定理 7 立即得到系 2 的结论. 证毕.

习　题

1. 设 $K(x, y)$ 是全平面上勒贝格可测函数，而且

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |K(x, y)|^2 dx dy < \infty$$

作 $L^2(-\infty, \infty)$ 上线性算子 A:

$$(Af)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) f(y) dy$$

问 A 是否是 $L^2(-\infty, \infty)$ 上全连续算子.

2. 设 A 为 l^2 上线性算子. 记 $e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$ (第 n 个坐标为 1，其余为 0)，$n = 1, 2, \cdots$ 时，作线性算子 A:

$$Ae_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} e_j$$

设 $\sum_{k,j=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty$. 证明 A 是 l^2 上全连续算子.

3. 在 l^2 中，取 $\{e_n\}$ 如习题 2. 作 l^2 上线性算子 U:

$$Ue_i = \frac{1}{i} e_{i+1}, \quad i = 1, 2 \cdots$$

证明 U 是 l^2 上全连续算子，并且是广义幂零算子，但 0 不是特征值.

4. 设$K(x,y)$是正方形$[a,b]\times[a,b]$上可测函数，设$p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，

$$\int_a^b\left(\int_a^b|K(x,y)|^q dy\right)^{\frac{p}{q}}dx<\infty$$

证明L^p上线性算子

$$(Af)(x)=\int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

为L^p上全连续算子.

5. 设A是Banach空间X上有界线性算子，L是A的闭的不变子空间，在Banach空间$\Phi=X/L$上作算子$\widetilde{A}$：$\tilde{x}\to\widetilde{Ax}$. 证明$\widetilde{A}$是Banach空间$\Phi$上有界线性算子. 如果$A$是$X$上全连续算子，那末$\widetilde{A}$也是$\Phi$上全连续算子.

6. 设A是复Banach空间X上全连续算子，$\lambda_0\neq0$，并且λ_0是A的谱点，任取$\varepsilon>0$，使得圆$|\lambda-\lambda_0|\leqslant\varepsilon$内只含有$A$的一个谱点$\lambda_0$，令

$$P_{\lambda_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda$$

证明下列命题成立.

(i) P_{λ_0}是全连续算子，而且$P_{\lambda_0}^2=P_{\lambda_0}$；

(ii) $P_{\lambda_0}X$是有限维空间，并且所有相应于λ_0的特征向量全包含在$P_{\lambda_0}X$中；

(iii) $P_{\lambda_0}A=AP_{\lambda_0}$；

(iv) $P_{\lambda_0}^*X^*$是A^*的不变子空间，并且A^*相应于λ_0的特征向量全包含在$P_{\lambda_0}^*X^*$中；

(v) $P_{\lambda_0}^*X^*=(P_{\lambda_0}X)^*$；

(vi) A相应于λ_0的特征子空间的维数与A^*相应于λ_0的特征子空间维数相等.

7. 利用全连续算子Riesz-Schauder理论给出全连续算子A的豫解式$R(A;\lambda)$：对任何$\lambda_0\in\sigma(A)$，$\lambda_0\neq0$，必在λ_0的近旁有下列展开式

$$R(A;\lambda)=\frac{C_{-n}}{(\lambda-\lambda_0)^n}+\cdots+\frac{C_{-1}}{\lambda-\lambda_0}+C_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}C_\nu(\lambda-\lambda_0)^\nu$$

其中$\{C_\nu|\nu=-n,-n+1,\cdots,0,1,2,\cdots\}$是有界线性算子.

8. 设X是Banach空间，B是X上有界线性算子，$B\neq\alpha I$，如果存在非常数多项式$p(t)$和非零全连续算子A，满足$p(B)A=Ap(B)$. 证明B必有非平凡的超不变子空间.

第六章 Hilbert空间的几何学与算子

在前面一章中，我们介绍了赋范线性空间的概念．以有限维空间来说，向量的范数相当于向量的模长．但是，在有限维欧几里得空间中还有一个很重要的概念——两个向量的夹角，特别是两个向量的直交．有了它们，就有勾股定理，向量的投影等等．而在赋范线性空间中，并没有引进这个概念．另外，我们还知道，向量的模长与夹角可以用更本质的量——向量的内积来描述．这一章的主要内容就是讨论无限维的具有内积的空间的(解析)几何学以及这种空间上的线性算子．

§1 基本概念

不论是实的或复的欧几里得空间都有一个特点，在其中定义了向量的内积，并且向量的范数的平方等于该向量与它自身的内积．详细地说，设E^n是复欧几里得空间，对于E^n中任意两个向量$x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$，规定内积(x,y)是如下的复数：

$$(x,y)=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+\cdots+x_n\bar{y}_n$$

显然，这样定义的内积(x,y)具有下述性质：

(i) $(y,x)=\overline{(x,y)}$；

(ii) 当α、β是复数时，$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$；

(iii) $(x,x)\geqslant 0$，而且等号成立的充要条件是$x=0$．其中x，y，$z\in E^n$．

在欧几里得空间中内积概念之所以重要，是由于可以利用它在E^n中建立欧几里得几何学，例如：向量的交角、垂直、投影等等重要几何概念都是由内积表述的．在某些无限维空间中也能定义

内积概念，使具有性质(i)—(iii)，例如平方可积函数族 $L^2(E, \mu)$ 中，两向量 $f(x)$、$g(x)$的内积(f, g)定义为

$$(f, g)=\int_E f(x)\overline{g(x)}d\mu$$

容易验证它具有性质(i)—(iii)．这种内积在经典分析三角级数或直交级数理论中起着很重要的作用．更一般地，我们引入如下概念．

1．内积与内积空间

定义　设Λ是实数域或复数域，H是Λ上的线性空间，如果对于H中任何两个向量x、y，都对应着一个数$(x, y)\in\Lambda$，满足条件：

(i)　共轭对称性：对任何x、$y\in H$，$(x, y)=\overline{(y, x)}$；

(ii)　对第一变元的线性：对任何x、y、$z\in H$及任何两数α、$\beta\in\Lambda$，成立着

$$(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x, z)+\beta(y, z)$$

(iii)　正定性：对于一切$x\in H$，$(x, x)\geqslant 0$，而且$(x, x)=0$的充要条件是$x=0$；

那末$(\cdot, \cdot)$称为H中的**内积**．如果H上定义了内积，当Λ是实数(或复数)域时，称H为**实(或复)内积空间**．

内积空间是一种极为重要的空间，它在数学物理、量子物理理论、微分方程论及概率论等等中有重要而且广泛的应用．

我们把上面(i)—(iii)三条要求稍为作一些分析．

共轭对称性又称为Hermite(厄米)性．在条件(i)中，要求$(x, y)=\overline{(y, x)}$，如果H是实空间，那末这个式子就改成$(x, y)=(y, x)$，称为**对称性**．

由条件(i)和(ii)，我们得到内积的性质(iv)．

(iv)　内积$(\cdot, \cdot)$对于第二个变元来说，是共轭线性的：即对于任何x、y、$z\in H$及任何二个数α、β，成立着

$$(z, \alpha x+\beta y)=\bar{\alpha}(z, x)+\bar{\beta}(z, y)$$

当H是实空间时，内积对第二变元也是线性的。

通常的讨论中，内积空间总是假设为复空间.

引理 1 如果H是内积空间，那末对于任何$x, y\in H$

$$|(x, y)|^2\leqslant(x, x)(y, y) \tag{1.1}$$

证 对任何数λ都有

$$0\leqslant(x+\lambda y, x+\lambda y)=(x, x)+2\mathrm{Re}\{(x, y)\bar{\lambda}\}+(y, y)|\lambda|^2 \tag{1.2}$$

当$y=0$时(1.1)显然成立. 设$y\neq 0$，那末$(y, y)>0$，取$\lambda=-\dfrac{(x, y)}{(y, y)}$(这个数是使(1.2)的右边达到最小值的数)，就得到

$$(x, x)-2\frac{|(x, y)|^2}{(y, y)}+\frac{|(x, y)|^2}{(y, y)^2}(y, y)\geqslant 0$$

这就得到(1.1).

引理 1 中的不等式称为 Schwarz(许瓦兹)不等式①.

定理 1 假设H是内积空间，$(\cdot, \cdot)$是H上的内积，记$\|x\|=\sqrt{(x, x)}$，那末$\|\cdot\|$是一个范数.

证 显然，只要验证$\|\cdot\|$满足三角不等式(因为范数的其它要求都可以从内积的性质直接推出). 在(1.2)中取$\lambda=1$，立即得到

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+2\mathrm{Re}(x, y)+\|y\|^2 \tag{1.3}$$

由 Schwarz 不等式，可知

$$|\mathrm{Re}(x, y)|\leqslant|(x, y)|\leqslant\|x\|\|y\| \tag{1.4}$$

由(1.3)及(1.4)即知

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$$

---

① 由引理 1 的证明可以看出，当$(\cdot, \cdot)$只满足条件(i)，(ii)和条件(iii)中的$(x, x)\geqslant 0$时，Schwarz 不等式仍然成立. 因为当$y\neq 0$时，从(1.2)对一切λ成立可推出$(x, y)=0$，即(1.1)仍成立.

所以

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$$ 证毕.

我们称范数 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ 是由内积 $(\cdot,\cdot)$ 导出的范数. 因此, 内积空间按内积导出的范数成为赋范线性空间. 凡是在内积空间中的极限, 收敛等概念, 如无特殊申明都是指按照这个范数所引出的距离 ρ 而言的.

引理 2 设 H 是内积空间, 那末内积关于两个变元是连续的, 也就是当 $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$ 时, $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$.

证 因为

$$\begin{aligned}|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)|&\leqslant|(x_n,y_n)-(x_0,y_n)|+|(x_0,y_n)-(x_0,y_0)|\\&=|(x_n-x_0,y_n)|+|(x_0,y_n-y_0)|\\&\leqslant\|x_n-x_0\|\|y_n\|+\|x_0\|\|y_n-y_0\|\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 由于 $y_n\to y_0$, 根据第四章 § 2, $\{y_n\}$ 是有界的. 我们得到

$$|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)|\to 0$$ 证毕.

2. Hilbert 空间

定义: 完备的内积空间称为希尔伯特(Hilbert)空间.

例 1 设 l^2 是满足条件 $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu|^2<\infty$ 的数列 $\{x_n\}$ 全体按通常的线性运算所成的线性空间(参看第四章 § 3), 当

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^2,\ y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)\in l^2$$

时规定

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\bar{y}_i$$

可以证明这样定义的 $(\cdot,\cdot)$ 确实满足内积的三个条件, 今后在 l^2 中都是这样取内积. l^2 是一个 Hilbert 空间 (完备性见第四章 § 7 定理 1 的系).

例 2 设 $L^2(\Omega,\boldsymbol{R},\mu)$ (这里 $\boldsymbol{R}$ 是 σ-代数) 是定义在 Ω 上的

关于 μ 平方可积的函数全体（几乎处处相等的两个函数看作是同一个向量）按通常的线性运算所成线性空间（见第四章 §3）．对于 $f、g\in L^2(\Omega, \boldsymbol{R}, \mu)$，规定内积为

$$(f, g)=\int_\Omega f(x)\overline{g(x)}d\mu$$

容易验证这确实是内积．所以 $L^2(\Omega, \boldsymbol{R}, \mu)$ 是一个 Hilbert 空间．（完备性见第四章 §7 定理 1．）

我们注意，当 H 是内积空间，$\|x\|$ 是由内积所导出的范数时，内积也可以用范数来表达．当 H 是实内积空间时

$$(x, y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2) \tag{1.5}$$

当 H 是复的内积空间时

$$(x, y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2) \tag{1.6}$$

这些可以直接从内积的定义导出．等式(1.5)及(1.6)常被称为**极化恒等式**，这是一个重要的等式．在内积空间中要多次引用．

引理 3 如果 H 是内积空间，$\|\cdot\|$ 是由内积导出的范数，则对任何 $x、y\in H$，成立

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2) \tag{1.7}$$

证 只要把范数用内积来表示，就得到

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y, x+y)+(x-y, x-y)$$
$$=2(x, x)+2(y, y)=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$ 证毕．

如果 H 是二维实空间，等式(1.7)的意思就是：平行四边形的对角线长度的平方和等于四边的长度平方和．所以对一般内积空间，等式(1.7)也就称为**平行四边形公式**．见图 6.1．

引理 3 说明，由内积决定的范数必须适合平行四边形公式．

平行四边形公式是内积空间中的范数的特征性质．换言之，有

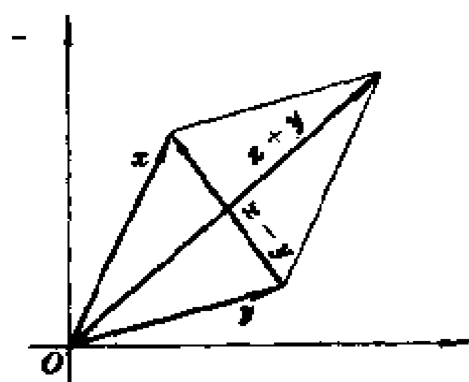


图　6.1

定理 2　设X是一个赋范线性空间，其中的范数是$\|\cdot\|$．如果对X中任何元素x、y，范数都满足平行四边形公式(1.7)，那末必定可以在X中定义内积$(\cdot,\cdot)$，使$\|x\|$就是由内积$(\cdot,\cdot)$导出的范数．

证　当X是实空间时，如果范数$\|x\|$确是内积导出的，那末我们知道极化恒等式(1.5)成立，这启发我们作

$$(x,y)_1=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2),\ x,y\in X \tag{1.8}$$

下面证明，$(\cdot,\cdot)_1$确实是内积．事实上，显然$(x,y)_1=(y,x)_1$即内积的条件(1)满足．由(1.8)显然有$(0,z)_1=0$．由(1.7)及(1.8)得到

$$(x,z)_1+(y,z)_1=\frac{1}{4}(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2+\|y+z\|^2-\|y-z\|^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2-\left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right)=2\left(\frac{x+y}{2},\ z\right)_1 \tag{1.9}$$

在(1.9)中取$y=0$得到

$$(x,z)_1=2\left(\frac{x}{2},z\right)_1,\ x\in H$$

再在这个式中把x换做$x+y$，又利用(1.9)得到

$$(x,z)_1+(y,z)_1=(x+y,z)_1 \tag{1.10}$$

对于给定的x、$z\in X$，我们作函数

$$f(t)=(tx,z)_1,\ -\infty<t<\infty$$

由于(1.10)，显然函数$f(t)$满足函数方程

$$f(t_1+t_2)=f(t_1)+f(t_2),\ -\infty<t_1,t_2<\infty \tag{1.11}$$

又由于当 $t_n\to t$ 时，$\|t_nx\pm z\|\to\|tx\pm z\|$，由(1.8)，$f(t)$是连续函数．但是满足(1.11)的连续函数 $f(t)$必定是如下函数：

$$f(t)=f(1)t$$

(见定理2后附注1)．因此

$$(tx,z)_1=t(x,z)_1 \tag{1.12}$$

(1.10)及(1.12)合起来说明$(\cdot,\cdot)_1$适合内积的条件(ii)．

在(1.8)中，令 $y=x$ 就得到

$$\|x\|^2=(x,x)_1$$

所以$(\cdot,\cdot)_1$适合内积的条件(iii)．因此，当X是实空间时，$(\cdot,\cdot)_1$即为内积．显然由内积$(\cdot,\cdot)_1$导出的范数就是原先给定的$\|x\|$．

如果X是复的赋范线性空间，我们受到极化恒等式(1.6)的启发，作出

$$\begin{aligned}(x,y)&=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2)\\&=(x,y)_1+i(x,iy)_1\end{aligned} \tag{1.13}$$

这里$(x,y)_1$由等式(1.8)决定．我们来证明这是X中的内积．事实上，由等式(1.10)知道

$$(x,z)+(y,z)=(x+y,z)$$

又由(1.12)知道对任意实数 a 成立着

$$(ax,y)=a(x,y) \tag{1.14}$$

又由(1.13)可以直接验证

$$(ix,y)=i(x,y),\ (i^2=-1)$$

因此对于任何复数 a，(1.14)仍成立．所以$(\cdot,\cdot)$适合内积的条件(ii)，由(1.13)易知

$$(y,x)=\overline{(x,y)}$$

再在(1.13)中令 $y=x$，得到

$$(x, x)=\|x\|^2$$

所以(x, y)确是X上的内积，并且由(x, y)决定的范数就是$\|x\|$。证毕。

注1 设$f(t)(-\infty<t<\infty)$是连续函数且满足方程

$$f(t_1+t_2)=f(t_1)+f(t_2),\quad -\infty<t_1, t_2<\infty \tag{1.15}$$

那末对于一切t

$$f(t)=tf(1) \tag{1.16}$$

证 首先证明对任何自然数n

$$f(nt)=nf(t),\quad -\infty<t<\infty \tag{1.17}$$

事实上，当$n=1$时(1.17)显然成立，设对于自然数n (1.17)成立，由(1.15)得到

$$f((n+1)t)=f(nt)+f(t)=(n+1)f(t)$$

所以对$n+1$，(1.17)成立．由数学归纳法，对一切自然数n，(1.17)成立．对任何正有理数$\frac{n}{m}$，两次利用(1.17)得到

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=nf\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{n}{m}f(1)$$

在(1.17)中取$n>1$及$t=0$，立即知道$f(0)=0$；又取$t_1=-t_2=t$就得到

$$f(-t)=-f(t)$$

所以对一切有理数t，(1.16)成立，再利用函数$f(t)$和$tf(1)$的连续性立即可知对一切实数t，(1.16)成立．证毕．

定理1及2说明，赋范线性空间成为内积空间的条件是范数满足平行四边形公式．由此可以说明：并非每个赋范线性空间都是内积空间．例如$L^p[a, b]$当$p\geqslant 1, p\neq 2$时，它就不是内积空间．因为容易验证向量c(常数函数）和另一个适当的非常数函数x就在$L^p[a, b]$中不满足平行四边形公式．

习　题

1. 举出五个赋范线性空间，它们的范数都不能由内积导出．

2. 设 R_1、R_2、…、R_n、…是一列内积空间. 令 $R=\{\{x_n\}\mid x_n\in R_n, \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty\}$, 当 $\{x_n\}$、$\{y_n\}\in R$ 时规定 $\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}=\{\alpha x_n+\beta y_n\}$ (α、β 是数),

$$(\{x_n\}, \{y_n\})=\sum_n (x_n, y_n)$$

证明 R 是内积空间. 又设 $R_n(n=1, 2, \cdots)$ 都是 Hilbert 空间, 证明 R 是 Hilbert 空间.

3. 设 R 是 n 维线性空间, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 R 的一组基, 证明 $(\cdot, \cdot)$ 成为 R 上的内积的充要条件是存在 $n\times n$ 正定方阵 $A=(a_{\mu\nu})$, 使得

$$\left(\sum_\nu x_\nu e_\nu, \sum y_\nu e_\nu\right)=\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu \bar{y}_\nu$$

4. 设 H 是内积空间, $y\in H$. 证明 $x\longmapsto (x, y)$, $x\in H$ 是 H 上的连续线性泛函, 而且它的范数是 $\|y\|$.

5. 设 H 是内积空间, x_1、x_2、…、x_n 是 H 中的向量, 它们满足条件

$$(x_\mu, x_\nu)=\begin{cases}0, & 当\ \mu\neq\nu\\ 1, & 当\ \mu=\nu\end{cases}$$

证明 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 是一组线性无关的向量.

6. 设 $(\cdot, \cdot)_0$ 是线性空间 H 上二元函数, 满足内积条件中的(i)、(ii)以及(iii)中 $(x, x)_0\geqslant 0$ $(x\in H)$. 如记 $p(x)=(x, x)_0^{\frac{1}{2}}$. 证明 $p(x)$ 是 H 中的拟范数; $\mathscr{N}(p)=\{x\mid p(x)=0\}$ 是线性空间. 在商空间 $H/\mathscr{N}(p)$ 上规定

$$(\tilde{x}, \tilde{y})=(x, y)_0 \qquad x\in\tilde{x}\in H/\mathscr{N}(p), y\in\tilde{y}\in H/\mathscr{N}(p)$$

证明 $(\cdot\ \cdot)$ 是 $H/\mathscr{N}(p)$ 上的内积.

7. 证明任何内积空间必可完备化成为 Hilbert 空间.

8. 设 $p(t)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上任何非负勒贝格可测的实函数, H 是 $(-\infty, \infty)$ 上勒贝格可测, 并且满足 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 p(t)dt$ 的 $f(t)$ 全体. 证明 H 按通常函数的线性运算以及

$$(f, g)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}p(t)dt, \quad f, g\in H$$

成为 Hilbert 空间.

§2 投影定理

1. 直交和投影 在内积空间中，因为向量之间定义了内积，我们可仿照欧几里得空间引入直交及投影的概念.

定义 设H是内积空间，$(\cdot,\cdot)$是其中的内积. 如果H中两个向量x、y，使$(x,y)=0$，就说x与y**直交**，记作$x\perp y$. 设M是H的子集，当x与M中一切向量y直交时，称x与M直交，记作$x\perp M$. 设M与N是H的两个子集，如果对任何$x\in M$及$y\in N$都有$x\perp y$，就称M与N直交，记作$M\perp N$. 设M是H的子集，H中所有与M直交的向量全体称为M的**直交补**(集)，记为$M^{\perp}$.

从直交的定义，易知有如下性质：

(i) 直交是相互的，即$x\perp y$时，$y\perp x$；

(ii) $x\perp H$的充要条件是$x=0$；

(iii) 当$M\subset N$时，$M^{\perp}\supset N^{\perp}$；

(iv) 对任何$M\subset H$，$M\cap M^{\perp}=\{0\}$；

(v) 勾股弦定理：当$x\perp y$时，

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

引理1 设H是内积空间，$M\subset H$，那末$M^{\perp}$是H的闭线性子空间.

证 如果x_1、$x_2\in M^{\perp}$，那末对任何$y\in M$有$(x_1,y)=(x_2,y)=0$，这时对任何数α_1、α_2，由内积的性质(ii)(见§1)得到

$$(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y)=\alpha_1(x_1,y)+\alpha_2(x_2,y)=0$$

因此$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$与任何$y\in M$直交，即$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\in M^{\perp}$，所以$M^{\perp}$是个线性子空间. 又如果$x_n\in M^{\perp}$，$x_n\to x_0$，那末由内积的连续性，对任何$y\in M$，成立

$$(x_0,y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,y)=0$$

所以 $x_0 \in M^\perp$. 因此 $M^\perp$ 是个闭线性子空间. 证毕.

系 设 $M \subset H$, $\overline{\text{span}}\{M\}$ 是 M 张成的闭线性子空间. 那末 $(\overline{\text{span}}\{M\})^\perp = M^\perp$.

证 因为 $\overline{\text{span}}\{M\} \supset M$, 所以 $(\overline{\text{span}}\{M\})^\perp \subset M^\perp$. 反过来, 如果 $x \in M^\perp$, 即 $x \perp M$, 这时 $M \subset \{x\}^\perp$, 由引理 1, $\{x\}^\perp$ 是闭线性子空间, 所以 $\overline{\text{span}}\{M\} \subset \{x\}^\perp$, 因此 $x \perp \overline{\text{span}}\{M\}$, 这样就得到 $x \in (\overline{\text{span}}\{M\})^\perp$. 可见 $M^\perp \subset (\overline{\text{span}}\{M\})^\perp$, 从而 $M^\perp = (\overline{\text{span}}\{M\})^\perp$ 证毕.

定义 设 H 是内积空间, M_1 及 M_2 是 H 的两个线性子空间. 如果 $M_1 \perp M_2$, 那末称 $M = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in M_1, \ x_2 \in M_2\}$ 为 M_1 与 M_2 的**直交和**, 记做 $M_1 \oplus M_2$.

类似地可以定义有限个线性子空间的直交和.

根据直交的性质(iv), 直交和 $M_1 \oplus M_2$ 必是直接和.

显然(读者自己证明),

(vi) 假定全空间 H 分解为 M_1 与 M_2 的线性和, 则它为直交和的充要条件是 $M_1 = M_2^\perp$, $M_2 = M_1^\perp$.

定义 设 M 是内积空间 H 的线性子空间, $x \in H$, 如果有 $x_0 \in M$, $x_1 \perp M$, 使得

$$x = x_0 + x_1 \tag{2.1}$$

那末称 x_0 是 x 在 M 上的**(直交)投影**或 x 在 M 上的**(投影)分量**.

一般说来, 对于内积空间 H 中的任意向量 x 及任意线性子空间 M, x 在 M 上的投影并不一定存在. 但是如果 x 在 M 上有投影的话, 那末投影必定是唯一的, 因为如果 x_0 及 x_0' 都是 x 在 M 上的投影, 由定义可知 $x_0, x_0' \in M$, $x - x_0 \perp M$, $x - x_0' \perp M$, 因此 $x_0 - x_0'$ 既属于 M, 又与 M 直交, 而与自身直交的元只有零向量, 所以 $x_0 = x_0'$.

投影有下面的重要极值性质:

定理 1 设 M 是内积空间 H 的线性子空间, $x \in H$, 如果 x_0 是 x

在M上的投影，那末

$$\|x-x_0\|=\inf_{y\in M}\|x-y\| \tag{2.2}$$

而且x_0是M中使(2.2)式成立的唯一的向量.

证　因为x_0是x在M上的投影，所以$x_0\in M$，$x-x_0\perp M$. 对于任何$y\in M$，由于$x-y=(x-x_0)+(x_0-y)$，而$x_0-y\in M$，因此$x-x_0\perp x_0-y$，故由"勾股定理"得到

$$\|x-y\|^2=\|x-x_0\|^2+\|x_0-y\|^2\geqslant\|x-x_0\|^2 \tag{2.3}$$

显然(2.3)式中只有在$x_0=y$时才成立等号. 由(2.3)式即知(2.2)式成立，并且(2.2)式中右边的下确界只有在$y=x_0$时达到. 证毕.

定理1说明用M中的元y来逼近x时，当且仅当y等于x在M上的投影x_0时，逼近的程度最好. 因此在随机过程理论和逼近论中常用投影的这个性质来研究最佳逼近.

下面我们要证明当M为H的完备子空间时，H中任何元x在M上的投影必定存在. 因此H可以分解成M与$M^{\perp}$的直交和.

将向量向子空间投影，这在欧几里得空间的解析几何学中也是一种重要的方法. 本章前几节所研究的也正是欧几里得空间中投影理论的拓广，它可以看成Hilbert空间中解析几何学的一部分.

2. 投影定理

引理2（变分引理）　设M是内积空间H中完备①的凸集，$x\in H$. 记d为x到M的距离

$$d=d(x,M)=\inf_{y\in M}\|x-y\|$$

那末必有唯一的$x_0\in M$使得$\|x-x_0\|=d$.

证　由距离的定义，必定有M中点列$\{x_n\}$使得$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=d$. 这样的点列称为"极小化"序列. 下面证明$\{x_n\}$是基本点列. 由

① 指M按H中的距离成为完备的度量空间.

§1 的平行四边形公式(1.7)得到

$$2\left\|\frac{x_m-x_n}{2}\right\|^2=\|x_m-x\|^2+\|x_n-x\|^2-2\left\|\frac{x_m+x_n}{2}-x\right\|^2 \tag{2.4}$$

因为M是凸集, $\frac{x_m+x_n}{2}\in M$, 所以$\left\|\frac{x_m+x_n}{2}-x\right\|\geqslant d$. 由(2.4) 式得到

$$0\leqslant 2\left\|\frac{x_m-x_n}{2}\right\|^2\leqslant\|x_m-x\|^2+\|x_n-x\|^2-2d^2$$

令 $m, n\to\infty$, 就有 $\lim\limits_{m, n\to\infty}\|x_m-x_n\|^2=0$, 所以$\{x_n\}$是基本点列.

因为M是个完备的度量空间, 所以有 $x_0\in M$, 使 $x_n\to x_0$. 这时 $\|x-x_0\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|x-x_n\|=d$.

如果M中还有元 y_0 使$\|x-y_0\|=d$, 那末点列$\{x_0, y_0, x_0, y_0, \cdots\}$显然是"极小化"序列, 因此是基本点列, 这就说明 $x_0=y_0$. 也就是说在M中使$\|x-x_0\|=d$ 的元 x_0 是唯一的. 证毕.

这个变分引理是内积空间的一种极值可达的基本引理. 这里是不用紧性之类条件的, 所以在分析数学中用得很普遍. 例如它在微分方程, 现代控制论等等中都有重要应用(参见[13]). 由于线性子空间是一个凸集, 在本书后面应用这个引理时, 常是用到当M是内积空间的完备的线性子空间时的情况.

引理 3 设H是内积空间, M 是H的线性子空间, $x\in H$, $x_0\in M$, 如果$\|x-x_0\|=d(x, M)$, 那末 $x-x_0\perp M$.

证 任取 $z\in M$, $z\neq 0$, 这时对任何数 λ, 因为 $x_0+\lambda z\in M$, 所以

$$d^2\leqslant\|x-x_0-\lambda z\|^2=\|x-x_0\|^2-2\mathrm{Re}(\bar{\lambda}(x-x_0), z)+|\lambda|^2\|z\|^2 \tag{2.5}$$

令 $\lambda=\frac{(x-x_0, z)}{\|z\|^2}$(这是使(2.5)式右端取极小值的 λ), 就得到

$$d^2 \leqslant \|x-x_0\|^2 - 2\frac{|(x-x_0, z)|^2}{\|z\|^2} + \frac{|(x-x_0, z)|^2}{\|z\|^2}$$

$$= \|x-x_0\|^2 - \frac{|(x-x_0, z)|^2}{\|z\|^2}$$

因为$\|x-x_0\| = d$，所以$(x-x_0, z)=0$. 这就证明了 $x-x_0 \perp M$. 证毕.

由引理 2、3 立即得到下面的

定理 2 (投影定理)　设 M 是内积空间 H 的完备线性子空间，那末对任何 $x \in H$，x 在 M 上的投影唯一地存在. 也就是说有 $x_0 \in M$，$x_1 \perp M$ 使 $x = x_0 + x_1$，而且这种分解是唯一的. 特别，当 $x \in M$ 时，$x_0 = x$.

证　由引理 2 有 $x_0 \in M$，使$\|x-x_0\| = \inf\limits_{y \in M} \|x-y\|$，又由引理 3，$x-x_0 \perp M$，因此记 $x_1 = x-x_0$ 时，x_0、x_1 就满足定理的要求，x_0 就是 x 在 M 上的投影. 唯一性前面已经证明过了. 特别，当 $x \in M$ 时，$\inf\limits_{y \in M} \|x-y\| = 0$，所以 $x_0 = x$. 证毕.

投影定理是 Hilbert 空间理论中极其重要的一个基本定理. 这个定理在一般的 Banach 空间中并不成立. 因为在一般情况下并没有直交概念，即使是性质较好的空间如 $L^p(\Omega, \mathbf{B}, \mu)$和 l^p 等，当 $p \neq 2$ 时，这个定理也不成立. 有了这个定理，在 §5 中我们将看到，可以把 Hilbert 空间中的闭线性子空间与投影算子一一对应起来，而且空间之间的关系与投影算子之间的关系是完全对应的，简直可以把闭线性子空间和投影算子看成一回事.

系 1　设 M 是内积空间 H 中的完备线性子空间，而且 $M \neq H$，那末 $M^{\perp}$ 中有非零元素.

证　由于 $H \neq M$，取 $x \in H-M$，x 在 M 上的投影记为 x_0，这时 $x-x_0 \perp M$，但因 $x \notin M$，$x_0 \in M$，所以 $x-x_0 \neq 0$. 证毕.

容易看出，当 H 是 Hilbert 空间，M 是 H 的闭线性子空间时，

引理 2、3 和定理 2 及系 1 等都成立.

系 2 设 H 是 Hilbert 空间, M 是 H 的线性子空间, 那末 $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$. 特别地, 如果 $M^{\perp}=\{0\}$, 那末 M 在 H 中稠密.

证 由引理 1, $(M^{\perp})^{\perp}$ 是 H 的闭线性子空间, 它也可以看成是一个 Hilbert 空间. 显然 $(M^{\perp})^{\perp}\supset M$, 而 $\overline{M}$ 是包含 M 的最小闭集, 所以 $\overline{M}\subset(M^{\perp})^{\perp}$. 另一方面, 由第四章 §4, $\overline{M}$ 也是 Hilbert 空间 $(M^{\perp})^{\perp}$ 的闭线性子空间. 如果 $\overline{M}\neq(M^{\perp})^{\perp}$, 那末由系 1 必有非零向量 $x\in(M^{\perp})^{\perp}$, 而且 $x\in\overline{M}^{\perp}$. 但 $x\in(M^{\perp})^{\perp}$, 所以 $x\perp x$, 这和 $x\neq 0$ 矛盾. 因此 $(M^{\perp})^{\perp}=\overline{M}$.

系 2 的别证: 根据定理 2、引理 1 及其系,

$$H=\overline{M}\oplus(\overline{M})^{\perp}=\overline{M}\oplus M^{\perp}$$

所以由(vi), $\overline{M}=(M^{\perp})^{\perp}$.

特别当 $M^{\perp}=\{0\}$ 时, $(M^{\perp})^{\perp}=\{0\}^{\perp}=H$, 所以 $\overline{M}=H$. 证毕.

例 1 (最小二乘法) 在实际课题中经常遇到这样的问题: 设有 $n+1$ 个变量 x_0、x_1、…、x_n, 在 m 次观察中它们每次的观察值是 $(x_0^{(j)}, x_1^{(j)}, \cdots, x_n^{(j)})$, $j=1, 2, \cdots, m$. 我们现在要用变量 x_1、x_2、…、x_n 的线性组合近似地表达 x_0, 就是要求出数 α_1、α_2、…、α_n 使得 $x_0^{(j)}-\sum\limits_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu x_\nu^{(j)}$, $j=1, 2, \cdots, m$, 尽可能地小. 我们用这些误差的平方和来作为衡量总误差的标准, 那末问题就归结为求 α_1、α_2、…、α_n, 使

$$\sum_{j=1}^{m}\left(x_0^{(j)}-\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu x_\nu^{(j)}\right)^2=\inf_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_0^{(j)}-\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu x_\nu^{(j)}\right)^2$$

又如在实际问题中常遇到如下的函数逼近论问题: 对于给定的一个较一般的函数 f, 研究用给定的 n 个函数 φ_1、…、φ_n 的线性组合来逼近 f, 使得误差的平方平均值最小. 具体地说, 例如 $f\in L^2[a, b]$, $\varphi_j=x^{j-1}$, $j=1, 2, \cdots, n$, 我们要求出一组数 α_1、α_2、…、

α_n，使误差

$$\left\|f-\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu x^{\nu-1}\right\|=\left(\int_a^b\left|f(x)-\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu x^{\nu-1}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

达到最小．这就是要研究：用 $n-1$ 次多项式 $p=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu x^{\nu-1}$ 来逼近 f 时，怎样的多项式使逼近的误差最小．误差达到最小的多项式就称为按平方平均最佳逼近多项式．求这种多项式的问题就称为按平方平均最佳逼近问题．类似地还有用三角多项式，或阶梯函数，或样条函数来逼近给定函数的按平方平均最佳的逼近问题．

在概率论，特别是随机过程理论中也有类似的问题．设 $(\Omega, \boldsymbol{R}, P)$ 是一个测度空间，$\boldsymbol{R}$ 是 σ-代数，而且 $P(\Omega)=1$，这时称 $(\Omega, \boldsymbol{R}, P)$ 为概率测度空间，P 称为概率测度．$(\Omega, \boldsymbol{R})$ 上的可测函数称为一个随机变量．设 X 和 X_1、X_2、…、X_n 是 $L^2(\Omega, \boldsymbol{R}, P)$ 中给定的 $n+1$ 个随机变量，在概率论中，常要求出 n 个数 α_1、…、α_n 使二阶矩

$$\left\|X-\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu X_\nu\right\|^2=\left(\int_\Omega\left|X(\omega)-\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu X_\nu(\omega)\right|^2dP(\omega)\right)$$

达到最小．这是用 X_1、…、X_n 的线性组合来估计 X 的最佳估值问题．

所有上述类似问题都可以抽象成如下的问题：

设 H 是内积空间，x、x_1、x_2、…、x_n 是 H 中 $n+1$ 个向量，要求出 n 个数 α_1、α_2、…、α_n 使得 $\left\|x-\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu x_\nu\right\|=\min_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}\left\|x-\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu x_\nu\right\|$．

这个问题的解法如下：我们不妨设 x_1、…、x_n 是线性无关的，不然的话，只要从 x_1、x_2、…、x_n 中取出 $k(k\leqslant n)$ 个线性无关向量，譬如 $\{x_1, \cdots, x_k\}$，使得其余的都是这 k 个向量的线性组合，这时我们只要考虑 x_1、…、x_k 的线性组合好了．令 M 表示 x_1、…、x_n 的线

性组合全体所成的 n 维线性空间，根据第四章 § 9，M 是完备的，因此由引理 2 必有 $x_0=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu x_\nu\in M$ 使得 $\|x-x_0\|$ 达到最小，由引理 3

$$(x-x_0, y)=0 \qquad y\in M$$

这显然等价于

$$(x-x_0, x_\mu)=0 \qquad \mu=1, 2, \cdots, n$$

而这就是代数方程组

$$\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu(x_\nu, x_\mu)=(x, x_\mu) \qquad \mu=1, 2, \cdots, n$$

由于引理 2，达到最小的 α_1、α_2、$\cdots$、α_n 是唯一的，所以上述代数方程组的解是唯一的，因此方程组的系数行列式不等于 0. 因而解就是

$$\alpha_\nu=\frac{\begin{vmatrix}(x_1, x_1)\cdots(x, x_1)\cdots(x_n, x_1)\\(x_1, x_2)\cdots(x, x_2)\cdots(x_n, x_2)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(x_1, x_n)\cdots(x, x_n)\cdots(x_n, x_n)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(x_1, x_1)\cdots(x_\nu, x_1)\cdots(x_n, x_1)\\(x_1, x_2)\cdots(x_\nu, x_2)\cdots(x_n, x_2)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(x_1, x_n)\cdots(x_\nu, x_n)\cdots(x_n, x_n)\end{vmatrix}}, \qquad \nu=1, 2, \cdots, n$$

习　题

1. 证明直交的性质(i)—(vi).

2. 设 H 是内积空间，N 是 H 的线性子空间，证明：当 N 是完备时，$N=(N^\perp)^\perp$

3. 设 H 是内积空间，M、$N\subset H$. 设 L 是 M 和 N 张成的线性子空间，证明 $L^\perp=M^\perp\cap N^\perp$.

4. 设 $(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)})$, $i=1, 2, \cdots, m$ 是已知实数组. 利用投影定理

求实数 α_1、…、α_n 使得

$$\sum_{i=1}^{m}\left(x^{(i)}-\sum_{j=1}^{n}x_j^{(i)}\alpha_j\right)^2$$

达到极小.

定义 设 H 是复线性空间, $[\cdot,\cdot]$ 是 H 上二元函数, 并且是双线性厄米泛函(即满足内积的(i)、(ii)要求), 称 $(H,[\cdot,\cdot])$ 为**拟不定内积空间**. 设 $x\in H$, 如果分别满足 $[x,x]>0$、$[x,x]<0$、$[x,x]=0$, 那末分别称 x 为**正性**、**负性**、**零性(或迷向)向量**; L 是 H 的线性子空间, 如果 L 中一切向量都是正性(或负性、或零性), 那末称 L 是 H 的**正的(或负的、或零性的)子空间**; 如果 L 中一切 x 都满足 $[x,x]\leqslant 0$(或 $[x,x]\geqslant 0$), 那末称 L 是 H 的**半负的(或半正的)子空间**.

5. 设 $(H,[\cdot,\cdot])$ 是拟不定内积空间, L 是 H 的半负(或半正)子空间. 证明(i) 对任何 x、$y\in L$, 下面的 Schwarz 不等式成立.

$$|[x,y]|\leqslant[x,x][y,y]$$

(ii) 当 L 不是半负(或半正)子空间, 而是一般线性子空间时, 举例说明上面Schwarz 不等式不成立.

定义 设 $(H,[\cdot,\cdot])$ 是复的拟不定内积空间, x、$y\in H$, 如果 $[x,y]=0$, 称 x、y 相互直交, 记为 $x\perp y$. (同样可定义集 M、N 相互直交, 记为 $M\perp N$; 而 $M^\perp=\{y\mid y\in H,[y,x]=0, x\in M\}$).

6. 证明(i)在拟不定内积空间 $(H,[\cdot,\cdot])$ 中, $L_0=\{x\mid[x,y]=0, y\in H\}$ 必是 H 的零性子空间.

(ii) 在商空间 H/L_0 上引入不定内积: 对任何 $\tilde{x}$、$\tilde{y}\in H/L_0$,

$$[\tilde{x},\tilde{y}]_\sim=[x,y],\quad x\in\tilde{x},\ y\in\tilde{y}$$

证明 H/L_0 在 $[\cdot,\cdot]_\sim$ 下成为拟不定内积空间, 并且不存在非零 $\tilde{x}\in H/L_0$, 使得 $[\tilde{x},\tilde{y}]_\sim=0$ 对一切 $\tilde{y}\in H/L_0$ 成立.

定义 设 $(H,[\cdot,\cdot])$ 是拟不定内积空间, L 是 H 的线性子空间, 如果 $L\cap L^\perp=\{0\}$(这里"$\perp$"是按不定内积直交), 称 L 是 H 的**非退化**子空间. 如果 H 本身是非退化的, 称 H 是**不定内积空间**.

7. 设 $(H,[\cdot,\cdot])$ 是不定内积空间, M、N 是两个线性子空间, 并且 $H=M+N$. 如果 $M\perp N$. 证明线性和 $M+N$ 必是直接和 $M\dot{+}N$, 并且 $M^\perp=N$, $N^\perp=M$. 从而 $M^{\perp\perp}=M$, $N^{\perp\perp}=N$(此地"$\perp$"均按不定内积 $[\cdot,\cdot]$ 直交的意思).

8. 设 L 是不定内积空间 $(H, [\cdot,\cdot])$ 的一个线性子空间，并且是半正的（或半负的）。证明：如果 L 中有零性向量 z，那末 z 必按 $[\cdot,\cdot]$ 与 L 直交。

9. 设 L 是不定内积空间 $(H, [\cdot,\cdot])$ 中一个有限维线性子空间，并且是正（或负）子空间，那末

(i) 对任何 $x\in H$，必存在 $x_0\in L$，使得

$$[x-x_0, x-x_0]=\inf_{y\in L}\{[x-y, x-y]\}$$
$$(\text{或}[x-x_0, x-x_0]=\sup_{y\in L}\{[x-y, x-y]\})$$

(ii) 对于(i)中的 x_0，有 $x-x_0\perp L$（从而 $H=L\oplus L^{\perp}$，这里"$\oplus$"是直接、直交和）

举例说明，当 L 是半负（或半正）子空间时，(i)、(ii)未必成立。

（注　习题 9 可以推广到 L 是无限维线性子空间情况，但需补充假设：当 L 为正（或负）子空间时，L 按 $[\cdot,\cdot]$（或 $-[\cdot,\cdot]$）成为 Hilbert 空间）

10. 设 $(H, [\cdot,\cdot])$ 是不定内积空间，L 是负子空间，如果 $\sup\limits_{L\subset H}\{\dim L\}=k<\infty$。证明(i) H 中任何负子空间 L_1 必可扩充成极大负子空间，即存在负子空间 L'，使得 $L'\supset L$，并且不能在 L' 上增加新的负性向量 x，使 $\mathrm{span}\{L, x\}$ 成为负子空间（提示：用习题 9）

(ii) $\dim L'=k$.

(iii) $L'^{\perp}$ 必是正子空间，并且 $H=L'\oplus L'^{\perp}$.

§3 内积空间中的直交系

§2 中证明了：在内积空间 H 上，一个向量 x 在完备线性子空间 M 上的投影 x_0 是达到极值 $\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$ 的向量。这一节将提供如何具体求出 x_0 的有效方法。

1. 就范直交系　类似于欧几里得空间中的直交坐标系，在内积空间中可引入直交系的概念，它也是数学分析中直交函数系概念的拓广。

定义　设 $\mathscr{F}$ 是内积空间 H 中的一族非零向量，如果 $\mathscr{F}$ 中任何两个不同向量都直交，就称 $\mathscr{F}$ 是 H 中的一个**直交系**。如果直交系

$\mathscr{F}$中每个向量的范数都是 1, 就称$\mathscr{F}$是**就范直交系**.

例 1　在 n 维欧几里得空间 E^n 中

$$e_1=(1,0,0,\cdots,0),\ e_2=(0,1,0,\cdots,0),\ \cdots,\ e_n=(0,0,0,\cdots,1)$$

组成就范直交系.

例 2　在实空间 $L^2[0,2\pi]$中, 规定内积为

$$(f,g)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx,\ (f(x)、g(x)\in L^2[0,2\pi])$$

这时$\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\cdots$, $\cos nx$, $\sin nx$, $\cdots$组成 $L^2[0,2\pi]$中的就范直交系①.

由定义立即可知, 如果$\mathscr{F}$是内积空间H中的直交系(就范直交系), 那末$\mathscr{F}$的任何子集也是H中的直交系(就范直交系).

在数学分析中, 我们曾见到过富里埃(Fourier)级数, 对于函数 $f(x)\in L^2[0,2\pi]$, 我们称

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx=(f,1)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx=(f,\cos nx)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx=(f,\sin nx)$$

为函数 $f(x)$关于三角函数系的 Fourier 系数.

这个概念可以作如下的推广:

定义　设$\mathscr{F}$是内积空间 H 中的就范直交系, $x\in H$, 数集

$$\{(x,e)\,|\,e\in\mathscr{F}\}$$

称为向量 x 关于就范直交系$\mathscr{F}$的 Fourier 系数集, 而数(x,e)称为

---

① 对于复 $L^2[0,2\pi]$, 只要规定

$$(f,g)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

也是正确的.

x 关于 $e(\in\mathscr{F})$的 Fourier 系数①.

例 3 如果一列函数 $\{e_n(t)\}(n=1, 2, 3, \cdots)$ 都属于复空间 $L^2[a, b]$, 而且

$$\int_a^b e_n(t)\overline{e_m(t)}\,dt=\delta_{nm} \qquad (n, m=1, 2, \cdots)$$

那末$\{e_n\}$是 $L^2[a, b]$ 中的就范直交系, 这时 $x\in L^2[a, b]\,(x=x(t))$ 关于 e_n 的 Fourier 系数就是

$$a_n=(x, e_n)=\int_a^b x(t)\overline{e_n(t)}\,dt \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

特别地, $\{e^{i2\pi nt}\}(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$是复 Hilbert 空间 $L^2[0, 1]$ 中的就范直交系, 对于 $f\in L^2[0, 1]$, 它的 Fourier 系数为

$$c_n=\int_0^1 f(t)e^{-i2\pi nt}\,dt \qquad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

引理 1 设$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$是内积空间 H 中的就范直交系, $M=\text{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$. $x\in H$, 那末 $x_0=\sum_{i=1}^n(x, e_i)e_i$ 是 x 在 M 上的投影, 而且 $\|x_0\|^2=\sum_{i=1}^n|(x, e_i)|^2$, $\|x-x_0\|^2=\|x\|^2-\|x_0\|^2$.

证 显然, $x_0=\sum_{i=1}^n(x, e_i)e_i\in M$, 而且$(x_0, e_i)=(x, e_i)$, $(i=1, 2, \cdots, n)$, 因此向量 $x-x_0$ 与$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$直交, 所以 $x-x_0\perp M$. 故 x_0 是 x 在 M 上的投影. 又由于 e_1、e_2、$\cdots$、e_n、$x-x_0$ 是两两直交的, 由勾股定理即知

---

① 对于例 2 中三角函数组成的就范直交系来说, 按这里的定义, f 关于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的 Fourier 系数为 $\left(f, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, 与数学分析中的相应的 Fourier 系数 $a_0=(f, 1)$ 相差一常数因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 但对于其余的各项 $\cos nt$, $\sin nt\,(n\neq0)$的 Fourier 系数, 这里的定义和数学分析中的完全一致.

$$\|x_0\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|(x, e_i)e_i\|^2=\sum_{i=1}^{n}|(x, e_i)|^2$$

$$\|x\|^2=\|(x-x_0)+x_0\|^2=\|x-x_0\|^2+\|x_0\|^2$$

$$=\|x-x_0\|^2+\sum_{i=1}^{n}|(x, e_i)|^2$$

因此，$\|x-x_0\|^2=\|x\|^2-\|x_0\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(x, e_i)|^2$. 证毕.

引理 1 表明：如果M是内积空间中有限维线性子空间（它必是完备的），这时只要在M中选个数为 $\dim M$ 的就范直交向量$\{e_1, \cdots, e_n\}$ $(n=\dim M)$. 那末，任何 $x\in H$，在 M 上投影 x_0 就是 $\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i$. 特别，当$M$是一维子空间$\{\alpha e\}$（$\alpha$ 是数）时，如取$\|e\|=1$，那末 x 在M上投影是 $x_0=(x, e)e$.

系 1　设$\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是内积空间H中就范直交系，那末对 $x\in H$，

$$\sum_{i=1}^{n}|(x, e_i)|^2\leqslant\|x\|^2 \tag{3.1}$$

系 2　设$\{e_1, \cdots, e_n\}$是内积空间H中就范直交系，$x\in H$，那末对任何 n 个数 α_1、α_2、$\cdots$、α_n，

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|\geqslant\left\|x-\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i\right\| \tag{3.2}$$

而且当(3.2)式等号成立时必定 $\alpha_i=(x, e_i)$.

证　由于 $x_0=\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i$ 是 x 在M上的投影，由 §2 的定理 1 即得系 2.

下面推广上述有限维M到无限维情况.

定理 1 (贝塞尔(Bessel)不等式) 设 $\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$[1]是内积空间$H$中的就范直交系，那末对每个 $x\in H$，x 的 Fourier 系数$\{(x, e_\lambda)|\lambda\in\Lambda\}$ 中最多只有可列个不为零而且适合 Bessel 不等式[2]：

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2\leqslant\|x\|^2 \tag{3.3}$$

证 如果 Λ 是有限集，那末(3.1)式就是 Bessel 不等式. 如果 Λ 是可列集，$\mathscr{F}$是由一列元 e_1、e_2、…、e_n、…所成的就范直交系. 这时对任何自然数 n，(3.1)式成立，令 $n\to\infty$，就得到(3.3)式.

对于 Λ 是不可列集的情况，由于(3.1)式成立，所以当 x 固定时，对任何自然数 n，$\mathscr{F}$ 中使$|(x, e_\lambda)|\geqslant\frac{1}{n}$的向量 e_λ 也只能是有限个. 记 $\mathscr{F}_n=\left\{e_\lambda, \lambda\in\Lambda, \ |(x, e_\lambda)|\geqslant\frac{1}{n}\right\}$ (这里 $\mathscr{F}_n$ 是依赖于 x 的)，并记$\hat{\mathscr{F}}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$，可见 $\hat{\mathscr{F}}$ 至多是可列集，而当 $e_\lambda\in\mathscr{F}-\hat{\mathscr{F}}$ 时，$(x, e_\lambda)=0$. 因此

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2=\sum_{e_\lambda\in\hat{\mathscr{F}}}|(x, e_\lambda)|^2\leqslant\|x\|^2$$

证毕.

系 设$\{e_n\}$是内积空间H中的就范直交系，那末对任何 $x\in H$，必有$\lim\limits_{n\to\infty}(x, e_n)=0$.

证 由定理 1 知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2$ 收敛，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}(x, e_n)=0$.

这个系在 $L^2[0, 2\pi]$中用于就范直交三角函数系 (见例 1)的情况下，就是黎曼–勒贝格引理.

---

① 这里Λ表示指标集.

② 由于这里 Λ可能是不可列集，因此(3.3)式隐含这样的意思：使$|(x, e_\lambda)|^2>0$的 $\lambda\in\Lambda$ 最多只有可列个. $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2$ 表示对 Λ 中使$|(x, e_\lambda)|^2>0$ 的 λ 求和.

Bessel 不等式表示向量在 $\mathscr{F}$ 中每个就范向量 e_λ 上投影 $(x, e_\lambda)e_\lambda$ 的“长度”平方的和不超过 x 的“长度”平方.

2. 直交系的完备性　为了研究 Bessel 不等式(3.3)什么时候成为等式, 引入下面的定义.

定义　设$\{e_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$是内积空间$H$中就范直交系, 如果对任何 $x\in H$, 成立下列巴塞伐尔(Parseval)等式

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2 \tag{3.4}$$

称直交系$\{e_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$是$H$中**完备直交系**.

如果向量 x 对于就范直交系 $\{e_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$成立(3.4)式, 就称 x 关于 $\{e_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$ 完备公式成立. 这个公式相当于有限维空间上勾股定理的推广.

设$\{e_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$是内积空间$H$中就范直交系, 又$\{\alpha_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$是一族数, 如果$\{\alpha_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$ 中最多只有可列个不是零. 例如 $\alpha_\nu\neq 0(\nu=1, 2, \cdots)$. 并且$\sum\limits_{\nu}|\alpha_\nu|^2<\infty$, 这时由

$$\left\|\sum_{\nu=n}^{m}\alpha_\nu e_\nu\right\| = \sum_{\nu=n}^{m}|\alpha_\nu|^2$$

易知$\left\{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu e_\nu\right\}$是$H$中基本点列. 如果存在 $y\in H$, 使得

$$y = \sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu e_\nu = \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu e_\nu$$

那末称$\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda e_\lambda$ 是收敛的, y 是它的极限. 这时就记$y=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda e_\lambda$.

定义　设 $\mathscr{F}=\{e_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$是内积空间$H$中的就范直交系, 对 $x\in H$, 形式级数$\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda$(不管它是否收敛)称为向量 x 关于$\mathscr{F}$的

Fourier 级数，或 Fourier 展开式. 当 $x=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$ 成立时，就称 x 关于$\mathscr{F}$**可以展开成 Fourier 级数**.

当 x 关于$\mathscr{F}$可以展开成 Fourier 级数时，展开式 $x=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$ 的几何意义就是向量 x 等于它在$\mathscr{F}$的每个 e_λ 方向的分量 $(x,e_\lambda)e_\lambda$（根据 Bessel 不等式，最多只有可列个分量不是零）的和.

定理 2 设 $\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是内积空间 H 中的就范直交系，E 为$\mathscr{F}$张成的线性闭子空间，那末对于 $x\in H$，下面三件事是等价的：(i) $x\in E$. (ii) $\|x\|^2=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2$. (iii) $x=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$.

证 (i)→(ii)：由 Bessel 不等式有 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2\leqslant\|x\|^2$. 如果 Parsevl 等式不成立，必有某 $x\in E$，使得

$$\|x\|^2-\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2=a^2>0\qquad(a>0)$$

但是 $x\in E$，因此 x 必是$\mathscr{F}$中有限个向量的线性组合的极限. 对于 a，总有有限个向量 e_1、…、$e_n\in\mathscr{F}$，以及数 α_1、…、α_n，使得 $\left\|x-\sum\limits_{i=1}^n\alpha_ie_i\right\|<a$. 根据引理 1 的系 2 及引理 1，又有

$$\begin{aligned}a^2>\left\|x-\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i\right\|^2&\geqslant\left\|x-\sum_{i=1}^n(x,e_i)e_i\right\|^2\\&=\|x\|^2-\sum_{i=1}^n|(x,e_i)|^2\geqslant\|x\|^2-\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2=a^2\end{aligned}$$

显然，这不可能，所以(ii)成立.

(ii)→(iii)：已知 $\|x\|^2=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2$，记 $\{(x,e_\lambda)\}$ 中不是零的数为 $\{(x,e_\nu)\}$，它最多是可列集. 对任何自然数 n，由引理 1，

$$\left\|x-\sum_{\nu=1}^n(x,e_\nu)e_\nu\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{\nu=1}^n|(x,e_\nu)|^2\qquad(3.5)$$

当 $n\to\infty$ 时，(3.5)式右边

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|x\|^2-\sum_{\nu=1}^{n}|(x,e_\nu)|^2\right)=\|x\|^2-\sum_{\nu=1}^{\infty}|(x,e_\nu)|^2$$

$$=\|x\|^2-\sum_{\lambda\in\varLambda}|(x,e_\lambda)|^2=0$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x-\sum\limits_{\nu=1}^{n}(x,e_\nu)e_\nu\right\|=0$，即

$$x=\sum_{\nu=1}^{\infty}(x,e_\nu)e_\nu=\sum_{\lambda\in\varLambda}(x,e_\lambda)e_\lambda.$$

(iii)→(i)：已知 $x=\sum\limits_{\lambda\in\varLambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$，显然 x 是 $\mathscr{F}$ 中有限个向量线性组合的极限，即 $x\in E$. 证毕.

系 内积空间 H 中就范直交系 $\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\varLambda\}$ 是完备的充要条件是 $\mathscr{F}$ 张成的闭线性子空间 $E=H$. 或者充要条件是对任何 $x\in H$，成立

$$x=\sum_{\lambda\in\varLambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$$

系 2（斯切克洛夫（Стеклов）） 设 $\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\varLambda\}$ 是内积空间 H 中就范直交系，如果有 H 中的稠密子集 D，使得对于 $x\in D$ 都成立 Parseval 等式 $\|x\|^2=\sum\limits_{\lambda\in\varLambda}|(x,e_\lambda)|^2$，那末 $\mathscr{F}$ 是完备的.

证 记 E 为 $\mathscr{F}$ 张成的闭线性子空间，由于 D 中向量都成立 Parseval 等式，所以 $D\subset E$. 但因为 E 是闭的，所以 $\bar{D}\subset E$. 由假设 $\bar{D}=H$，所以 $E=H$. 由系 1，$\mathscr{F}$ 是完备的. 证毕.

如果 $\{e_\lambda|\lambda\in\varLambda\}$ 是内积空间 H 中完备就范直交系，那末对一切 x、$y\in H$，$x=\sum\limits_{\lambda\in\varLambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$，$y=\sum\limits_{\lambda\in\varLambda}(y,e_\lambda)e_\lambda$. 由此易知 $(x,y)=$

$\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)\overline{(y, e_\lambda)}$. 这个等式也称为 Parseval 等式.

例 2(继续) $L^2[0, 2\pi]$中的就范直交系$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \sin t, \cdots, \cos nt, \sin nt, \cdots\right\}$是完备的.

证 令$\mathscr{T}$为$L^2[0, 2\pi]$中三角多项式全体, 对于每个$T\in\mathscr{T}$, 当$T=a_0'\frac{1}{\sqrt{2}}+\sum\limits_{n=1}^{N}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$时, 易知$T$的 Fourier 系数是$a_0'$、$a_n$、$b_n(n=1, 2, \cdots, N)$, 而其余的 Fourier 系数为零, 直接验算可知对T成立 Parseval 等式. 根据定理 2 系 2, 我们只要证明$\mathscr{T}$在$L^2[0, 2\pi]$中稠密就可以了.

事实上, 对任何$f\in L^2[0, 2\pi]$及$\varepsilon>0$, 由第四章 §6 习题 6 知道存在$\varphi\in C_{2\pi}$, 使得

$$\|f-\varphi\|=\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f-\varphi|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{2} \tag{3.6}$$

又根据数学分析(或第四章 §6 习题5)知道, 对于给定的$\varphi\in C_{2\pi}$及$\varepsilon>0$, 一定存在一个三角多项式$T(t)$, 使得

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|T(t)-\varphi(t)|<\frac{\varepsilon}{4} \tag{3.7}$$

由(3.6)及(3.7)立即得到

$$\|f-T\|\leqslant\|f-\varphi\|+\|\varphi-T\|<\varepsilon$$

即三角多项式全体$\mathscr{T}$在$L^2[0, 2\pi]$中稠密, 所以$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \sin t, \cdots, \cos nt, \sin nt, \cdots\right\}$是$L^2[0, 2\pi]$中的完备就范直交系. 证毕.

根据定理 2, 对任何$f\in L^2[0, 2\pi]$, 成立着

$$f=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt) \tag{3.8}$$

(3.8)式的右边级数正是数学分析中所说的f的 Fourier 级数. 必

须注意，这里(3.8)式右边级数的部分和是按照 Hilbert 空间$L^2[0,2\pi]$中范数收敛于f，换句话说，f的 Fourier 级数的部分和平方平均收敛于f. 按定义，这并不就是意味着级数下式成立：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\right]\doteq f(t) \tag{3.9}$$

早在 1913 年，鲁津就猜测(3.9)式成立(参看[6]). 这个猜测一直是三角级数中一个重要的课题. 柯莫哥洛夫 (Колмогоров) 1923 年给出一个$f\in L^1[0,2\pi]$，但它的 Fourier 级数①是几乎处处发散的. 1926 年他又给出$f\in L^1[0,2\pi]$，而f的 Fourier 级数是处处发散的. 后来一段时间人们对于鲁津的猜测较多地从否定的方面去考虑，到 1966 年，L. Carleson 证明了鲁津的猜测是正确的(参看[3])，紧接着在 1967 年，R. A. Hunt 证明：对于$L^p[0,2\pi]$ $(p>1)$中函数，它的 Fourier 级数也是几乎处处收敛的. 这方面的结果是三角级数理论的一个重要突破.

定理 3　设$\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是内积空间$H$中的就范直交系，$\mathscr{F}$张成的闭线性子空间为$E$. 对任何$x\in H$，如果$x$在$E$中有投影$x_0$，那末$x_0$就是$x$的 Fourier 级数$\sum\limits_{\lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$. 如果$H$是Hilbert 空间，那末对任何$x\in H$，$\sum\limits_{\lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$就是$x$在$E$上的投影.

证　如果$x\in H$，在E上x有投影x_0，那末由$x_0\in E$，便有

$$x_0=\sum_{\lambda}(x_0,e_\lambda)e_\lambda$$

---

① 只要$f(t)$是$[0,2\pi]$上勒贝格可积函数，就可以作出级数

$$\sigma(f,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

其中$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt$，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos nt dt$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin nt dt$. 级数$\sigma(f,t)$称为$f$的 Fourier 级数.

又因为x_0是x在E上的投影，所以$x-x_0\perp E$，从而$x-x_0\perp e_\lambda(\lambda\in\Lambda)$，即$(x, e_\lambda)=(x_0, e_\lambda)$。这样便得到

$$x_0=\sum_\lambda (x, e_\lambda)e_\lambda$$

当H是Hilbert空间时，H的闭子空间E就是完备的。由§2定理2，对任何$x\in H$，x必在E上有投影，从而x在E上投影就是$\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda$。证毕。

定理 4（黎斯-费啸(Riesz-Fischer)） 设$\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是Hilbert空间$H$中的就范直交系，$\mathscr{F}$张成的闭线性子空间为$E$。又设$\{c_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是一族数，并且$\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|c_\lambda|^2<\infty$。那末必有唯一的$x\in E$，$x$是以$\{c_\lambda\}$为关于$\{e_\lambda\}$的Fourier系数，且$x=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}c_\lambda e_\lambda$。

证 由于$\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|c_\lambda|^2<\infty$，所以最多只有可列个$\{c_\nu\}$不为零。作序列$x_n=\sum\limits_{\nu=1}^{n}c_\nu e_\nu$，$n=1, 2, \cdots$，易知当$n<m$时，

$$\|x_n-x_m\|^2=\left\|\sum_{n+1}^{m}c_\nu e_\nu\right\|^2=\sum_{n+1}^{m}|c_\nu|^2$$

由于$\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|^2<\infty$，故$\lim\limits_{m, n\to\infty}\|x_n-x_m\|^2=0$，因此$\{x_n\}$是基本点列。因为$H$是完备的，故有$x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。$x\in E$是显然的。而对于任何自然数$\nu$，$(x, e_\nu)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, e_\nu)=c_\nu$。而当$e_\lambda\neq e_\nu(\nu=1, 2, \cdots)$时，因为$(x_n, e_\lambda)=0$，所以$(x, e_\lambda)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, e_\lambda)=0=c_\lambda$，从而对一切$\lambda\in\Lambda$，$(x, e_\lambda)=c_\lambda$。唯一性由定理3即知。证毕。

3. 直交系的完全性

定义 设$\mathscr{F}$是内积空间H中的就范直交系，如果$\mathscr{F}^\perp=\{0\}$，那

末就称$\mathscr{F}$是**完全的**.

由定义可知,$\mathscr{F}$是完全的,就是说在H中不存在与$\mathscr{F}$直交的非零向量. 因此,它的意思就是直交系$\mathscr{F}$已经不能再扩大了,即$\mathscr{F}$是H中极大的(就范)直交系.

定理 5　设$\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是内积空间$H$中的就范直交系, 如果$\mathscr{F}$是完备的,那末$\mathscr{F}$是完全的. 如果$H$是 Hilbert 空间, 那末完全的就范直交系必定是完备的.

证　如果$\mathscr{F}$是完备的,那末对任何$x\in H$,成立

$$x=\sum_\lambda (x, e_\lambda)e_\lambda$$

因此,如果$x\perp\mathscr{F}$,必定$x=0$,所以$\mathscr{F}$是完全的.

反过来,如果H是 Hilbert 空间,$\mathscr{F}$是完全的. 记$\mathscr{F}$张成的闭线性子空间为E,这时E是完备的. 由 §2 定理 2 系 1, 如果$E\neq H$,那末有非零向量x与E直交,这时与$\mathscr{F}$的完全性相矛盾. 因此$E=H$,这就证明了$\mathscr{F}$的完备性(见定理 2 的系 1). 证毕.

例 4　在实$L^2[0,2\pi]$中, 记$\mathscr{F}=\{\cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cdots, \cos nt, \sin nt, \cdots\}$. 又记$f_0=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\cos nt+\sin nt)$. 由 Riesz-Fischer 定理,$f_0\in L^2[0,2\pi]$,记$H$是由$\{f_0\}\cup\mathscr{F}$所张成的线性子空间,也就是说

$$H=\{\alpha_0 f_0+\sum_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu\cos\nu t+\beta_\nu\sin\nu t)\,|\,n>0, \alpha_0、\alpha_\nu、\beta_\nu\ (\nu=1,2,\cdots,n)\text{是数}\}$$

按照$L^2[0,2\pi]$的运算及内积,H是一个内积空间. $\mathscr{F}$显然是H中的就范直交系. $\mathscr{F}$在H中是完全的. 因为如果$f\in H, f\perp\mathscr{F}$, 那末由$H$的定义,有$\alpha_0、\alpha_\nu、\beta_\nu(\nu=1,2,\cdots,n)$使得

$$f=\alpha_0 f_0+\sum_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu\cos\nu t+\beta_\nu\sin\nu t)$$

取 $m>n$, 得到 $0=(f,\cos mt)=\frac{\alpha_0}{m}$, 因此

$$f=\sum_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu\cos\nu t+\beta_\nu\sin\nu t)$$

同样, 对于 $m\leqslant n$, $0=(f,\cos mt)=\alpha_m$, $0=(f,\sin mt)=\beta_m$. 这就得到 $f=0$, 也就是$\mathscr{F}$在H中是完全的. 但是

$$\|f_0\|^2=2+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{\nu^2}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(|(f_0,\cos\nu t)|^2+|(f_0,\sin\nu t)|^2)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2}{\nu^2}$$

这两者不相等, 所以$\mathscr{F}$在H中并不是完备的.

我们记$\mathscr{F}$张成的H的闭线性子空间为E, 由于对 f_0 完备公式不成立, 所以 $f_0\overline{\in}E$. 这时 f_0 在 E 上就没有投影, 因为如果 f_0 在 E 上有投影 x_0, 那末 $f_0-x_0\perp E$. 所以 $f_0-x_0\perp\mathscr{F}$, 但是$\mathscr{F}$是完全的, 所以 $f_0-x_0=0$, 这样 $f_0=x_0\in E$, 就导致矛盾.

因此, 确实有这样的内积空间, 其中有不完备的完全就范直交系. 而且有这样的内积空间, 其中并非任何向量在任何闭子空间上都有投影.

4. 线性无关向量系的直交化

在 Hilbert 空间中, 利用直交系, 可以迅速作出 x 关于就范直交系$\mathscr{F}$的 Fourier 级数 $x_0=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$, 即很快就能找到达到极值 $\inf_{y\in E}\|x-y\|$(此地 E 是由$\mathscr{F}$张成的闭线性子空间)的向量 x_0. 假如先给定一个闭线性子空间 E, 如何能找出张成 E 的直交系$\mathscr{F}$呢? 这节中将提供一个普通的方法.

引理 2　(格拉姆-许密特(Gram-Schmidt))　设 $G=\{g_1, g_2, g_3, \cdots\}$ 是内积空间 H 中有限个或可列个线性无关的向量，那末必定有 H 中的就范直交系 $\mathscr{F}=\{h_1, h_2, h_3, \cdots\}$ 使得对于每个自然数 n[①]，g_n 是 h_1、h_2、$\cdots$、h_n 的线性组合，h_n 也是 g_1、g_2、$\cdots$、g_n 的线性组合。这种 h_n 除去一个绝对值为 1 的常数因子外，由 g_1、g_2、$\cdots$、g_n 完全确定.

证　我们不妨只考虑 G 是可列个向量的情况. 利用数学归纳法. 根据 g_1、g_2、g_3、$\cdots$、g_n、$\cdots$ 我们作 h_1、h_2、$\cdots$、h_n、$\cdots$ 如下：首先作 $h_1=\frac{g_1}{\|g_1\|}$，设当 $n\geqslant 2$ 时就范直交向量组 h_1、$\cdots$、h_{n-1} 已作好，而且 g_1、$\cdots$、g_{n-1} 与 h_1、$\cdots$、h_{n-1} 张成相同的 $n-1$ 维空间 M_{n-1}. 记 g_1、$\cdots$、g_n 张成的 n 维线性空间是 M_n. 由于 $g_n\overline{\in} M_{n-1}$，$g_n$ 在 M_{n-1} 上的投影[②]记为 x_{n-1}，$g_n-x_{n-1}\neq 0$. 记 $h_n=\frac{g_n-x_{n-1}}{\|g_n-x_{n-1}\|}$. 由作法，可知 h_n 是 g_1、g_2、$\cdots$、g_n 的线性组合，h_n 与 g_1、g_2、$\cdots$、g_{n-1} 直交，$\|h_n\|=1$. 所以 h_1、h_2、$\cdots$、h_n 是就范直交系. 由于 h_1、$\cdots$、$h_n\in M_n$，而且它们是线性无关的(见 §1 习题 5)，因此是 M_n 的一组基，所以 g_n 可以用 h_1、h_2、$\cdots$、h_n 线性表出. 因此由归纳法作出一列 h_1、h_2、$\cdots$，它们满足引理的要求.

如果 α_1、α_2、$\cdots$ 是一列绝对值为 1 的数，那末 $\alpha_1 h_1$、$\alpha_2 h_2$、$\cdots$、$\alpha_n h_n$，$\cdots$ 仍是就范直交系，它显然仍满足引理的要求.

另一方面，如果 h_1'、h_2'、h_3'、$\cdots$ 是满足引理要求的任一就范直交系，那末对每个 n，h_1'、$\cdots$、h_n' 张成的线性子空间就是 M_n，因此 h_n' 也和 h_1'、$\cdots$、h_{n-1}' 张成的 M_{n-1} 直交. 因此 h_n' 按 M_n 中就范直交系 h_1、$\cdots$、h_n 展开时，$h_n'=(h_n', h_n)h_n$. 由 $\|h_n\|=\|h_n'\|=1$ 可知 h_n'

---

① 当 G 只有 m 个向量时，要求 $n\leqslant m$.

② 由于 M_{n-1} 是有限维的空间，因而是完备的(见第四章 §9)，所以 g_n 在 M_{n-1} 上有投影.

和 h_n 相差一个绝对值为 1 的常数因子. 证毕.

例 5 在 $L^2[-1,1]$ 中, 函数列 $g_k(x)=x^k(k=0,1,2,3.\cdots)$ 显然是线性无关的, 因此可以将 $\{g_k\}$ 用 Gram-Schmidt 方法化成就范直交的 $\{h_0,h_1,h_2,\cdots\}$, 其中 h_k 是一个 k 次的多项式. 可是用直接计算的方法要算出函数 h_k 是比较麻烦的, 因此对许多具体问题往往还要再用些特殊的方法.

记

$$\psi_0(x)=1,\quad \psi_k(x)=\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k\ (k=1,2,\cdots)$$

显然 $\psi_k(x)$ 是个 k 次多项式, 下面我们证明 $\{\psi_0,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \cdots\}$ 是 $L^2[-1,1]$ 中的直交系, 即当 $0\leqslant m<n$ 时, $(\psi_m,\psi_n)=0$.

当 $0\leqslant m\leqslant n$ 时, 利用分部积分法, 得到

$$\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m dx=-\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n$$

$$\cdot\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m dx=\cdots=(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m dx \tag{3.10}$$

由(3.10)式, 可知当 $m<n$ 时, 被积函数为零, 因而积分为零, 而当 $m=n$ 时, (3.10)式的右端成为

$$(-1)^m\cdot(2m)!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^m dx=\frac{(m!)^2}{2m+1}2^{2m+1}$$

因此, $$h_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad h_m(x)=\frac{1}{2^m m!}\sqrt{\frac{2m+1}{2}}\ \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m$$

$(m=1,2,3,\cdots)$ 就是把 $\{g_k\}$ 就范直交化后的函数列.

勒让德(Legendre)多项式列

$$P_1(x)\equiv 1,P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\ \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\quad (n=1,\ 2,3,\cdots)$$

组成 $L^2[-1,1]$ 中的直交多项式系.

5. 可析 Hilbert 空间的模型 为了研究 Hilbert 空间及其

中的线性算子，往往把一个抽象的 Hilbert 空间表示为一个具体的 Hilbert 空间。因此需要下面的概念。

定义　设 H_1 和 H_2 是两个内积空间，如果有 H_1 到 H_2 上的一一对应 φ 保持线性运算及内积，即对任何 x_1、$y_1 \in H_1$ 及两个数 α、β，都成立

$$\varphi(\alpha x_1 + \beta y_1) = \alpha\varphi(x_1) + \beta\varphi(y_1)$$

$$(\varphi(x_1), \varphi(y_1)) = (x_1, y_1)$$

就说内积空间 H_1 和 H_2 是**保范线性同构**，简称**同构**①。

对于一个抽象的 Hilbert 空间，我们要研究它能和怎样的具体 Hilbert 空间同构。

定理 6　任何 n 维内积空间 H 必和 n 维欧几里得空间 E^n 同构。

证　在 H 中取一组基 g_1、…、g_n，然后用 Gram-Schmidt 方法，可得 H 中就范直交的基 h_1、h_2、…、h_n。作 H 到 E^n 的映照 φ 为

$$x \longmapsto ((x, h_1), (x, h_2), \cdots, (x, h_n))$$

容易验证这是 H 到 E^n 上的一一对应，且是保持线性及内积的映照，因此 H 和 E^n 同构。证毕。

定理 7　任何可析的 Hilbert 空间 H 必和某个 E^n 或 l^2 同构。

证　由于 H 是可析的，在 H 中有稠密的点列 $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$，在这个点列中选一个子集 $G = \{g_1, g_2, \cdots\}$ 使得 $\{g_1, g_2, \cdots\}$ 是线性无关的，而且每个 x_n 都是有限个 g_i 的线性组合。这样的 G 可以如下地用数学归纳法来选取。把 $\{x_n\}$ 中第一个线性无关的向量(即不等于零的向量)记为 x_{n_1}，取作为 g_1，设对于某个自然数 k，已经选好 g_1、g_2、…、g_k，它们分别等于 x_{n_1}、x_{n_2}、…、x_{n_k}，$n_1 < n_2 < \cdots < n_k$，它们是线性无关的，而且对于一切 $n \leqslant n_k$，x_n 是 g_1、…、g_k 的线

① 这时 φ 称为 $H_1 \to H_2$ 的同构映照。事实上，它就是 §8 中所说的酉算子。参看 §8。

性组合．如果对于一切 $n>n_k$，x_n 也都是 g_1、…、g_k 的线性组合，那末所选出的 g_1、…、g_k 即符合我们的要求．不然的话，就如下方法来选取 g_{k+1}：考察 $\{x_{n_k+1}, x_{n_k+2}, \cdots\}$ 这一列向量，设其中第一个不能用 g_1、…、g_k 线性表出的向量是 $x_{n_{k+1}}$，把这个向量取为 g_{k+1}，这时显然 $n_k<n_{k+1}$，而且对于一切 $n\leqslant n_{k+1}$，x_n 可以用 $g_1, \cdots, g_{k+1}$ 线性表出．容易知道，这样依次取出的 $\{g_1, g_2, \cdots\}$（有限个或可列个）必定满足我们的要求．

由 G 按照引理 2 经过就范直交化，就得到一个就范直交系 $\mathscr{F}=\{h_1, h_2, \cdots\}$．这时，每个 x_n 都可用 $\mathscr{F}$ 中有限个向量的线性组合来表示，而 $\{x_n\}$ 在 H 中稠密．因此 $\mathscr{F}$ 张成的闭线性子空间就是 H．由定理 2 系 1，$\mathscr{F}$ 是 H 中完备的就范直交系．

如果 $\mathscr{F}$ 是有限集，其元素个数为 n，这时 H 是有限维空间，因此由定理 6，H 和 E^n 同构．如果 $\mathscr{F}$ 是可列集，作 H 到 l^2 的映照 φ 如下：

$$x\longmapsto ((x, h_1), (x, h_2), (x, h_3), \cdots)$$

由定理 2 容易证明 φ 是 H 到 l^2 上保持线性运算及内积的一一对应．对于 l^2 中向量 $(c_1, c_2, c_3, \cdots)$，因为 $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|^2<\infty$，由 Riesz-Fischer 定理，故有 $x\in H$，使 $(x, h_\nu)=c_\nu$．这时 $\varphi(x)=(c_1, c_2, c_3, \cdots)$，因此 φ 的值域就是 l^2．所以 H 和 l^2 是同构的．证毕．

习　题

1．令 $H_n(t)$ 为 Hermite 多项式 $(-1)^n e^{t^2}\dfrac{d^n}{dt^n}e^{-t^2}$，作

$$\psi_n(t)=(2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}H_n(t)$$

证明 $\{\psi_n(t)\}$，$n=0, 1, 2, \cdots$ 组成 $L^2(-\infty, \infty)$ 中的完备就范直交系．

2．令 $L_n(t)$ 为拉盖尔(Laguerre)函数 $e^t\dfrac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$，证明

$$\left\{\frac{1}{n!}e^{-\frac{t}{2}}L_n(t)\right\}$$

$n=0, 1, 2, \cdots$组成 $L^2(0, \infty)$中的完备就范直交系.

3. 证明$\mathscr{F}=\{e_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$是内积空间$H$中完备就范直交系的充要条件是对任何 x、$y\in H$,

$$(x, y)=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)\overline{(y, e_\lambda)}$$

4. 设$\{\Phi_n, n=1, 2, \cdots\}$是 $L^2(\Omega, \mathbf{B}, \mu)$ ($\mathbf{B}$是σ-代数)中完备就范直交系. $f=\sum_{n=1}^{\infty}(f, \Phi_n)\Phi_n$ 是 f 的 Fourier 展开, 称 $S_n(f)=\sum_{k=1}^{n}(f, \Phi_k)\Phi_k$($n=1, 2, 3\cdots$)为部分和序列. 记$E_n(\omega, \omega')=\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(\omega)\overline{\Phi_k(\omega')}$. 证明

$$S_n(f)(\omega)=\int_\Omega f(\omega')E_n(\omega, \omega')d\mu(\omega').$$

5. 设$f(z)$是单位圆$|z|<1$中的解析函数, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty$. 这种解析函数全体记为$H^2$, 证明它按通常的线性运算和内积$(f, g)=\lim_{r\to1-0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}d\theta$ 成为复 Hilbert 空间. 任取H^2中完备就范直交系$\{e_n(z)\}$, 证明当$|z|<1$, $|t|<1$时

$$\sum_{n=1}^{\infty}e_n(z)\overline{e_n(t)}=\frac{1}{1-z\bar{t}}$$

6. 证明在任何 Hilbert 空间H中总存在完备就范直交系. (可用 Zorn 引理来证明. 其实, 如再利用下面事实: 任何无限势 α, $\aleph_0\alpha=\alpha$ 成立. 还能证明H中任何两个完备就范直交系 $\mathscr{F}_1$、$\mathscr{F}_2$ 的势必相等.)

7. 设 $\mathscr{F}=\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$是 Hilbert 空间$H$上一族向量, Λ 是全序集. 对任何 $\lambda_0\in\Lambda$, 记 $E_{\lambda_0}=\overline{\text{span}}\{x_\lambda \mid \lambda\leqslant\lambda_0\}$. 如果对任何 $\lambda\in\Lambda$、$x_\lambda\bar{\in}\overline{\text{span}}\{x_\mu \mid \mu<\lambda\}$. 证明必有$H$中就范直交系$\{e_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$, 使对任何 λ, $e_\lambda\bar{\in}\overline{\text{span}}\{x_\mu \mid \mu<\lambda\}$, 但 $e_\lambda\in E_\lambda$. 并且除去绝对值为 1 的常数因子外, 具有上述性质的$\{e_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$是由$\mathscr{F}$唯一确定的.

8. 设$((-\infty, \infty), \mathbf{B}, g)$是勒贝格-斯蒂阶测度空间, $g((-\infty, \infty))=1$,

并且$\int_{-\infty}^{\infty}x^6dg<\infty$. 试将 1、x、x^2、x^3 按 $L^2((-\infty,\infty),\mathbf{B},g)$上内积依次直交化为 e_1、e_2、e_3、e_4, 并证明 e_2、e_3、e_4 必有零点.

9. 设$\{e_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$是 Hilbert 空间$H$上的完备就范直交系, f是定义在Λ上的函数, 最多除去 Λ 中可列个元 (依赖于f) 外$f(\lambda)=0$, 同时 $\sum\limits_{\lambda}|f(\lambda)|^2<\infty$. 令$\widetilde{H}$是上述$f$的全体, 按通常函数运算所成的线性空间, 并规定

$$(f,g)=\sum_{\lambda\in\Lambda}f(\lambda)\overline{g(\lambda)}$$

证明$\widetilde{H}$按$(\cdot,\cdot)$成为 Hilbert 空间, 并且H和$\widetilde{H}$是(保范线性)同构.

定义 设H是不定内积空间(参见§2 习题), H_+、H_-分别是H的正、负子空间, 并且 $H_\pm$分别按$\pm[\cdot,\cdot]$成为 Hilbert 空间. 如果$H=H_-\oplus H_+$成立(这里$\oplus$表示按$[\cdot,\cdot]$直交的和), 那末称$H=H_-\oplus H_+$是H的**正则分解**. 一个具有正则分解的不定内积空间, 如果$\dim H_-=K<\infty$, $\dim H_+=\infty$, 称$(H,[\cdot,\cdot])$是具有负指标K的 Понтрягин 空间, 记为Π_K; 如果$K=\infty$, 称$(H,[\cdot,\cdot])$为 Крейн 空间, 记为Π. 对于具有正则分解的不定内积空间H的某个正则分解: $H=H_-\oplus H_+$就可引入新的内积(从而有范数)$(\cdot,\cdot)$: x_+、$y_+\in H_+$, x_-、$y_-\in H_-$,

$$(x_++x_-,y_++y_-)=-[x_-,y_-]+[x_+,y_+]$$

称$(\cdot,\cdot)$(相应地范数$\|\cdot\|$)为**由正则分解$H=H_-\oplus H_+$导出的内积(范数)**.

10. 设$\Pi_K=H_-^i\oplus H_+^i\ (i=1,2)$是 Понтрягин 空间的两个正则分解. 证明由它们导出的两个范数$\|\cdot\|_i\ (i=1,2)$是等价的. (提示: 关键是化为Π_K的线性子空间$H_-^1+H_-^2$上两个范数是等价的. 习题 10 对于Π空间也成立).

由于习题 10, 在不定内积空间Π_K(也可在Π)上, 对某个正则分解所导出的范数, 就可以引入连续、极限和收敛、闭集、集合的闭包等等概念, 这些概念是不依赖于正则分解的选取的.

11. 证明: (i)Π空间上的不定内积$[\cdot,\cdot]$是二元连续函数;

(ii) Π上任何子集M的$M^\perp$是Π上闭线性子空间, 并且$\overline{M}^\perp=M^\perp$;

(iii) Π上任何正性子空间的闭包是半正性子空间, 并举例说明正性子空间的闭包未必是正性的子空间.

12. 设L是Π_K空间上非退化(参见§2 习题)的闭子空间. 证明: (i)

对任何 L 中的极大负子空间 N（当 L 是正子空间时，N 是空集），必有 $L=N\oplus N^{\perp}$，这里 $N^{\perp}$ 是正性闭子空间；

(ii) 必存在 Π_{x} 的正则分解 $\Pi_{x}=H_{-}\oplus H_{+}$，使得 $H_{-}\supset N, H_{+}\supset N^{\perp}$；

(iii) $L=L^{\perp\perp}$.

§ 4 共轭空间和共轭算子

1. 连续线性泛函的表示 现在我们利用 § 2 的投影定理来研究 Hilbert 空间上连续线性泛函的一般形式.

设 H 是一个内积空间，任意取 H 中一个固定向量 y，可以在 H 上作泛函 F_y 如下：

$$F_y(x)=(x,y) \quad (x\in H) \tag{4.1}$$

由内积对第一个变元的线性即知泛函 F_y 是线性的. 由 Schwarz 不等式，即得 $|F_y(x)|=|(x,y)|\leqslant\|x\|\ \|y\|$，因此 F_y 是有界泛函而且 $\|F_y\|\leqslant\|y\|$. 另一方面只要取 $x=y$ 就知道 $\|F_y\|=\|y\|$. 我们称 F_y 是向量 y 导出的有界线性泛函.

当 H 是 Hilbert 空间时，上面事实的逆命题也是成立的，就是说，H 上的任何一个连续线性泛函都有(4.1)的形式.

定理 1(F. Riesz) 设 H 是 Hilbert 空间，F 是 H 上的连续线性泛函，那末必有向量 $y\in H$，使得对任何 $x\in H$，都成立

$$F(x)=(x,y) \tag{4.2}$$

使(4.2)成立的 y 由 F 唯一确定，并且 $\|F\|=\|y\|$.

证 如果 $F=0$，只要取 $y=0$ 就好了. 因此不妨设 $F\neq 0$.

设 M 是 F 的零空间，即 $M=\{x|F(x)=0\}$. 因为 F 是连续线性泛函，由第五章 § 1，可知 M 是闭线性子空间，又因 $F\neq 0$，所以 $M\neq H$. 要证明的(4.2)式启发我们要到 $M^{\perp}$ 中去找向量 y. 由 § 2 定理 2 的系 1，必定有 $z\neq 0, z\perp M$. 这时，从 $M\cap M^{\perp}=\{0\}$ 可知 $z\overline{\in} M$，所以 $F(z)\neq 0$.

对于任何 $x\in H$，由于 $F\left(x-\frac{F(x)}{F(z)}z\right)=0$，就得到

$$x-\frac{F(x)}{F(z)}z\in M$$

所以$\left(x-\frac{F(x)}{F(z)}z\right)\perp z$，即

$$\left(x-\frac{F(x)}{F(z)}z,\ z\right)=0$$

这就是 $F(x)=\frac{F(z)}{\|z\|^2}(x,z)$．如果取$y=\frac{\overline{F(z)}}{\|z\|^2}z$，就知道(4.2)式对任何 x 成立．

泛函F既然表示成(4.1)的形式，即F是由向量 y 导出的，所以$\|F\|=\|y\|$．又向量 y 是由F所唯一确定的．因为，如果又有 z 使 $F_y=F_z$，那末 $F_{y-z}=0$，从$\|F_{y-z}\|=0$ 得到$\|y-z\|=0$．由此即知 $y=z$．证毕．

2. 共轭空间 我们作 Hilbert 空间H到它的共轭空间 H^* 的映照 C 如下：

$$C:\ y\longmapsto F_y\quad (y\in H)$$

其中 F_y 就是（(4.1)式所规定的）由向量 y 导出的泛函．那末由 Riesz 定理，C是H到 H^* 上的一一对应．

容易看到，当H是复空间时，映照 C 是**共轭线性**的，即对于两个数 α、β 及 y、$z\in H$，成立 $C(\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}Cy+\bar{\beta}Cz$．这直接由

$$F_{\alpha y+\beta z}(x)=(x,\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}(x,y)+\bar{\beta}(x,z)=\bar{\alpha}F_y(x)+\bar{\beta}F_z(x)$$

可以得到．此外，映照C还保持范数不变．

总之，对于复空间，上面所作的映照C是H到 H^* **上的一一对应，它是共轭线性的，而且保持范数不变**，这时映照C不是H到H^*之间的保范线性同构，而称为“复共轭”保范线性同构．在这种同构方式下，今后我们将把 y 和 F_y 看成是一致的，即把向量 y 看成

泛函 F_y，把泛函 F_y 看成向量 y. 这样，H 和 H^* 就一致化了. 因此称 H 是自共轭的空间. 但要注意的是，对于数 α 及 $y\in H$，把 αy 作为泛函看时，它在 x 点的值是泛函 y 在 x 点的值乘以 $\bar{\alpha}$. 这和第五章情况不同.

3. 共轭算子　由于 Hilbert 空间 H 和它的共轭空间可以一致化，因此共轭空间上的共轭算子的概念可以引进到 Hilbert 空间本身中去.

定理 2　设 G 是内积空间，H 是 Hilbert 空间，A 是 $H\to G$ 的有界线性算子，那末必有 $G\to H$ 的唯一的有界线性算子 B，使得对任何 $x\in H, y\in G$，

$$(Ax, y)=(x, By) \tag{4.3}$$

(式中左方的 $(\cdot,\cdot)$ 表示 G 中的内积，而右方的 $(\cdot,\cdot)$ 表示 H 中的内积.)

证　对任何 $y\in G$，因为 $|(Ax, y)|\leqslant\|Ax\|\|y\|\leqslant\|A\|\|x\|\|y\|$，所以

$$\varphi_y(x)=(Ax, y)$$

是 H 上的有界线性泛函，因为 H 是完备的，由 Riesz 定理，有唯一的 $z\in H$，使

$$(Ax, y)=(x, z)\quad (x\in H) \tag{4.4}$$

我们作 G 到 H 的算子 B 如下：对于 $y\in G$，就把使(4.4)式成立的 z 作为 By. 这样就作出了算子 B 使(4.3)式成立.

下面证明 B 是 $G\to H$ 的有界线性算子. 对于 y_1、$y_2\in G$ 及数 α、β，

$$\begin{aligned}(Ax, \alpha y_1+\beta y_2)&=\bar{\alpha}(Ax, y_1)+\bar{\beta}(Ax, y_2)\\&=\bar{\alpha}(x, By_1)+\bar{\beta}(x, By_2)\\&=(x, \alpha By_1+\beta By_2)\end{aligned}$$

因此 $B(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha By_1+\beta By_2$，即 B 是线性算子. 另外，由 B 的

定义，可知对任何 $y\in G$，有 $\|By\|=\|\varphi_y\|\leqslant\|A\|\|y\|$. 因此 B 是有界线性算子，而且 $\|B\|\leqslant\|A\|$.

显然使(4.3)式成立的算子 B 是由 A 所唯一确定的. 证毕.

定义 设 H 和 G 是两个内积空间，A 是 $H\to G$ 的有界线性算子，又设 A^* 是 $G\to H$ 的有界线性算子适合

$$(Ax, y)=(x, A^*y), x\in H, y\in G \tag{4.3'}$$

那末称 A^* 是 A 的**共轭算子或伴随算子**.

定理 2 说明当 H 是 Hilbert 空间时，对任何 $A\in\mathfrak{B}(H\to G)$，存在唯一的共轭算子 $A^*\in\mathfrak{B}(G\to H)$.

在前面第五章中，对于 Banach 空间的有界线性算子，曾引进过共轭算子的概念. 对于复空间，现在的共轭算子与那里稍有不同. 这里当 A、$B\in\mathfrak{B}(H\to G)$，α、β 是复数时 $(\alpha A+\beta B)^*=\bar{\alpha}A^*+\bar{\beta}B^*$，但在 Banach 空间中，按过去的共轭算子的概念应为 $(\alpha A+\beta B)^*=\alpha A^*+\beta B^*$. 可参看下面的定理 3 的(iii)和第五章 §3 定理 6(ii)的证明部分. 但在实空间中两者是完全一致的.

另外再指出一点：这里伴随算子仅只是对于有界线性算子定义的. 以后(在 §9 中)我们还要讨论无界算子的伴随算子.

例 1 设 E^n 是 n 维复内积空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 E^n 的就范直交基. 设 A 是 E^n 到 E^n 的线性算子(这时 A 必定是有界的). 由于 e_1、e_2、$\cdots$、e_n 是 E_n 的基，A 是线性算子，所以 $Ae_\mu(\mu=1, 2, \cdots, n)$ 的值就决定了算子 A. 如果

$$Ae_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}a_{\nu\mu}e_\nu \tag{4.5}$$

当 $x\in E^n$, $y=Ax$, x、y 用 e_1、$\cdots$、e_n 表示时，即 $x=\sum\limits_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu$，

$y=\sum\limits_{\nu=1}^{n}y_\nu e_\nu$. 由(4.5)式就得到

$$y=\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu e_\nu=Ax=\sum_{\mu=1}^{n}x_\mu Ae_\mu=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\mu a_{\nu\mu}e_\nu$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}x_\mu a_{\nu\mu}e_\nu$$

比较系数即得

$$y_\nu=\sum_{\mu=1}^{n}a_{\nu\mu}x_\mu$$

(参看第五章 § 1)由上所述，E^n 中线性算子 A 由 $n\times n$ 的阵$(a_{\nu\mu})$ $(\mu,\nu=1,2,\cdots,n)$所决定．而任何 n^2 个数 $a_{\nu\mu}$由(4.5)式决定了一个线性算子 A．我们把 n 阶方阵$(a_{\nu\mu})_{\nu,\mu=1,2,\cdots,n}$ 称为线性算子 A 在就范直交基 e_1、$\cdots$、e_n 下的表示阵．由(4.5)式知道

$$a_{\nu\mu}=(Ae_\mu,e_\nu).$$

容易知道，在取定的就范直交基下，线性算子 A 与它的表示阵$(a_{\nu\mu})$之间的这种对应关系是算子与 n 阶方阵之间的一一对应．

如果 A 在$\{e_i\}$下的表示阵为$(a_{\nu\mu})$，那末 $a_{\nu\mu}=(Ae_\mu,e_\nu)$．$A$ 的共轭算子 A^* 就使得

$$(A^*e_\mu,e_\nu)=\overline{(e_\nu,A^*e_\mu)}=\overline{(Ae_\nu,e_\mu)}=\overline{a_{\mu\nu}}$$

因此 A^* 在$\{e_i\}$下的表示阵$(\bar a_{\mu\nu})$就是 A 的表示阵$(a_{\nu\mu})$的共轭阵(即先取转置阵，再对每个元素取复共轭)．

例 2　设H是 $L^2[a,b]$，A 是 Fredholm 型积分算子

$$Ax(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds\qquad x(s)\in L^2[a,b]\tag{4.6}$$

其中 $K(t,s)$ 是矩形 R: $a\leqslant t\leqslant b$, $a\leqslant s\leqslant b$ 上可测函数，而且 $|K(t,s)|^2$ 在R上可积．A 是 $L^2[a,b]$上的有界线性算子．

现在我们证明由下式定义的算子 A^* 是 A 的共轭算子:

$$A^*x(t)=\int_a^b\overline{K(s,t)}x(s)ds\qquad x(s)\in L^2[a,b]\tag{4.7}$$

由于 $\overline{K(s,t)}$在 R 上是可测而且绝对值平方可积，因此，由(4.7)式

定义的算子 A^* 是有界线性算子，要证明它确是 A 的共轭算子，只要证明(4.3)式成立就可以了，就是要证明对任何 x、$y\in L^2[a,b]$，成立 $(Ax,y)=(x,A^*y)$. 对于 x、$y\in L^2[a,b]$，$x=x(t)$，$y=y(s)$，那末显然函数 $x(t)y(s)$ 在 R 上是绝对平方可积的，由 Fubini 定理

$$
\begin{aligned}
(x, A^*y) &= \int_a^b x(t)\overline{\int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)ds}\,dt \\
&= \int_a^b\int_a^b K(s,t)x(t)\overline{y(s)}ds\,dt \\
&= \int_a^b\int_a^b K(t,s)x(s)\overline{y(t)}ds\,dt = (Ax, y)
\end{aligned}
$$

所以由(4.7)式定义的算子 A^* 是 A 的共轭算子.

显然 A^* 也是 Fredholm 型积分算子. 如果记

$$A^*x(t)=\int_a^b K^*(t,s)x(s)ds$$

那末积分算子 A^* 的核是 $K^*(t,s)=\overline{K(s,t)}$，称 $K^*(t,s)$是核 $K(t,s)$ 的**共轭核**.

由例 1 我们看到，共轭算子是共轭矩阵概念的推广. 它具有许多与共轭矩阵相类似的性质. 参看第五章 §3.

定理 3 共轭算子有下面的性质：设 H 和 K 是 Hilbert 空间，G 是内积空间，A、$B\in\mathfrak{B}(H\to G)$，α、β 是复数，又 $C\in\mathfrak{B}(K\to H)$. 那末

(i) $(A^*)^*=A$;

(ii) $\|A^*\|^2=\|A\|^2=\|A^*A\|$;

(iii) $(\alpha A+\beta B)^*=\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^*$①;

(iv) $(AC)^*=C^*A^*$;

---

① 在第五章 §3，当 A、B 是Banach空间中的有界线性算子，α、β 是数时，$(\alpha A+\beta B)^*=\alpha A^*+\beta B^*$.

(v) A 为正则算子① 的充要条件是 A^* 为正则算子. 当 A 正则时, 有 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

如果 $A\in\mathfrak{B}(H\to H)$, H 是复空间. 那末

(vi) $\rho(A^*)=\{\bar{\lambda}|\lambda\in\rho(A)\}$, $\sigma(A^*)=\{\bar{\lambda}|\lambda\in\sigma(A)\}$.

(vii) 设 λ 是 A 的特征值, x 是相应的特征向量, 又设 μ 是 A^* 的特征值, y 是相应的特征向量, 那末当 $\lambda\neq\bar{\mu}$ 时, $x\perp y$.

证 (i) 对任何 $x\in H$, $y\in G$, 因为 $(Ax, y)=(x, A^*y)$, 所以 $(A^*y, x)=(y, Ax)$, 从而立即得到 $(A^*)^*=A$.

(ii) 定理 2 中已证明 $\|A^*\|\leqslant\|A\|$, 类似得 $\|A\|=\|(A^*)^*\|\leqslant\|A^*\|$. 因此, $\|A^*\|=\|A\|$. 根据第五章 §1, 有不等式 $\|A^*A\|\leqslant\|A^*\|\|A\|$. 另一方面, 对任何 $x\in H$, $\|x\|=1$, 由 Schwarz 不等式, 有

$$\|Ax\|^2=(Ax, Ax)=(A^*Ax, x)\leqslant\|A^*Ax\|\|x\|\leqslant\|A^*A\|$$

所以 $\|A\|^2=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|^2\leqslant\|A^*A\|$, 这就证明了 $\|A^*\|^2=\|A\|^2=\|A^*A\|$

(iii) 对任何 $x\in H$, $y\in G$ 及复数 α、β, 由于

$$\begin{aligned}((\alpha A+\beta B)x, y)&=\alpha(Ax, y)+\beta(Bx, y)\\&=\alpha(x, A^*y)+\beta(x, B^*y)\\&=(x, (\bar{\alpha}A^*+\bar{\beta}B^*)y)\end{aligned}$$

所以
$$(\alpha A+\beta B)^*=\bar{\alpha}A^*+\bar{\beta}B^*$$

(iv) 对于任何 $x\in K$, $y\in G$

$$(ACx, y)=(Cx, A^*y)=(x, C^*A^*y)$$

所以
$$(AC)^*=C^*A^*$$

(v) 当 A 是正则算子时, A^{-1} 是全空间定义的有界线性算子, $AA^{-1}=I_G$, $A^{-1}A=I_H$ ($I_{(\cdot)}$ 是恒等算子, 显然 $I^*_{(\cdot)}=I_{(\cdot)}$). 由(iv)即

① 当 A^{-1} 是全空间定义的有界算子时称 A 是正则算子 (见第五章 §4). 注意, 这时再由 H 是 Hilbert 空间的假设可以推出 G 必是 Hilbert 空间.

知

$$(A^{-1})^*A^* = I_G,\quad A^*(A^{-1})^* = I_H$$

因此 A^* 的逆算子就是 $(A^{-1})^*$，它是全空间定义的有界线性算子．所以 A^* 是正则算子．反过来，如果 A^* 是正则算子，那末 $A=(A^*)^*$ 是正则算子．

(vi) 如果 λ 是 A 的正则点，那末 $\lambda I-A$ 是正则算子．所以由(v)及(iii)，$(\lambda I-A)^*=\bar{\lambda}I-A^*$ 是正则算子，因此 $\bar{\lambda}$ 是 A^* 的正则点．这就说明了 $\{\bar{\lambda}|\lambda\in\rho(A)\}\subset\rho(A^*)$，同理 $\{\bar{\lambda}|\lambda\in\rho(A^*)\}\subset\rho((A^*)^*)=\rho(A)$．再取复共轭就得到 $\rho(A^*)\subset\{\bar{\lambda}|\lambda\in\rho(A)\}$，所以 $\rho(A^*)=\{\bar{\lambda}|\lambda\in\rho(A)\}$．由于 $\sigma(A^*)$，$\sigma(A)$分别是 $\rho(A^*)$，$\rho(A)$的余集，容易知道 $\sigma(A^*)=\{\bar{\lambda}|\lambda\in\sigma(A)\}$．

(vii) 由 $Ax=\lambda x$ 及 $A^*y=\mu y$，得到

$$\lambda(x,y)=(Ax,y)=(x,A^*y)=(x,\mu y)=\bar{\mu}(x,y)$$

所以 $(\lambda-\bar{\mu})(x,y)=0$，由假设 $\lambda\neq\bar{\mu}$，所以 $(x,y)=0$，即 $x\perp y$．证毕．

下面再介绍共轭算子的一个重要性质．

定理 4 设 H、G 为 Hilbert 空间，A 是 $H\to G$ 的有界线性算子，$\mathscr{N}(A)$ 表示算子 A 的零空间①(即 $\mathscr{N}(A)=\{x|Ax=0\}$)，$\mathscr{R}(A^*)$ 表示 A^* 的值域①．那末

$$\mathscr{N}(A)=\mathscr{R}(A^*)^{\perp},\quad \mathscr{N}(A^*)=\mathscr{R}(A)^{\perp} \tag{4.7}$$

$$\overline{\mathscr{R}(A)}=\mathscr{N}(A^*)^{\perp},\ \overline{\mathscr{R}(A^*)}=\mathscr{N}(A)^{\perp} \tag{4.8}$$

证 由于对于 $x\in H$，$y\in G$，有 $(Ax,y)=(x,A^*y)$，因此，当 $x\in\mathscr{N}(A)$ 时，$Ax=0$，所以 $(x,A^*y)=0$ 对任何 $y\in G$ 成立．这也就是 $\mathscr{N}(A)\subset\mathscr{R}(A^*)^{\perp}$．任取 $x\in\mathscr{R}(A^*)^{\perp}$，这时对任何 $y\in G$，$(x,A^*y)=0$，所以 $(Ax,y)=0$ 对 $y\in G$ 成立，取 $y=Ax$ 即知 $Ax=0$．

① 参看第五章 §5．

所以 $\mathscr{R}(A^*)^{\perp}\subset\mathscr{N}(A)$. 这两点结合起来就得到(4.7)的第一式.把 A 换成 A^* 就得到(4.7)的第二式.

再由 §2 定理 2 的系 2, 从(4.7)第一式两边取直交补就得到 $\mathscr{N}(A)^{\perp}=(\mathscr{R}(A^*)^{\perp})^{\perp}=\overline{\mathscr{R}(A^*)}$, 这就是(4.8)的第二式, 类似地可得到(4.8)的第一式. 证毕.

4. 有界自共轭算子　现在我们考察一类重要的有界线性算子.

定义　设 A 是 Hilbert 空间 $H\to H$ 的有界线性算子, 如果 $A^*=A$, 就称 A 是**自共轭算子**或**自伴算子**.

自共轭算子是自共轭矩阵的推广.

定理 5　设 A 是复 Hilbert 空间 H 中的有界线性算子, 那末 A 是自共轭算子的充要条件是对一切 $x\in H$, (Ax,x) 是实数.

证　必要性: 设 $A=A^*$, 那末由(4.3′)就知道 (Ax,x) 是实数.

充分性: 首先, 直接验算可知, 对复 Hilbert 空间 H 中任一有界线性算子 A 和 x、$y\in H$, 类似于 §1 中的极化恒等式, 有

$$(Ax,y)=\frac{1}{4}[(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)$$
$$+i(A(x+iy),x+iy)-i(A(x-iy),x-iy)] \qquad (4.9)$$

这也称为极化恒等式. 如果对一切 $x\in H$, (Ax,x) 是实数, 那末由(4.9)可知

$$(Ax,y)=\overline{(Ay,x)}=(x,Ay),\quad x,y\in H$$

由于满足(4.3′)的共轭算子 A^* 的唯一性即知 $A^*=A$. 证毕.

自共轭算子有如下简单性质.

定理 6　设 A、B、$A_n(n=1,2,\cdots)$ 都是 Hilbert 空间 H 上有界自共轭算子, 那末

(i)　对任何实数 α、β, $\alpha A+\beta B$ 是有界自共轭算子.

(ii)　当 $\{A_n\}$ 强(或弱)收敛于 A' 时, A' 必是有界自共轭算

子.

证　由定理 5 知道(i)是显然的.

(ii) 当$\{A_n\}$强收敛于 A' 时，由第五章 § 4 共鸣定理知道 A' 必是有界的，如果$\{A_n\}$弱收敛于 A' 时，由第五章 § 4 习题 2 知道 A' 也是有界的. 至于 A' 的自共轭性可直接由

$$(A'x, y)=\lim_{n\to\infty}(A_n x, y)=\lim_{n\to\infty}(x, A_n y)=(x, A'y) \qquad (4.10)$$

得到. 证毕.

习　题

1. 设 A 是 Hilbert 空间到内积空间 G 上有界线性算子，并且是正则的. 证明 G 必是 Hilbert 空间.

2. 设 H 是复的 Hilbert 空间，A 是 H 上的有界线性算子. 证明 $A=-A^*$ 的充要条件是对一切 $x\in H$, $\mathrm{Re}(Ax, x)=0$.

3. 设 A 是 l^2 上的有界线性算子. 当 $x=(x_\nu)\in l^2$ 时，记 $Ax=(y_\mu)$,

$$y_\mu=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{\mu\nu}x_\nu,\ \mu=1, 2, \cdots$$

设 $A^*x=(y_\mu^*)$, $y_\mu^*=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{\mu\nu}^* x_\nu$, $\mu=1, 2, \cdots$, 证明 $a_{\mu\nu}^*=\bar{a}_{\nu\mu}$.

4. 设 λ 是复 Hilbert 空间 H 中有界线性算子 A 的特征值，问 $\bar{\lambda}$ 是否为 A^* 的特征值?

5. 设 H 是复 Hilbert 空间，J 是 H 中的一个有界自共轭算子，而且对一切 x, $(Jx, x)\geqslant c(x, x)$, 此地 c 是一个正常数，在 H 中引入另一内积 $(x, y)_J=(Jx, y)$, x、$y\in H$, 证明 H 按 $(\cdot, \cdot)_J$ 成为 Hilbert 空间 H_J. 证明 H 中一个有界线性算子 A 在 H_J 中(关于内积 $(x, y)_J$)自伴的充要条件是

$$JA=A^*J$$

这里 A^* 表示在原来的 Hilbert 空间 H 中(关于内积 (x, y))的共轭算子.

6. 设 H 是复 Hilbert 空间，J 是 H 中有界自共轭算子，规定

$$[x, y]=(Jx, y),\quad x、y\in H$$

那末 $(H, [\cdot, \cdot])$ 是不定内积空间.

7. 设Π是 Крейн 空间(参见§3 习题), A是Π上有界(只要对Π的某个正则分解所导出的范数是有界的)线性算子，证明必唯一地有Π上有界线性算子 $A^{\dagger}$, 使得

$$[Ax, y]=[x, A^{\dagger}y],\quad x, y\in\Pi$$

(称 $A^{\dagger}$ 为A关于$[\cdot,\cdot]$的伴随、或共轭算子)，并且 $A^{\dagger}=JA^*J$，其中 A^* 是在Π的某个正则分解$\Pi=H_-\oplus H_+$所导出的内积 $(\cdot,\cdot)$ 下的(按内积意义下的)共轭算子，而 J 是 P_+-P_-, $P_\pm$是 Hilbert 空间$(\Pi, (\cdot,\cdot))$在子空间 $H_\pm$ 上的投影.

8. A是Π空间上有界线性算子. 证明：对于 $A^{\dagger}$ 有完全类似定理 3 的 (i)—(vii) 的结果(当然要将定理 3 中 H、G、K、换为Π，"*"换为"†"). 同样, 定理 4 也对 $A^{\dagger}$ 成立.

定义　Π空间上有界线性算子 A, 如果 $A=A^{\dagger}$, 称A是Π上的**自伴**(或**自共轭**)**算子**.

9. 证明：对于Π空间上有界自共轭算子有完全类似于定理 5 的结果.

定义　设T是 Hilbert 空间H到 Hilbert 空间G的线性算子，如果存在H上一个完备就范直交系$\{e_n\}$①, 使得 $\sum\limits_n \|Te_n\|^2<\infty$，称 T 是 $H\to G$ 的 **Hilbert-Schmidt 算子**(简称 H. S. 算子). 如果对 H、G 中的一切完备就范直交系$\{e_n\}(\subset H)$、$\{f_n\}(\subset G)$, 存在常数 $M>0$, 使得

$$\sup_{\{e_n\}\,\{f_n\}}\sum_n |(Te_n, f_n)|\leqslant M$$

称T是$H\to G$的**核算子**(或**迹类算子**).

(H. S. 算子和核算子是算子论中一类重要的算子，在积分方程中也具有重要地位).

10. 如果T是 Hilbert 空间H到 Hilbert 空间G的H. S. 算子或核算子，那末T必是有界的, 并且当T是 $H.S.$ 算子时, $\|T\|\leqslant\left(\sum\limits_n\|Te_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 当$T$是核算子时, $\|T\|\leqslant\sup\limits_{\{e_n\}\,\{f_n\}}\sum\limits_n|(Te_n, f_n)|$.

---

① 因为不知H是否是可析空间，所以这里$\{e_n\}$(包括以下习题)可能是不可列的.

11. 设T是 Hilbert 空间H到 Hilbert 空间G的线性算子，并且是有界的. 证明：当T是有限秩算子时，T必是$H.S.$算子，也是核算子.

12. 设H、G都是l^2，$\{e_n\}$是l^2的完备就范直交系. $\{T_{m,n}|m, n=1,2,\cdots\}$是一族数. 证明：当$\sum\limits_{m,n}|T_{m,n}|^2<\infty$时，下列$l^2$中线性算子

$$Tx=\sum\left(\sum_n T_{mn}x_n\right)e_m,\quad x=\sum x_n e_n$$

是$H.S.$算子.

13. 设T是 Hilbert 空间H到 Hilbert 空间G的$H.S.$算子. 证明：

(i) T必是全连续算子(提示：利用$\sum\limits_n\|Te_n\|^2<\infty$证明$T$必将$H$中单位球映成完全有界集)；

(ii) T^*必是$G\rightarrow H$的$H.S.$算子，并且对H、G中任何完备就范直交系$\{e_n\}(\subset H)$、$\{f_m\}(\subset G)$，$\sum\limits_m\|T^*f_m\|^2=\sum\limits_n\|Te_n\|^2<\infty$. (提示：先取定$\{e_n\}$满足$\sum\limits_n\|Te_n\|^2<\infty$，然后直接计算$\sum\limits_m\|T^*f_m\|^2=\sum\limits_m\sum\limits_n|(T^*f_m, e_n)|^2=\sum\limits_m\sum\limits_n|(f_m, Te_n)|^2=\sum\limits_n\|Te_n\|^2<\infty$.)

(iii) (由(ii)立即得)对H中任何两个完备就范直交系$\{e_n\}$、$\{e'_m\}$，

$$\sum_n\|Te_n\|^2=\sum_m\|Te'_m\|^2$$

14. 记 Hilbert 空间H到 Hilbert 空间G的$H.S.$算子全体为$\mathscr{C}_2(H\rightarrow G)$

证明：(i) $\mathscr{C}_2(H\rightarrow G)$按通常算子的线性运算成为线性空间；

(ii) 对任何$T\in\mathscr{C}_2(H\rightarrow G)$，规定

$$\|T\|_{H.S.}=\left(\sum_n\|Te_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

这里$\{e_n\}$是H中完备就范直交系. 那末$\mathscr{C}_2(H\rightarrow G)$按$\|\cdot\|_{H.S.}$成为 Hilbert 空间. (提示：利用$\|T\|_{H.S.}\geqslant\|T\|$，先证任何按$\|\cdot\|_{H.S.}$基本的算子序列$\{T_k\}$必按算子范数收敛于某个算子$T$，然后证明$\|T_k-T\|_{H.S.}\rightarrow 0$)

(iii) $\|T\|_{H.S.}=\|T^*\|_{H.S.}$

(iv) 如果 A、B 分别是 H、G 上的有界线性算子，那末当 $T\in\mathscr{C}_2(H\to G)$ 时，TA、$BT\in\mathscr{C}_2(H\to G)$，并且 $\mathscr{C}_2(H\to G)$ 上的算子 $T\longmapsto TA$; $T\to BT$ 都是连续线性的.

(v) 如果 T_1、$T_2\in\mathscr{C}_2(H\to H)$，那末 T_1T_2 必是 $H\to H$ 的核算子.

15. 记 Hilbert 空间 H 到 Hilbert 空间 G 的核算子全体为 $\mathscr{C}_1(H\to G)$. 证明:

(i) 当 $T\in\mathscr{C}_1(H\to G)$ 时，$T^*\in\mathscr{C}_1(G\to H)$.

(ii) $\mathscr{C}_1(H\to G)$ 按通常算子的线性运算成为线性空间.

(iii) 对任何 $T\in\mathscr{C}_1(H\to G)$，规定

$$\|T\|_K=\sup_{\{e_n\}\,\{f_n\}}\sum_n|(Te_n, f_n)|$$

其中 $\{e_n\}$、$\{f_n\}$ 分别是 H、G 中的完备就范直交系，那末 $\|\cdot\|_K$ 必是 $\mathscr{C}_1(H\to G)$ 上范数(称为迹范数)，并且按 $\|\cdot\|_K$, $\mathscr{C}_1(H\to G)$ 成为 Banach 空间. (提示: 利用 $\|T\|_K\geqslant\|T\|$，先证明任何按 $\|\cdot\|_K$ 基本的算子序列 $\{T_k\}$ 必按算子范数收敛于某个算子 T，然后证明 $\|T_k-T\|_K\to0$.)

(iv) $\|T\|_K=\|T^*\|_K$.

($H.S.$ 算子和核算子还有一些最基本的性质可参见 §9 习题)

§5 投影算子

1. 投影算子的定义和基本性质 在 §2 中，我们证明了投影定理. 下面我们只考察空间 H 是 Hilbert 空间的情况，这时投影定理可以改述如下: 如果 H 是一个 Hilbert 空间，L 是 H 中的闭线性子空间，那末对于任何 $x\in H$，必有相应的 $y\in L$, $z\perp L$，使得 $x=y+z$. 这时我们称元素 y 为 x 在 L 上的**投影**，x 在 L 上的投影是由 x 唯一决定的.

定义 L 是 Hilbert 空间 H 中任意取定的一个闭子空间，作一个算子 P 如下: 对 H 中元 x，令 Px 是 x 在 L 上的投影. 这样定义的算子 P 称做(由 H 到) L 上的**投影算子**. 有时为了标出 P 和 L 的关系，记 P 为 P_L.

例1 现在考察 n 维内积空间 E^n 中的投影算子. 设 L 是 E^n 的一个子空间, P_L 是 E^n 到 L 中的投影, 设 e_1、e_2、…、e_m 为 L 中的一组就范直交系. 我们在 $L^\perp$ 中再任意补充 $n-m$ 个就范直交向量 e_{m+1}、…、e_n, 使 e_1、…、e_n 为 E^n 中一组就范直交基. 考察算子 P_L. 因为

$$P_L e_i=\begin{cases}e_i, & i\leqslant m\\0, & i>m\end{cases}$$

所以在基 e_1、…、e_n 之下, 与算子 P_L 相应的矩阵 (a_{ij}) 为

$$a_{ij}=(P_L e_j,\ e_i)=\begin{cases}0, & i\neq j\\0, & i=j,\ i>m\\1, & i=j,\ i\leqslant m\end{cases}$$

因此 (a_{ij}) 形为

$$\begin{pmatrix}\overbrace{1 & 0 & \cdots & 0}^{m} & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \cdots & \\0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

例2 设 H 为内积空间, e_1、…、e_n 为 H 中的就范直交向量, L 为由 e_1、…、e_n 所张成的子空间, 则

$$P_L x=\sum_{\nu=1}^{n}(x,\ e_\nu)e_\nu$$

投影算子有下面一系列的性质:

(1) 投影算子必定是有界线性算子.

证 设 P 是 Hilbert 空间 H 到闭线性子空间 L 上的投影算子. 当 x_1、$x_2\in H$ 时, 有 $x_1=Px_1+z_1$, $x_2=Px_2+z_2$, 这里 z_1、$z_2\perp L$.

这时，$\alpha x_1+\beta x_2=(\alpha Px_1+\beta Px_2)+(\alpha z_1+\beta z_2)$，而且

$$\alpha Px_1+\beta Px_2\in L,\qquad \alpha z_1+\beta z_2\perp L$$

所以

$$P(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Px_1+\beta Px_2$$

可见 P 是个线性算子. 另一方面，当 $x\in H$ 时，$x=Px+(x-Px)$，而 $Px\perp(x-Px)$. 由于勾股定理，

$$\|x\|^2=\|Px\|^2+\|x-Px\|^2$$

所以

$$\|Px\|\leqslant\|x\|,\ x\in H$$

因而 P 是个有界算子(而且 $\|P\|\leqslant 1$).

(2) 投影算子的范数或是 0 或是 1.

证 如果 P 是 H 到 L 上的投影算子，当 $L=\{0\}$ 时，对一切 $x\in H$，$Px\in L$，$Px=0$，P 就是零算子，所以 $\|P\|=0$，当 $L\neq\{0\}$ 时，必有 $x\in L$，$x\neq 0$，这时 $Px=x$，所以必定 $\|P\|=1$.

(3) 如果 P 是 H 到 L 的投影算子，那末

$$L=PH=\{x\,|\,Px=x,\ x\in H\}.$$

证 因为 $P:H\to L$. 显然，对任何 $x\in L$，x 在 L 上投影就是 x 本身，所以 $Px=x$，即 $L\subset\{x\,|\,Px=x,\ x\in H\}$. 反之，对任何 $y\in\{x\,|\,Px=x,\ x\in H\}$，必有 $Py=y$，而 P 是 $H\to L$ 的映照，所以 $y\in L$，即 $\{x\,|\,Px=x,\ x\in H\}\subset L$. 因而 $L=PH=\{x\,|\,Px=x,\ x\in H\}$.

(4) $P_Lx=x$ 的充要条件是 $x\in L$. $P_Lx=0$ 的充要条件是 $x\perp L$.

这是显然的.

投影算子是一类比较简单的有界线性算子，它是有限维空间中投影算子的推广. 下面的定理说明了投影算子的特征.

定理 1 设 P 是 Hilbert 空间 H 中在全空间定义的线性算子，那末 P 成为投影算子的充要条件是：P 是自共轭($P=P^*$)而且幂

等(即 $P^2=P$)的算子.

证 必要性:设P是L上的投影算子,对于 x_1、$x_2\in H$,有

$$x_1=Px_1+z_1,\ x_2=Px_2+z_2,\ z_1,\ z_2\perp L$$

那末由$(Px_1, z_2)=(z_1, Px_2)=0$ 得到

$$(Px_1, x_2)=(Px_1, Px_2+z_2)=(Px_1, Px_2)=(Px_1+z_1, Px_2)$$
$$=(x_1, Px_2)$$

因此P是自共轭算子.

又因为对于每个 $x\in H$, $Px\in L$, 所以 $P(Px)=Px$, 这就是

$$P^2=P$$

充分性:设P是线性算子,而且 $P=P^*=P^2$. 先证明P是有界的. 如果不对,必有 $x\in H$, $\|x\|=1$, 使得$\|Px\|>1$. 然而

$$\|Px\|^2=(Px, Px)=(P^2x, x)=(Px, x)\leqslant\|Px\|\|x\|=\|Px\|$$

因此与$\|Px\|>1$ 相矛盾. 从而 P 有界(其实还得到$\|P\|\leqslant1$).

作

$$L=\mathscr{N}(I-P)=\{x\,|\,(I-P)x=0\}$$

这里 I 是恒等算子. 由于 $I-P$是连续线性算子,它的零空间L是H的闭线性子空间. 我们要证明P是H到L上的投影算子:由于当$x\in H$ 时,$(I-P)Px=0$, 所以 $Px\in L$. 做分解 $x=Px+(x-Px)$ 如果 $y\in L$,由于 $I-P$ 是自共轭的,$(x-Px, y)=(x, (I-P)y)=0$, 所以 $x-Px\perp L$. 因此 Px 是 x 在 L 上的投影, 也就是说, P是H到L上的投影算子,证毕.

如P是H到L上的投影算子,称L为P的投影子空间.

由于投影算子P是幂等的自共轭算子, 因此对任何 $x\in H$, 有

$$(Px, x)=(P^2x, x)=(Px, Px)=\|Px\|^2$$

实际上,对于复空间来说,这是刻画投影算子的又一个特征.

定理 2 设P是复 Hilbert 空间H中的有界线性算子, 那末P成为投影算子的充要条件是

$$\|Px\|^2=(Px,x)$$

对任何 $x\in H$ 成立.

证 只要证明条件的充分性. 设条件满足, 由 § 4 定理 5 知道 P 是自共轭算子, 因此只要证明 P 具有幂等性, 由假设 $(Px,x)=\|Px\|^2=(Px,Px)=(P^2x,x)$, 记 $A=P-P^2$, 则对于 $x\in H$, $(Ax, x)=0$. 由极化恒等式(4.9)得到 $(Ax,y)=0$, x、$y\in H$, 取 $y=Ax$ 得到 $A=0$, 因此 $P=P^2$. 证毕.

2. 投影算子的运算 下面我们研究投影算子间的运算.

定理 3 设 P_L、P_M 是两个投影算子, 那末 $L\perp M$ 的充要条件是 $P_LP_M=0$.

证 必要性: 如果 $L\perp M$, 那末对任何 $x\in H$, $P_Mx\in M$, 因此 $P_Mx\perp L$. 从而 $P_L(P_Mx)=0$, 这就是 $P_LP_M=0$.

充分性: 如果 $P_LP_M=0$, 那末对于任何 $x\in M$,

$$P_Lx=P_LP_Mx=0$$

所以 $x\perp L$, 也就是说 M 中任何元都与 L 直交, 这就说明 $L\perp M$.

定理 4 设 P_L、P_M 是两个投影算子, 则 P_L+P_M 是投影算子的充要条件是 $P_LP_M=0$. 且当 P_L+P_M 是投影算子时, 它就是 $P_{L\oplus M}$.

证 必要性: 如果 P_L+P_M 是投影算子, 那末它是幂等的, 即

$$\begin{aligned}P_L+P_M&=(P_L+P_M)^2=P_L^2+P_LP_M+P_MP_L+P_M^2\\&=P_L+P_LP_M+P_MP_L+P_M\end{aligned}$$

即

$$P_LP_M+P_MP_L=0 \tag{5.1}$$

这式子左(右)乘上 P_L 就得

$$P_LP_M+P_LP_MP_L=0,\ P_LP_MP_L+P_MP_L=0$$

可见 $P_LP_M=P_MP_L$, 再由(5.1)式就得到 $P_LP_M=0$.

充分性: 如果 $P_LP_M=0$, 这时 $P_MP_L=(P_LP_M)^*=0$. 因此

$$(P_L+P_M)^2=P_L^2+P_M^2=P_L+P_M$$

而 P_L+P_M 显然是有界自共轭算子. 由定理 1 即知它是投影算子.

最后我们还要证明在 P_L+P_M 是投影算子时, $P_L+P_M=P_{L\oplus M}$.

由定理 3, 这时 $L\perp M$, 故 $L\oplus M$ 这样写是合理的.

对于 $x\in L$, 则 $x\perp M$, 故 $(P_L+P_M)x=P_Lx+P_Mx=x$. 同样, 对于 $y\in M$, $(P_L+P_M)y=y$. 可见对于 $L\oplus M$ 中的向量, 经 P_L+P_M 作用后仍为自身. 而对于 $z\perp L\oplus M$, 因为 $z\perp L$, $z\perp M$, 故

$$(P_L+P_M)z=P_Lz+P_Mz=0$$

所以 $P_L+P_M=P_{L\oplus M}$. 证毕.

定义 如果两个投影算子 P 和 Q 满足 $PQ=0$, 就称 P 和 Q 是直交的, 记为 $P\perp Q$.

上面的定理 3 及 4 的意思就是: 两个投影算子直交的充要条件是它们的投影子空间是直交的; 两个投影算子之和是投影算子的充要条件是它们直交, 这时它们的和就是投影子空间的直交和上的投影算子.

定理 4 可以推广成有限个两两直交的投影算子之和是投影算子, 下面将它推广到一列投影算子的情况.

定理 5 设 $P_n(n=1, 2, 3, \cdots)$ 是 Hilbert 空间 H 中一列两两直交的投影算子, 则必有投影算子 P, 使得对任何 $x\in H$, 有

$$Px=\sum_{i=1}^{\infty}P_ix \tag{5.2}$$

证 首先要说明(5.2)式的右端是有意义的. 记 $Q_n=\sum_{i=1}^{n}P_i$. 由上所述, $Q_n(n=1, 2, 3, \cdots)$ 是投影算子. 对于任何 $x\in H$,

$$\|x\|^2 \geq \|Q_n x\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n} P_i x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|P_i x\|^2$$

因此，级数$\sum_{i=1}^{\infty}\|P_i x\|^2$收敛，所以知道$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=m}^{n}\|P_i x\|^2=0$.

又由勾股定理

$$\|Q_n x - Q_m x\|^2 = \|\sum_{i=m+1}^{n} P_i x\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} \|P_i x\|^2 \to 0\ (\text{当 } n,\ m\to\infty \text{ 时})$$

由此，$\{Q_n x\}$是个基本点列，因而必定收敛于一个向量，记作为 Px.

这样，对于每个 $x\in H$，我们用$\lim_{n\to\infty}Q_n x=\sum_{i=1}^{\infty}P_i x$来作为 Px，就作出了一个算子 P.

容易看到这样作出的算子 P 是线性算子．而且由于

$$\|Px\| = \lim_{n\to\infty}\|Q_n x\| \leq \|x\|$$

所以 P 是个有界线性算子．还要证明的事情就是 P 确实是一个投影算子.

由(5.2)和 Q_n 是自共轭算子，所以对任何 x、$y\in H$，

$$\begin{aligned}(Px, y) &= \lim_{n\to\infty}(Q_n x, y) = \lim_{n\to\infty}(x, Q_n y)\\ &= (x, Py)\end{aligned}$$

即 $P=P^*$，再注意到 $Q_n Q_m = Q^2_m = Q_m\ (n\geq m)$，所以

$$\begin{aligned}(P^2 x, y) &= (Px,\ Py) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}(Q_n x, Q_m y)\\ &= \lim_{m\to\infty}(Q_m x, Q_m y) = \lim_{m\to\infty}(Q^2_m x, y)\\ &= \lim_{m\to\infty}(Q_m x, y) = (Px, y)\end{aligned}$$

从而 $P^2=P$．根据定理 1，P 是投影算子．证毕.

定理 5 中的算子 P 也可记为 $\sum_{i=1}^{\infty} P_i$，这级数和就是部分和算子序列 $\{\sum_{i=1}^{n} P_i \mid n=1, 2, \cdots\}$ 的强收敛极限. P 的投影子空间是怎样的子空间呢?

定义 设 $\{L_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中一列两两互相直交的闭线性子空间. 作

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mid x_i \in L_i (i=1, 2, 3, \cdots), \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty \right\}$$

称 L 为 $\{L_n\}$ 的**直交和**，记为 $L = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L_i$.

显然这时 L 是 H 的闭线性子空间. 其实，L 就是由 $\{L_n\}$ 张成的闭子空间.

系 设 $\{L_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 中一列两两直交的闭线性子空间，那末 $P_{\bigoplus_{i=1}^{\infty} L_i} = \sum_{i=1}^{\infty} P_{L_i}$ (式中右边级数是指算子的强收敛).

证 由定理5，$\sum_{i=1}^{\infty} P_{L_i}$ 确是投影算子，把它记为 P. 当 $x \in H$ 时，由于 (5.2) 式

$$\|Px\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|P_{L_i} x\|^2 \qquad P_{L_i} x \in L_i$$

所以 $Px \in L = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L_i$，因此 $\{x \mid Px = x\} \subset L$. 反过来对于 $x \in L$，记 $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$，其中 $x_i \in L_i$，$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \infty$. 由 $\{L_n\}$ 的相互直交性，我们有

$$P_{L_k} x_n = \begin{cases} x_n & k = n \text{时} \\ 0 & k \neq n \text{时} \end{cases}$$

所以 $P_{L_k}x=\sum_{n=1}^{\infty}P_{L_k}x_n=x_k$，因此 $Px=\sum_{k=1}^{\infty}P_{L_k}x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k=x$. 这就说明 P 是 L 上的投影算子. 证毕.

现在我们讨论什么时候两个投影算子的乘积仍是投影算子的问题.

定理 6　设 P_L、P_M 是两个投影算子，那末 P_LP_M 成为投影算子的充要条件是 $P_LP_M=P_MP_L$. 而且在 P_LP_M 是投影算子时，它就是在 $L\cap M$ 上的投影算子.

证　必要性：如果 P_LP_M 是投影算子，那末它是自共轭算子. 所以 $P_MP_L=P_M^*P_L^*=(P_LP_M)^*=P_LP_M$.

充分性：如果 $P_LP_M=P_MP_L$，那末

$$(P_LP_M)^*=(P_MP_L)^*=P_L^*P_M^*=P_LP_M$$

$$(P_LP_M)^2=P_LP_MP_LP_M=P_LP_LP_MP_M=P_L^2P_M^2=P_LP_M$$

这两个式子说明 P_LP_M 是幂等的自共轭算子，由定理 1，P_LP_M 是投影算子.

最后，当 P_LP_M 是投影算子时，如果 $x\in L\cap M$，那末

$$P_LP_Mx=P_Lx=x$$

反过来，如果向量 x 使 $x=P_LP_Mx$，那末 $x\in L$，又因 $x=P_MP_Lx$，所以 $x\in M$，因此 $x\in L\cap M$. 由投影算子性质(3)，P_LP_M 是在 $L\cap M$ 上的投影算子. 证毕.

定义　设 A 及 B 是 Hilbert 空间 H 上的有界自共轭算子，如果对任何 $x\in H$ 都成立不等式

$$(Ax,x)\leqslant(Bx,x)$$

就说 A 小于或等于 B（也可以说 B 大于或等于 A），记为

$$A\leqslant B\quad 或\quad B\geqslant A$$

定理 7　设 P_L 及 P_M 是 Hilbert 空间 H 中两个投影算子，那末下列命题是彼此等价的：

(i) $P_L \geqslant P_M$.

(ii) $\|P_L x\| \geqslant \|P_M x\|$ 对任何 $x \in H$ 成立.

(iii) $L \supset M$.

(iv) $P_L P_M = P_M$.

(v) $P_M P_L = P_M$.

证 (i)→(ii): 由 $P_L \geqslant P_M$, 对任何 $x \in H$,

$$\|P_L x\|^2 = (P_L x, P_L x) = (P_L x, x) \geqslant (P_M x, x) = \|P_M x\|^2$$

(ii)→(iii): 由 $\|P_L x\| \geqslant \|P_M x\|$, 当 $x \in M$ 时,

$$\|P_L x\|^2 \geqslant \|P_M x\|^2 = \|x\|^2 = \|x - P_L x\|^2 + \|P_L x\|^2$$

所以 $\|x - P_L x\| = 0$, 即 $x = P_L x$, 因此 $x \in L$. 这样就得到 $M \subset L$.

(iii)→(iv): 由 $M \subset L$, 对任何 $x \in H$, $P_M x \in M \subset L$, 所以

$$P_L(P_M x) = P_M x$$

因此 $P_L P_M = P_M$.

(iv)→(v): 当(iv)成立时, $P_L P_M$ 是投影算子, 由定理 6,

$$P_M P_L = P_L P_M = P_M$$

(v)→(i): 当 $P_M P_L = P_M$ 时, 对于 $x \in H$, 成立

$$(P_M x, x) = \|P_M x\|^2 = \|P_M P_L x\|^2 \leqslant \|P_M\| \|P_L x\|^2 \leqslant \|P_L x\|^2$$
$$= (P_L x, x)$$

这就是 $P_M \leqslant P_L$. 证毕.

定义 设 L、M 是 H 的两个闭线性子空间, 而且 $L \supset M$, L 中与 M 直交的向量全体称为 M 在 L 中的**直交补**, 记为 $L \ominus M$, 即

$$L \ominus M = \{x \mid x \in L \text{ 而且 } x \perp M\} = L \cap M^{\perp}$$

定理 8 设 P_L、P_M 是两个投影算子, 那末 $P_L - P_M$ 是投影算子的充要条件是 $L \supset M$. 当 $P_L - P_M$ 是投影算子时, $P_L - P_M = P_{L \ominus M}$.

证 必要性: 如果 $P_L - P_M$ 是投影算子, 由于 $P_L - P_M$ 与 P_M 之和 P_L 是投影算子, 由定理 4, $(P_L - P_M)P_M = 0$. 即 $P_L P_M = P_M$,

再由定理 7 立即得 $L\supset M$.

充分性: 如果 $L\supset M$, 由定理 7, $P_LP_M=P_MP_L=P_M$, 所以

$$(P_L-P_M)^2=P_L^2-P_LP_M-P_MP_L+P_M^2=P_L-P_M-P_M+P_M$$
$$=P_L-P_M$$

因此 P_L-P_M 是幂等的, 但 P_L-P_M 的自共轭性是显然的, 因此根据定理 1, P_L-P_M 是投影算子.

最后, 如果 P_L-P_M 是投影算子, 记它的投影子空间为 L_1, 即 $P_L-P_M=P_{L_1}$, 因而 $P_{L_1}+P_M=P_L$. 由定理 4, $L_1\oplus M=L$. 这表明 L_1 是 L 中与 M 直交的元全体. 即 $L_1=L\ominus M$. 证毕.

系 1 设 P_L 是由 Hilbert 空间到它的闭线性子空间 L 上的投影算子, 那末 $I-P_L$ 是在 $L^\perp$ 上的投影算子.

系 2 设 P_L、P_M 是投影算子, 那末 P_LP_M 成为投影算子的充要条件是 $(L\ominus(L\cap M))\perp(M\ominus(L\cap M))$.

系 2 的证明留给读者.

系 3 设 P_L、P_M 是投影算子, 而且 $P_LP_M=P_MP_L$, 那末 $P_L-P_LP_M+P_M$ 是在 $(L\ominus(L\cap M))\oplus M$ 上的投影算子.

证 因为 $P_LP_M=P_MP_L$, 所以由定理 6, P_LP_M 是在 $L\cap M$ 上的投影算子. 由定理 8, $P_L-P_LP_M$ 是在 $L\ominus(L\cap M)$ 上的投影算子, 由于

$$(P_L-P_LP_M)P_M=P_LP_M-P_LP_M^2=0$$

根据定理 4, $P_L-P_LP_M+P_M$ 是在 $(L\ominus(L\cap M))\oplus M$ 上的投影算子. 证毕.

下面是今后有用的系.

系 4 设 $\{P_n\}$ 是一列投影算子, 如果它是单调序列, 即

$$P_1\leqslant P_2\leqslant\cdots\leqslant P_n\leqslant\cdots(\text{单调上升})\text{或}$$
$$P_1\geqslant P_2\geqslant\cdots\geqslant P_n\geqslant\cdots(\text{单调下降})$$

则 $\{P_n\}$ 必强收敛于一个投影算子.

证　设 $P_1\leqslant P_2\leqslant\cdots\leqslant P_n\leqslant\cdots$，令 $Q_n=P_n-P_{n-1}(n\geqslant 2)$，$Q_1=P_1$．由定理 8 易知 $\{Q_n\}$ 是一列相互直交的投影算子．对 $\{Q_n\}$ 利用定理 5，立即知道存在投影算子 P，

$$Px=\sum_{n=1}^{\infty}Q_nx=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}Q_nx=\lim_{m\to\infty}P_mx,\ x\in H$$

这就是说 $\{P_m\}$ 强收敛于 P．

当 $P_1\geqslant P_2\geqslant\cdots\geqslant P_n\geqslant\cdots$ 时，令 $P'_n=I-P_n$，那末 $\{P'_n\}$ 必是单调上升序列，从而强收敛于投影算子 P'，也就是说 $\{P_n\}$ 强收敛于投影算子 $I-P'$．证毕．

例 3　我们考察 Hilbert 空间 $L^2(\Omega,\boldsymbol{R},\mu)$（此地 $\boldsymbol{R}$ 是 σ-代数，见 §1 例 2）．设 $E\in\boldsymbol{R}$，$\chi_E(x)$ 是 E 的特征函数，P_E 表示 $L^2(\Omega,\boldsymbol{R},\mu)$ 上的如下的算子①：

$$P_Ef=\chi_E(x)f(x)\quad(f\in L^2[\Omega,\boldsymbol{R},\mu])$$

容易验证 P_E 是 $L^2(\Omega,\boldsymbol{R},\mu)$ 的投影算子．对于这种形式的投影算子，$P_EP_F=0$ 相当于 $E\cap F$ 是 μ-零集．当 $E\cap F$ 是 μ-零集时 $P_E+P_F=P_{E\cup F}$．P_E 与 P_F 总是可交换的，且 $P_EP_F=P_{E\cap F}$．$P_E\geqslant P_F$ 相当于 $F-E$ 是 μ-零集，这时 $P_E-P_F=P_{E-F}$．如果 $E_n(n=1,2,\cdots)$ 是有限个或可列个两两不交的 $(\Omega,\boldsymbol{R})$ 可测集，那末

$$\sum_n P_{E_n}=P_{\bigcup\limits_n E_n}$$

上面这些都是可以直接验证的．

3. 投影算子与不变子空间　现在我们来考察对应于算子的不变子空间的投影算子．

定理 9　设 A 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子，M 是 H 中的闭线性子空间．那末 M 是 A 的不变子空间的充要条件是 AP_M

---

①　这里的记号 P_E 的下标 E 并不是 $L^2(\Omega,\boldsymbol{R},\mu)$ 中的闭线性子空间，这点与前面的记号用法不同．

$=P_MAP_M$.

证　必要性：如果M是一个不变子空间，那末当 $x\in M$ 时，$Ax\in M$. 由于对任何 $x\in H$, $P_Mx\in M$, 所以 $AP_Mx\in M$, 因此

$$P_M(AP_Mx)=AP_Mx$$

这等式就说明 $P_MAP_M=AP_M$.

反过来，如果 $P_MAP_M=AP_M$. 那末对任何 $x\in M$, 由

$$P_MAP_Mx=AP_Mx$$

得到 $P_MAx=Ax$, 所以 $Ax\in M$, 所以M是A的不变子空间. 证毕.

定义　设A是 Hilbert 空间H上的有界线性算子，M是H的闭线性子空间，如果M及 $M^\perp=H\ominus M$ 都是A的不变子空间，就称**M是A的约化子空间，或简称M约化A.**

由定理 9 可得下面的系.

系 1　M约化A的充要条件是 $AP_M=P_MA$.

证　必要性：由于M是A的不变子空间，因此由定理 9, $P_MAP_M=AP_M$, 又因 $M^\perp=H\ominus M$ 也是M的不变子空间，而且 $P_{H\ominus M}=I-P_M$. 所以

$$(I-P_M)A(I-P_M)=A(I-P_M)$$

由此即得 $P_MA=P_MAP_M$. 因此 $P_MA=AP_M$.

反过来，如果 $P_MA=AP_M$, 那末 $P_M^2A=P_MAP_M$, 所以 $AP_M=P_MAP_M$. 另外，$(I-P_M)A(I-P_M)=A(I-P_M)-P_MA(I-P_M)=A(I-P_M)$. 这就说明$M$及 $H\ominus M$ 都是A的不变子空间. 因此M约化 A. 证毕.

系 2　M约化A的充要条件是：M同时是A及 A^* 的不变子空间. 特别当A是自共轭算子时，A的不变子空间必定约化A.

证　M成为A及 A^* 的不变子空间的充要条件是

$$P_MAP_M=AP_M,\quad P_MA^*P_M=A^*P_M$$

后一个式子通过两边取共轭可知它等价于 $P_MAP_M=P_MA$. 因此充

要条件变成 $P_MAP_M=AP_M$ 与 $P_MAP_M=P_MA$ 同时成立。但这两个式子等价于 $P_MA=AP_M$。证毕。

例4 类似于例1，在 n 维内积空间 E^n 中，取一组就范直交系 $e_1, e_2, \cdots, e_n$。设自然数 l 适合 $1\leqslant l<n$，又取一个 $n\times n$ 阵 $(a_{\mu\nu})$ 如下：

$$(a_{\mu\nu})=\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ll} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{l+1,l+1} & \cdots & a_{l+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,l+1} & \cdots & a_{nn} \end{Bmatrix} \tag{5.3}$$

根据第五章§1知道，$(a_{\mu\nu})$ 在基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 之下相应于 $E^n\to E^n$ 的一个有界线性算子 A。

由 $\{e_1, \cdots, e_l\}$ 及 $\{e_{l+1}, \cdots, e_n\}$ 分别张成 E^n 的 l 维和 $n-l$ 维子空间 M 及 M'。显然它们都是 A 的不变子空间，而且 $M'=E^n\ominus M$，即 M 和 M' 都是 A 的约化子空间。反之，设 A 是 $E^n\to E^n$ 的任一个线性算子，如果 A 有非平凡的约化子空间 M，那末必定有一组就范直交基 $e_1, \cdots, e_n$，使得在这组基之下，A 相应的阵有如(5.3)的形式。

事实上，设 M 的维数为 l，在 M 中可取就范直交基 e_1、$\cdots$、e_l。$M^\perp=E^n\ominus M$ 是 $n-l$ 维子空间。在 $M^\perp$ 中又取一组就范直交基 e_{l+1}、$\cdots$、e_n；在这组基 e_1、e_2、$\cdots$、e_n 下，A 相应于阵 $(a_{\mu\nu})$。由于 M 是 A 的不变子空间，当 $i\leqslant l$ 时，$Ae_i\in M$，当 $j>l$ 时，$e_j\perp M$，这就立即得到当 $i\leqslant l$，$j>l$ 时，$(Ae_i, e_j)=a_{ji}=0$。类似地由于 $M^\perp$ 为 A 的不变子空间，当 $i>l$，$j\leqslant l$ 时，也成立此式，所以阵 $(a_{\mu\nu})$ 是形如(5.3)式的阵。

习　题

1. 设$\{L_i\}$是Hilbert空间H上一列相互直交的闭子空间. 证明: $\bigoplus_{i=1}^{\infty} L_i = \overline{\text{span}}\{L_i\}$.

2. 设P_L、P_M是Hilbert空间H上两个投影算子. 证明P_LP_M是投影算子的充要条件是$[L\ominus(L\cap M)]\perp[M\ominus(L\cap M)]$.

3. 设P_1和P_2是Hilbert空间H中的两个投影算子, 而且$P_1+P_2-P_1P_2$也是投影算子. 问此时$P_1P_2=P_2P_1$是否成立?

4. 如果定理2中H改为实Hilbert空间, 问定理2是否仍然成立?

5. 设$\{P_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是Hilbert空间$H$上一族(可以不可列个)相互直交的投影算子, P_λ相应的投影子空间是$L_\lambda=P_\lambda H$. 证明: 必存在H上投影算子P, 使对一切$x\in H$, 有

$$Px=\sum_\lambda P_\lambda x$$

(上式右边级数是强收敛); 如记P的投影子空间为L, 那末

$$L=\bigoplus_\lambda L_\lambda$$

其中$\bigoplus_\lambda L_\lambda=\left\{\sum_\lambda x_\lambda \middle| x_\lambda\in L_\lambda, \sum_\lambda\|x_\lambda\|^2<\infty\right\}$, 即$\bigoplus_\lambda L_\lambda=\overline{\text{span}}\{L_\lambda\}$.

6. 设H是Hilbert空间, $\{P_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$是$H$中的一族投影算子. 设$P$是$H$中的投影算子, 而且$P\geqslant P_\alpha$, $\alpha\in\Lambda$, 同时对任何投影算子Q, 当$Q\geqslant P_\alpha$, $\alpha\in\Lambda$时必有$Q\geqslant P$. 这时称P为$\{P_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$的上确界, 记为

$$P=\sup_{\alpha\in\Lambda}P_\alpha$$

类似地可以定义投影算子族的下确界. 证明H中任何一族投影算子的上确界和下确界都存在.

7. 设H是可析的Hilbert空间, $\{P_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$是一族投影算子. 证明必有$\Lambda$的有限或可列子集$\Lambda_0$使得

$$\sup_{\alpha\in\Lambda}P_\alpha=\sup_{\alpha\in\Lambda_0}P_\alpha$$

8. 设P是Hilbert空间$L^2[a,b]$中的投影算子. 如果对于$[a,b]$上任何有界可测函数φ, 都有

$$P(\varphi f)=\varphi Pf,\quad f\in L^2[a,b]$$

证明这时必有$[a,b]$的可测子集M使$PL^2[a,b]=\{f\mid 在M外f(t)=0\}$.

9. 设H是 Hilbert 空间, $\{P_n\}$是H中一列两两直交的非零投影算子. 又设$\{\lambda_n\}$是一个有界数列. 证明在H中必有有界线性算子A使得

$$A=(强)\lim_{N\to\infty}\sum_{\nu=1}^{N}\lambda_\nu P_\nu$$

并且$\{\lambda_\nu\}$是算子A的特征值, λ_ν的相应的特征子空间是$P_\nu H$, 而

$$\|A\|=\sup_\nu|\lambda_\nu|.$$

10. 对于任何幂等的有界线性算子$A\neq0$, 必有$\|A\|\geqslant1$.

11. 设A是Hilbert空间H上有界线性算子, L是H的闭线性子空间. 如果L约化A, 那末

(i) L也必约化A^*;

(ii) 如果A^{-1}存在, 并且是H上有界算子, 那末L也约化A^{-1};

(iii) A_L、$A_{L^\perp}$分别表示A在L、$L^\perp$上的限制, 那末

$$\sigma(A)=\sigma(A_L)\cup\sigma(A_{L^\perp}).$$

12. 设A是Hilbert空间H上有界线性算子, 满足$A^*A-AA^*\geqslant0$, 称A是H上的**亚正常算子**. 证明亚正常算子的零空间$\mathscr{N}(A)$必约化A; 又如果λ是A的特征值, 相应的特征子空间为E_λ, 那末E_λ也约化A(提示: 当A是亚正常时, $A-\lambda I$也是亚正常的).

定义　设Π是 Крейн 空间(参见§3 习题), P是Π上有界线性算子, 如果满足$P^2=P$, $P^\dagger=P$称P是Π上的**投影算子**.

13. 设P是Π上的投影算子, 记$L=\{x\mid Px=x, x\in\Pi\}$. 证明:

(i) L是Π的闭子空间;

(ii) $I-P$也是Π上的投影算子;

(iii) $\Pi=L\oplus L^\perp$, 这里$L^\perp=\{x\mid(I-P)x=x, x\in\Pi\}=\{x\mid Px=0, x\in\Pi\}=\{x\mid[x,y]=0, y\in L\}$;

(iv) L必是Π中非退化的子空间(即L中不存在非零x, 使得$[x,y]=0$对一切$y\in L$成立).

14. 设L是Π上线性子空间, 并且$\Pi=L\oplus L^\perp$. 证明

(i) L是Π的闭子空间, 并且是非退化的;

(ii) 对任何$x\in\Pi$, 有唯一分解: $x=x_L+x_{L^\perp}$, $x_L\in L$, $x_{L^\perp}\in L^\perp$. 作Π上算

子 P: $x\longmapsto x_L$. 证明 P 是 H 上的线性算子, 并且满足 $P^2=P$, $P^*=P$;

(iii) 在(ii)中定义的算子 P 必是 H 上的有界算子(提示: 证明 P 是全空间上定义的闭线性算子, 然后利用闭图象定理可得). (习题 14 是习题 13 的逆命题.)

§6　双线性 Hermite 泛函与自共轭算子

1. 双线性 Hermite 泛函　在本节我们要把内积进一步推广, 引入双线性厄米 (Hermite) 泛函的概念. 以后将用双线性 Hermite 泛函来研究自共轭算子.

设 $(\varphi_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,2,\cdots,n}$ 是 $n\times n$ 方阵, 利用它我们作 E^n 上的一个函数 $\varphi(x,y)$ 如下: 当 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E^n$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in E^n$ 时, 规定

$$\varphi(x,y)=\sum\varphi_{\mu\nu}x_\mu\bar{y}_\nu$$

显然 $\varphi(x,y)$ 对于变元 x 是线性的, 对于变元 y 是共轭线性的, 当方阵 $(\varphi_{\mu\nu})$ 是自共轭阵时, 显然 $\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$. 在线性代数中, $\varphi(x,y)$ 是用来研究方阵的一个工具. 现在我们把它推广到一般的 Hilbert 空间的情况.

定义　设 K 是实数域或复数域, H 是域 K 上的线性空间. $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是取值于 K 中的 H 上的二元泛函. 如果对于任何 x、y、$z\in H$ 及 α、$\beta\in K$, 都成立

$$\varphi(\alpha x+\beta y,z)=\alpha\varphi(x,z)+\beta\varphi(y,z) \tag{6.1}$$

$$\varphi(x,\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}\varphi(x,y)+\bar{\beta}\varphi(x,z) \tag{6.2}$$

那末称 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是 H 上的**双线性泛函**.

由定义可知, 在复空间上, $\varphi(\cdot,\cdot)$ 对于第二个变元来说, 并不是线性的, 而只是共轭线性的. 因此, 在复空间上严格地说不应该称为双线性泛函, 有些书上称它为"一个半"线性泛函.

定义　设 K 是实数域或复数域, H 是域 K 上的线性空间.

$\varphi(\cdot,\cdot)$是H上的二元泛函. 如果对任何x、$y\in H$, 都成立

$$\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)} \tag{6.3}$$

就称$\varphi(\cdot,\cdot)$是H上的 **Hermite** 泛函.

在(6.3)成立时, (6.1)及(6.2)式只要成立一个就可以推出另一个, 但从(6.1)和(6.2)式并不能推出(6.3)式.

定义 设H是内积空间, A是H上的线性算子, 那末称

$$\varphi(x,y)=(Ax,y) \tag{6.4}$$

是由算子A**导出的**泛函.

显然由算子A导出的泛函是H上的双线性泛函. 如果算子A又是自共轭的:

$$(Ax,y)=(x,Ay) \qquad x,y\in H$$

那末, 由算子A导出的泛函φ是双线性 Hermite 泛函.

下面先给出双线性泛函成为 Hermite 泛函的充要条件.

定理1 设H是复线性空间, $\varphi(\cdot,\cdot)$是H上双线性泛函. 那末, φ是 Hermite 泛函的充要条件是$\varphi(x,x)$对一切$x\in H$都是实数.

证 必要性是显然的. 今证明充分性: 由于φ是双线性的, 所以对任何x、$y\in H$, 有

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{4}[\varphi(x+y,x+y)-\varphi(x-y,x-y) \\ +i\varphi(x+iy,x+iy)-i\varphi(x-iy,x-iy)] \tag{6.5}$$

对调x、y的位置, 又有

$$\varphi(y,x)=\frac{1}{4}[\varphi(y+x,y+x)-\varphi(y-x,y-x) \\ +i\varphi(y+ix,y+ix)-i\varphi(y-ix,y-ix)]$$

由假设$\varphi(x,x)$是实数, 易知$\varphi(x,y)$、$\varphi(y,x)$的实部相等; 由于等式

$$\varphi(x+iy, x+iy)=\varphi(i(y-ix), i(y-ix))$$
$$=\varphi(y-ix, y-ix)$$
$$\varphi(x-iy, x-iy)=\varphi(-i(y+ix), -i(y+ix))$$
$$=\varphi(y+ix, y+ix)$$

易知 $\varphi(x, y)$、$\varphi(y, x)$ 的虚部互为反号. 从而 $\varphi(x, y)=\overline{\varphi(y, x)}$. 证毕.

这个定理的证明与 § 4 定理 4 的证明相似. 另外, 当 H 是实空间时, 本定理结论不再成立.

定义　设 φ 是内积空间 H 上的双线性泛函, 如果有正的常数 c 使得

$$|\varphi(x, y)|\leqslant c\|x\|\|y\| \qquad x、y\in H$$

那末称 $\varphi(\cdot, \cdot)$ 是 H 上**有界的双线性泛函**. 当 φ 是有界的双线性泛函时, 记 $\|\varphi\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1,\ \|y\|\leqslant 1}|\varphi(x, y)|$, 称它为泛函 φ 的**范数**.

读者可以证明: 内积空间 H 上双线性泛函 $\varphi(\cdot, \cdot)$ 是有界的充要条件是 φ 是 H 上二元连续函数, 即当 $\|x_n-x\|\to 0$, $\|y_n-y\|\to 0$ 时, $\varphi(x_n, y_n)\to\varphi(x, y)$. 因此有界双线性泛函又称为**连续双线性泛函**.

因此, 如果 A 是有界线性算子, 那末由 A 导出的泛函 φ 是连续的双线性泛函. 这时, 因为 $|\varphi(x, y)|=|(Ax, y)|\leqslant\|A\|\|x\|\|y\|$, 所以 $\|\varphi\|\leqslant\|A\|$. 另一方面, 取 $y=Ax$, 那末 $\|Ax\|^2=|\varphi(x, Ax)|\leqslant\|\varphi\|\|x\|\|Ax\|$, 当 $Ax\neq 0$ 时, $\|Ax\|\leqslant\|\varphi\|\|x\|$, 当 $Ax=0$ 时, 显然仍成立 $\|Ax\|\leqslant\|\varphi\|\|x\|$. 因此又有 $\|A\|\leqslant\|\varphi\|$, 这样就得到 $\|\varphi\|=\|A\|$.

定理 2　设 $\varphi(\cdot, \cdot)$ 是内积空间 H 上的双线性 Hermite 泛函如果有常数 c 使得对任何 $x\in H$ 都成立

$$|\varphi(x, x)|\leqslant c\|x\|^2 \tag{6.6}$$

那末 φ 是有界的, 而且 $\|\varphi\|\leqslant c$.

证 对任何 x、$y\in H$，当$\varphi(x,y)$是实数时，由 φ 的双线性，成立

$$\varphi(x,\ y)=\frac{1}{4}[\varphi(x+y,x+y)-\varphi(x-y,x-y)] \qquad (6.7)$$

因此$|\varphi(x,\ y)|\leqslant\frac{1}{4}[c\|x+y\|^2+c\|x-y\|^2]=\frac{c}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2)$. 当$\varphi(x,y)$不是实数时，记 $\lambda=\frac{\overline{\varphi(x,y)}}{|\varphi(x,y)|}$, $|\lambda|=1$, 这时 $\varphi(\lambda x,y)=\lambda\varphi(x,y)$是实数，所以

$$|\varphi(x,y)|=|\varphi(\lambda x,y)|\leqslant\frac{c}{2}(\|\lambda x\|^2+\|y\|^2)$$

$$=\frac{c}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

对任何实数 $t\neq0$，由上面的不等式得到

$$|\varphi(x,y)|=\left|\varphi\left(tx,\frac{y}{t}\right)\right|\leqslant\frac{c}{2}\left(\|tx\|^2+\frac{\|y\|^2}{t^2}\right) \qquad (6.8)$$

因此，对于 $x\neq0$, $y\neq0$, 在(6.8)式中取 $t^2=\frac{\|y\|}{\|x\|}$就得到

$$|\varphi(x,y)|\leqslant c\|x\|\|y\|$$

当 x, y 中有一个是零向量时，$\varphi(x,\ y)=0$(这可由 φ 的线性推出)，因此上式当然成立. 这就得知φ是有界的并且$\|\varphi\|\leqslant c$. 证毕.

由定理 1 及定理 2 立即可得下述推论.

系 设H是复的内积空间，$\varphi(\cdot,\cdot)$是H上双线性泛函，而且对于 $x\in H$, $\varphi(x,x)$都是实数并有常数 c 使不等式

$$|\varphi(x,x)|\leqslant c\|x\|^2$$

成立，那末对任何 x, $y\in H$, 都成立不等式$|\varphi(x,y)|\leqslant c\|x\|\|y\|$.

现在给出由连续双线性泛函决定连续线性算子的一个条件.

定理 3 设H是 Hilbert 空间，$\varphi(\cdot,\cdot)$是H上有界的双线性泛函，那末必有H上唯一的有界线性算子 A, 使 φ 就是由 A 导出的双线性泛函. 如果 φ 是 Hermite 的，那末 A 是自共轭的.

证　由于 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是 H 上有界的双线性泛函，对于任意固定的 $y\in H$，我们考察 H 上的泛函 $\varphi_y: x\longmapsto \varphi(x,y)$，$(x\in H)$．那末 φ_y 是线性泛函，而由 φ 的有界性，$|\varphi(x,y)|\leqslant c\|x\|\|y\|$，即得

$$\|\varphi_y\|\leqslant c\|y\| \tag{6.9}$$

所以 φ_y 是连续线性泛函．由 Riesz 定理（§4 定理 1），必有 $y^*\in H$，使得对任何 $x\in H$，成立

$$\varphi_y(x)=\varphi(x,y)=(x,y^*) \tag{6.10}$$

y^* 是由 y 所唯一确定的，而且 $\|y^*\|=\|\varphi_y\|$，由(6.9)知 $\|y^*\|\leqslant c\|y\|$．

这样，对于每个 $y\in H$，我们把由(6.10)式决定的 y^* 记为 By，于是就作出了在 H 上定义的映照 B，$B: y\longmapsto y^*$，而且 $\|By\|\leqslant c\|y\|$，B 是由方程

$$\varphi(x,y)=(x,By),\quad x,y\in H \tag{6.10'}$$

所决定的．

现在证明 B 是线性算子．对于任何 x、y、$z\in H$ 及任何两个数 α、β，由于

$$\varphi(x,y)=(x,By),\ \varphi(x,z)=(x,Bz)$$

因而

$$\begin{aligned}\varphi(x,\alpha y+\beta z)&=\bar\alpha\varphi(x,y)+\bar\beta\varphi(x,z)=\bar\alpha(x,By)+\bar\beta(x,Bz)\\&=(x,\alpha By+\beta Bz)\end{aligned}$$

由(6.10′)式，即知 $B(\alpha y+\beta z)=\alpha By+\beta Bz$．所以 B 是有界线性算子．

记 B 的共轭算子为 A，那末对任何 $x,y\in H$，

$$\varphi(x,y)=(x,By)=(Ax,y)$$

所以 φ 是由 A 导出的泛函，前面已经指出，这时 $\|\varphi\|=\|B\|=\|A\|$．

如果 φ 又是 Hermite 的，那末对于 $x,y\in H$，

$$(Ax,y)=\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}=\overline{(Ay,x)}=(x,Ay)$$

所以 A 是自共轭的．算子 A 的唯一性是显然的．证毕．

由此可见，Hilbert 空间上的双线性有界泛函相当于一个有界线性算子．而如果泛函又是 Hermite 的，那末算子就是自共轭的．

2．**有界二次泛函** 为了后面的应用方便，我们再引进下面二次泛函的概念．

定义 设 K 是实数域或复数域，H 是 K 上的内积空间．$\varphi(\cdot)$ 是定义在 H 上的泛函，它满足下面的条件：

(i) 二次齐性：当 $\alpha\in K, x\in H$ 时，$\varphi(\alpha x)=|\alpha|^2\varphi(x)$；

(ii) 平行四边形公式：当 x、$y\in H$ 时，$\varphi(x+y)+\varphi(x-y)=2(\varphi(x)+\varphi(y))$ 那末称 φ 是 H 上的一个**二次泛函**．如果二次泛函使 $\sup\limits_{\|x\|=1}|\varphi(x)|$ 是有限数，就称 φ 是**有界二次泛函**．而数 $\|\varphi\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|\varphi(x)|$ 称为 φ 的范数．如果对一切 $x\in H$，$\varphi(x)$ 是实数，就称 φ 是实二次泛函．

如果 A 是内积空间 H 上的线性算子，那末记

$$\varphi(x)=(Ax,x)\quad(x\in H) \tag{6.11}$$

容易验证 φ 是个二次泛函，由(6.11)式定义的 φ 称为由 A 导出的二次泛函．当 A 是有界线性算子时，由 A 导出的泛函 φ 是有界二次泛函，并且 $\|\varphi\|\leqslant\|A\|$．

设 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是内积空间 H 上的双线性泛函，定义

$$\psi(x)=\varphi(x,x),\quad x\in H$$

易知 $\psi(\cdot)$ 是 H 上的二次泛函，并称 $\psi(\cdot)$ 是由 $\varphi(\cdot,\cdot)$ **导出**的二次泛函．

显然，

$$\|\psi\|\leqslant\|\varphi\|$$

定理 4 设 H 是 Hilbert 空间，φ 是实的有界二次泛函，那末必有 H 上唯一的有界线性的自共轭算子 A，使得 φ 是由 A 导出的

二次泛函. 而且这时$\|\varphi\|=\|A\|$.

证 设H是复空间, 类似于§1的定理2的证明, 在H上作二元泛函

$$\psi(x,y)=\frac{1}{4}[\varphi(x+y)-\varphi(x-y)+i\varphi(x+iy)-i\varphi(x-iy)] \tag{6.12}$$

这时, 由ψ的定义即知$\psi(x,x)=\varphi(x)$.

现证由(6.12)式定义的二元泛函ψ是有界的双线性 Hermite 泛函. 与§1定理2的方法类似, 可以证明对任何x、y、$z\in H$,

$$\psi(x,z)+\psi(y,z)=\psi(x+y,z)$$

从而对任何有理实数r, $\psi(rx,z)=r\psi(x,y)$, 再利用$\psi(x,y)=\overline{\psi(y,x)}$又得到对任何有理实数$r_1$、$r_2$, $\psi(r_1x,r_2y)=r_1r_2\psi(x,y)$. 利用二次齐性及(6.12)式就得到

$$|r_1r_2||\psi(x,y)|=|\psi(r_1x,r_2y)|\leqslant\|\varphi\|(r_1^2\|x\|^2+r_2^2\|y\|^2)$$

如果x、y都不为零, 取两列$\{r_1^{(n)}\}$, $\{r_2^{(n)}\}$, 使得$r_1^{(n)}=\frac{1}{r_2^{(n)}}\to\sqrt{\frac{\|y\|}{\|x\|}}$, 那

$$|\psi(x,y)|\leqslant 2\|\varphi\|\|x\|\|y\|$$

末如果x、y中有一个为零, 由(6.12)式易知此时必有$\psi(x,y)=0$, 显然上式也成立. 由上式立即知道$\psi(x,y)$是二元连续函数, 再利用二元连续性以及对有理数r, $r\psi(x,y)=\psi(rx,y)$的事实, 立即知道$\psi(x,y)$是双线性泛函, 因此$\psi(x,y)$是有界双线性泛函, 并且是 Hermite 泛函.

由定理3, 有H上的有界线性自共轭算子A, 使得

$$(Ax,y)=\psi(x,y),\quad x、y\in H$$

且$\|\psi\|=\|A\|$. 所以$\varphi(x)=\psi(x,x)=(Ax,x)$, $\|\varphi\|=\|\psi\|=\|A\|$.

今证算子A的唯一性. 如果又有B使$(Ax,x)=(Bx,x)$对$x\in H$成立, 用类似于(6.12)的式子可知对一切x、$y\in H$, $(Ax,y)=(Bx,y)$, 所以$A=B$.

当 H 是实空间时只要把(6.12)改成

$$\psi(x,y)=\frac{1}{4}(\varphi(x+y)-\varphi(x-y))$$

其余照旧可以证明. 证毕.

从上述讨论中,读者不难看出:双线性泛函、二次泛函、算子之间的联系非常密切. 因此双线性泛函、二次泛函是研究算子时常用的工具之一. 其次还可以看出,有些结论(例如定理 1)只在复空间中成立,在实空间中就不成立. 在研究内积空间(特别是 Hilbert 空间)上算子时,一般都讨论复空间.

习 题

1. 证明内积空间 H 上双线性泛函 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是有界的充要条件是 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是 H 上二元连续函数.

2. 证明 Hilbert 空间上双线性泛函 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 有界的充要条件是固定一个变元时 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是另一个变元的连续函数.

3. 设 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是内积空间的双线性泛函,如果

$$\sup_{\|x\|=1}|\varphi(x,x)|<+\infty$$

问 φ 是否为有界的?

4. 设 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是复内积空间 H 的双线性泛函,如果对一切 $x\in H$, $\mathrm{Re}\varphi(x,x)=0$,问是否成立等式:

$$\sup_{\|x\|=1,\|y\|=1}|\varphi(x,y)|=\sup_{\|x\|=1}|\varphi(x,x)|$$

5. 设 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是线性空间 H 上的双线性泛函,如果不存在非零 $x\in H$,使得对一切 $y\in H$, $\varphi(x,y)=0$,或者 $\varphi(y,x)=0$. 那末称 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是 H 上非退化的.

证明 Hilbert 空间 H 上有界双线性泛函 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是非退化的充要条件是(按定理 3)相应的有界线性算子 A (由它导出的双线性泛函是 φ) 满足条件: $\mathscr{N}(A)=\{0\}$, $\overline{\mathscr{R}(A)}=H$.

§7　谱系、谱测度和谱积分

1. 几个例　首先我们考察一下线性代数中的情况.

例1　如果 H 是有限维的复欧几里得空间 E^n，A 是 E^n 中的自共轭算子(或者是酉算子)，那末，必有 H 中一组就范直交基 e_1、e_2、…、e_n，使得每个 e_i 都是 A 的特征向量：

$$Ae_i=\lambda_i e_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{7.1}$$

(7.1)式中的 λ_i 都是实数(或 $|\lambda_i|=1$). 这件事相当于一个 Hermite 阵(相应地是酉阵)必可以经过酉变换后成为对角阵. 这就是矩阵或 n 维空间上算子的对角化.

我们记 $P_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为 H 到由 e_i 所张成的一维子空间上的投影算子，这时

$$P_i e_j=\delta_{ij}e_i \quad (i, j=1,2,\cdots,n) \tag{7.2}$$

式中的 δ_{ij} 是 Kronecker 记号. 由(7.1)及(7.2)式，可知 A 有如下的谱分解形式

$$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i, \qquad \sum_{i=1}^{n}P_i=I \tag{7.3}$$

在有限维空间中，任何一个自共轭算子(或酉算子)的形式都是(7.3)式，但是对于无限维的 Hilbert 空间，情况当然要复杂得多. 我们的目的是要找到一般的 Hilbert 空间中自共轭算子(或酉算子)的谱分解形式. 我们先看一下，在无限维的空间中，自共轭算子(或酉算子)会复杂到怎样的程度.

首先在一般无限维 Hilbert 空间中，(7.3)式这种有限和式是完全不够用的.

例2　我们考察 Hilbert 空间 l^2 中如下的算子：我们取定一个有界实数列$\{\lambda_n\}$，作算子 A 如下：当 $x=(x_n)\in l^2$ 时

$$A(x_n)=(\lambda_n x_n)$$

容易证明这是自共轭算子(只要直接验证:对一切 x、$y\in l^2$, $(Ax, y)=(x, Ay)$成立). 记$\{e_n\}$是 l^2 中如下的就范直交基: $e_k=(\delta_{kn})$, δ_{kn} 是 Kronecker 记号. 又令 P_n 是投影算子

$$P_n x=(x, e_n)e_n$$

容易看出这时

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n P_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}P_n=I \tag{7.4}$$

这是一种特殊 Hilbert 空间 l^2 上的自共轭算子, 下面的例子是在一般 Hilbert 空间上,形式更广泛一些, 具有一定代表性的自共轭算子.

例 3 设 H 是 Hilbert 空间. 在 H 中任意取一列两两直交的投影算子 $P_i(i=1, 2, 3, \cdots)$, 再任意取一个有界的实数列$\{\lambda_i\}$, 然后作级数 $A=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i P_i$. 由 §5 习题 9 知道, 级数$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i P_i$ 强收敛于一个有界线性算子 A, 并且$\{\lambda_i\}$都是 A 的特征值,而相应于λ_i 的特征子空间是 $P_i H$, 而$\|A\|=\sup\limits_i|\lambda_i|$. 又由于对任何 n, $A_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i$ 是自共轭算子,根据 §4 的定理 6, A 也是自共轭算子.

如记 $E_n=\sum_{i=1}^{n}P_i$, $E_0=0$, 显然, (7.4)还可写成

$$A=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i \Delta E_i, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\Delta E_i=I \tag{7.4$'$}$$

其中 $\Delta E_i=E_i-E_{i-1}=P_i$, $i=1, 2, \cdots$.

上面用(7.3)式或更一般地用(7.4)表示的算子都是自共轭算子. 但是我们不可能希望自共轭算子都会是这种级数形式的. 因为这种形式的算子至少有一个特点: 它有特征值$\{\lambda_n\}$. 然而确实有这样的自共轭算子,它没有任何特征值.

下面的例子就是没有任何特征值的自共轭算子，它是自共轭算子的另一重要典型.

例 4　在 $L^2[a, b]$ $(-\infty<a<b<\infty)$ 中用下面式子定义算子 A:

$$(Af)(t)=tf(t)\qquad (t\in[a,b], f(t)\in L^2[a,b])$$

容易验证 A 确实是个自共轭算子(只要直接验证: 对任何 f、$g\in L^2[a, b]$, $(Af, g)=(f, Ag)$). 但是 A 没有特征值. 因为如果 λ 是 A 的特征值, f 是相应的非零特征向量, 那末

$$(\lambda I-A)f=0$$

这就是 $(\lambda-t)f(t)\doteq 0$, 因而 $f(t)\doteq 0$, 这就说明 f 是 $L^2[a,b]$ 中的零向量. 这个矛盾就说明 A 不具有特征值.

对于例 4, 我们可继续作如下的考察:

对任何 $\lambda\in[a, b]$, 作 $L^2[a, b]$ 上算子

$$E_\lambda:\ f(t)\longmapsto \chi_{[a,\lambda]}(t)f(t)$$

其中 $\chi_{[a,\lambda]}(t)$ 是 $[a,\lambda]$ 的特征函数. 显然 E_λ 是 $L^2[a, b]$ 上全部有定义的线性算子. 由于对任何 $f(t)\in L^2[a, b]$

$$\begin{aligned}(E_\lambda^2 f)(t)&=E_\lambda(\chi_{[a,\lambda]}(t)f(t))=\chi_{[a,\lambda]}^2(t)f(t)\\&=\chi_{[a,\lambda]}(t)f(t)=(E_\lambda f)(t)\end{aligned}$$

即 $E_\lambda^2=E_\lambda$. 再由于对任何 f、$g\in L^2[a, b]$,

$$\begin{aligned}(E_\lambda f, g)&=\int_a^b \chi_{[a,\lambda]}(t)f(t)\overline{g(t)}\,dt\\&=\int_a^b f(t)\overline{\chi_{[a,\lambda]}(t)g(t)}\,dt\\&=(f, E_\lambda g)\end{aligned}$$

即 $E_\lambda^*=E_\lambda$. 由 §5 定理 1 知 $E_\lambda(\lambda\in[a, b])$ 是 $L^2[a, b]$ 上投影算子.

对任何自然数 n, 作 $L^2[a, b]$ 上算子

$$A_n: f(t) \longmapsto \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\chi_{[a,\lambda_i]}(t) - \chi_{[a,\lambda_{i-1}]}(t)) \right] f(t),$$

$$f(t) \in L^2[a,b]$$

其中 $\lambda_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$, $i=0, 1, 2, \cdots n$. 显然

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Delta E_{\lambda_i}$$

由于

$$\left| t - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\chi_{[a,\lambda_i]}(t) - \chi_{[a,\lambda_{i-1}]}(t)) \right| \leqslant \frac{b-a}{n}, \qquad t \in [a,b]$$

由此可知, 对任何 $f \in L^2[a,b]$,

$$\|(A-A_n)f\|^2 \leqslant \int_a^b \left| t - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\chi_{[a,\lambda_i]}(t) - \chi_{[a,\lambda_{i-1}]}(t)) \right|^2 |f(t)|^2 dt$$

$$\leqslant \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \|f\|^2$$

即 $\|A - A_n\| \leqslant \frac{b-a}{n}$, $n=1, 2, \cdots$, 从而

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Delta E_{\lambda_i} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta E_{\lambda_i} = I \right) \tag{7.5}$$

对照(7.5)、(7.4)′, 启发我们: 要研究 Hilbert 空间(无限维)上自共轭算子的一般形式, 就必须引入投影算子值的"测度"的积分. 本节主要就是要严格地定义投影算子值测度以及对这种测度的积分. 在本节的基础上, 在§9 及§8 中将分别证明 Hilbert 空间上自共轭算子、酉算子都必能表示成某个函数关于投影算子值测度的积分.

2. 谱测度 类似于第二章中的测度概念, 我们引进取值为 Hilbert 空间中投影算子的谱测度. 下面用 $\mathscr{D}$ 表示某个 Hilbert

空间 H 中的投影算子全体.

定义 设 X 是一个集, $\mathbf{R}$ 是 X 的某些子集所成的代数, E 是 $\mathbf{R}\longrightarrow\mathscr{P}$ 的映照,如果它满足下面两个条件:

(i) $E(X)=I$;

(ii) 可列可加性:如果 $\{A_n\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中一列互不相交的元, 而且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathbf{R}$, 那末就有

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}E(A_n)\text{①}$$

这时, 称 E 是 $(X,\mathbf{R})$ 上(H 中)的**谱测度**. 当 $\mathbf{R}$ 是 σ-代数时, 称 $(X,\mathbf{R},E)$ 是 H 中的**谱测度空间**.

引理 1 设 E 是 $(X,\mathbf{R})$ 上的谱测度,那末

(i) $E(\varnothing)=0$;

(ii) 有限可加性:对 $A_i(i=1,2,\cdots n)\in\mathbf{R}$ 且 $\{A_i\}$ 两两不交,有

$$E\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(A_i)$$

(iii) 如果 A、$B\in\mathbf{R}$, 而且 $A\cap B=\varnothing$, 那末, $E(A)E(B)=E(B)E(A)=0$;

(iv) 对于 A、$B\in\mathbf{R}$, $E(A\cup B)=E(A)+E(B)-E(A\cap B)$;

(v) $\{E(A)\mid A\in\mathbf{R}\}$ 是交换算子族.

证 (i) 由 $E(\cdot)$ 的可列可加性, 取 $A_n=\varnothing(n=1,2,\cdots)$, 得到

$$E(\varnothing)=E(\varnothing)+E(\varnothing)+E(\varnothing)+\cdots$$

显然使这式子成立的 $E(\varnothing)$ 只有零算子,所以 $E(\varnothing)=0$.

(ii) 对于有限个两两不交的 $A_i\in\mathbf{R}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 只要令

---

① 这是指 $E\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=(\text{强})\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}E(A_n)$.

$A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，由可列可加性即得有限可加性.

(iii) 当 A、$B\in\boldsymbol{R}$ 且 $A\cap B=\varnothing$ 时，由有限可加性 $E(A\cup B)=E(A)+E(B)$. 但是 $E(A)$、$E(B)$、$E(A\cup B)$都是投影算子，由§5定理4即得

$$E(A)E(B)=E(B)E(A)=0$$

(iv) 对于 A、$B\in\boldsymbol{R}$，因为 $A\cup B=A\cup(B-A\cap B)$，而且 A 与 $B-A\cap B$ 是不交的，所以 $E(A\cup B)=E(A)+E(B-A\cap B)$. 另外 $B-A\cap B$和$A\cap B$ 也是不交的，它们的和集是B，所以 $E(B-A\cap B)+E(A\cap B)=E(B)$. 从而

$$E(A\cup B)=E(A)+E(B)-E(A\cap B) \tag{7.6}$$

(v) 设 A、$B\in\boldsymbol{R}$，由(iii)，如果 $A\cap B=\varnothing$ 时，$E(A)$与 $E(B)$是可交换的. 如果$A\supset B$，那末$E(A)=E(B)+E(A-B)$. 由于 $E(B)$ 和 $E(A-B)$可交换，所以 $E(A)$和 $E(B)$也是可交换的. 由(7.6)式 $E(A)=E(A\cup B)+E(A\cap B)-E(B)$. 因为式中右端三个算子都和 $E(B)$可交换，因而 $E(A)E(B)=E(B)E(A)$. 证毕.

如果$(X,\boldsymbol{R},E)$是一个谱测度空间，那末对于任何 $x\in H$，作 $\boldsymbol{R}$ 上的集函数

$$\mu_x(A)=(E(A)x,x) \qquad (A\in\boldsymbol{R}) \tag{7.7}$$

由谱测度的定义立即就可以知道 $\mu_x(\cdot)$是 $\boldsymbol{R}$ 上全有限的测度. 另外，对于任何 x、$y\in H$，$\boldsymbol{R}$ 上的集函数

$$\mu_{x,y}(A)=(E(A)x,y) \qquad (A\in\boldsymbol{R}) \tag{7.8}$$

是 $\boldsymbol{R}$ 上的广义测度. 这是因为当 H 是实或是复空间时，$\mu_{x,y}$ 分别可表示成

$$\mu_{x,y}=\frac{1}{4}(\mu_{x+y}-\mu_{x-y})$$

或

$$\mu_{x,y}=\frac{1}{4}(\mu_{x+y}-\mu_{x-y}+i\mu_{x+iy}-i\mu_{x-iy})$$

关于广义测度(7.8)的积分，我们用记号

$$\int_X f(t)d(E(t)x,y), \qquad \int_X f(t)(E(dt)x,y)$$

来表示.

我们用 $B(X,\boldsymbol{R})$ 表示可测空间 $(X,\boldsymbol{R})$ 上有界可测函数全体. 对于 $f\in B(X,\boldsymbol{R})$，记 $\|f\|=\sup\limits_{t\in X}|f(t)|$.

定义 设 $(X,\boldsymbol{R},E)$ 是谱测度空间，f 是 $(X,\boldsymbol{R})$ 上的可测函数，如果存在 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子——这个算子记为 $\int f(t)dE(t)$——使得对任何 x、$y\in H$ 都成立

$$\left(\int f(t)dE(t)x,y\right)=\int f(t)d(E(t)x,y). \tag{7.9}$$

那末称 $\int f(t)dE(t)$ 为函数 f 关于谱测度 E 的(弱)**谱积分**.

定理 1 设 $(X,\boldsymbol{R},E)$ 是谱测度空间，$f\in B(X,\boldsymbol{R})$，那末谱积分 $\int f(t)dE(t)$ 唯一地存在，而且谱积分有下列性质：

(i) 线性：对 f、$g\in B(X,\boldsymbol{R})$ 及数 α、β，

$$\int(\alpha f+\beta g)(t)dE(t)=\alpha\int f(t)dE(t)+\beta\int g(t)dE(t);$$

(ii) Hermite 性：当 $f\in B(X,\boldsymbol{R})$ 时，

$$\left[\int f(t)dE(t)\right]^*=\int\overline{f(t)}dE(t)$$

特别当 f 是实值函数时，$\int f(t)dE(t)$ 是自共轭算子；

(iii) 压缩性：当 $f\in B(X,\boldsymbol{R})$ 时，

$$\left\|\int f(t)dE(t)\right\|\leqslant\|f\|$$

(iv) 如果 $A\in\boldsymbol{R}$，χ_A 是集 A 的特征函数，那末

$$\int \chi_A(t)dE(t)=E(A)$$

证 为了证明谱积分的存在，不妨设 $f\in B(X,\mathbf{R})$ 是个实值函数. 作 H 上二元泛函 Φ 如下:

$$\Phi(x,y)=\int f(t)d(E(t)x,y) \qquad (x,y\in H) \qquad (7.10)$$

显然 $\Phi(\cdot,\cdot)$ 是 H 上的双线性 Hermite 泛函. 而且

$$|\Phi(x,x)|=\left|\int f(t)d(E(t)x,x)\right|\leqslant\|f\|(E(X)x,x)$$
$$=\|f\|\|x\|^2$$

由§6的定理1, Φ 是有界的双线性 Hermite 泛函, 又由§6定理4, 必定有 H 上的有界线性的自共轭算子 A, 形式地写 A 为 $\int f(t)dE(t)$, 使得对任何 x、$y\in H$,

$$\left(\int f(t)dE(t)x,\ y\right)=\Phi(x,y)=\int f(t)d(E(t)x,y)$$

而且 $\left\|\int f(t)dE(t)\right\|=\|\Phi\|\leqslant\|f\|$. 对于 f 是复值函数的情况, 只要分成实部和虚部加以讨论就可以了. 谱积分的唯一性是显然的. 至于谱积分的性质(iii), 对于 f 为实有界可测函数已经证明过了, 对于 f 是复有界可测函数将放在定理2的系之后加以证明. 而(i)、(ii)、(iv)都是由(7.9)式直接可以得到的. 证毕.

我们也可以用类似于第三章中的方法来定义可测函数关于谱测度的积分.

定义 设 $(X,\mathbf{R},E)$ 是谱测度空间, $f\in B(X,\mathbf{R})$, f 的值域在 (m,M) 中, 对于分点组 D: $m=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=M$, 作和式

$$S(D)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i E(X(y_{i-1}\leqslant f<y_i)) \quad y_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant y_i \quad (7.11)$$

记 $\delta(D)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(y_i-y_{i-1})$. 如果存在 H 中的有界线性算子——

仍把它记作$\int f(t)dE(t)$——使得对任何 $\varepsilon>0$, 都有 $\delta>0$, 当分点组 D 满足 $\delta(D)<\delta$ 时, 不论 $\xi_i\in[y_{i-1}, y_i]$如何取, 总成立

$$\left\|\int f(t)dE(t)-S(D)\right\|<\varepsilon$$

那末就称$\int f(t)dE(t)$是函数 f 关于谱测度E的**(一致)谱积分**.

当 f 是复值函数时, 如果 f 的实部 f_1、虚部 f_2 的(一致)谱积分存在, 那末规定 f 的一致谱积分

$$\int f(t)dE(t)=\int f_1(t)dE(t)+i\int f_2(t)dE(t)$$

显然, 如果 f 关于谱测度E的一致谱积分存在, 那末一致谱积分必定就是弱谱积分.

定理 2 设(X, R, E)是谱测度空间, $f\in B(X, R)$是实值函数, 那末f 关于E的弱谱积分就是一致谱积分.

证 我们用$\int f(t)dE(t)$表示弱谱积分. 对于分点组 D: $m=y_0<y_1<\cdots<y_n=M$ 及 $\xi_i\in[y_{i-1}, y_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, 作函数 g 如下: 当 $t\in X(y_{i-1}\leqslant f(t)<y_i)$时

$$g(t)=\xi_i$$

由定理 1 中弱谱积分的性质(i)及(iv)可知由 (7.11)定义的 $S(D)$就是函数 g 关于E的弱谱积分. 所以

$$\left\|\int f(t)dE(t)-S(D)\right\|=\left\|\int[f(t)-g(t)]dE(t)\right\|$$

但由 g 的作法, 可知$\|f-g\|\leqslant\delta(D)\left(=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(y_i-y_{i-1})\right)$. 因此由定理 1 的性质(iii)就知道, 对任何 $\varepsilon>0$, 当分点组 D使 $\delta(D)<\varepsilon$ 时, 对任何 $\xi_i\in[y_{i-1}, y_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$,

$$\left\|\int f(t)dE(t)-S(D)\right\|\leqslant\delta(D)<\varepsilon$$

因此，$\int f(t)dE(t)$也就是f关于E的一致谱积分．证毕．

系1 对于$f\in B(X, \mathbf{R})$，$\int f(t)dE(t)$与所有的$E(A)$，$A\in\mathbf{R}$可交换，对于f、$g\in B(X, \mathbf{R})$，$\int f(t)dE(t)$和$\int g(t)dE(t)$可交换．

证 对于实值的f、$g\in B(X, \mathbf{R})$，$\int f(t)dE(t)$及$\int g(t)dE(t)$都是形为(7.11)的和式的极限，而$E(\cdot)$都是可交换的（引理1的(v)），所以$\int f(t)dE(t)$和$\int g(t)dE(t)$可交换．对复值函数可以分成实部和虚部来讨论．系1的前一半结论由定理1的(iv)即得．

系2 对于f、$g\in B(X, \mathbf{R})$，成立着

$$\int f(t)g(t)dE(t)=\int f(t)dE(t)\int g(t)dE(t) \tag{7.12}$$

$$\left(\int f(t)dE(t)x, \int g(t)dE(t)y\right)=\int f(t)\overline{g(t)}d(E(t)x, y) \tag{7.13}$$

证 先设f、g都是实值函数．我们逐步来证明(7.12)式：如果f、g都是$\mathbf{R}$中元的特征函数，$f(t)=\chi_A(t)$，$g(t)=\chi_B(t)$．而$f(t)g(t)=\chi_{A\cap B}(t)$，由定理1的(iv)，(7.12)式的左面是$E(A\cap B)$，右面是$E(A)E(B)$，而由引理1(ii)及(iii)，$E(A)E(B)=[E(A\cap B)+E(A-B)]E(B)=E(A\cap B)E(B)=E(A\cap B)$，因此(7.12)式成立．进一步，如果$f$和$g$都是简单函数①，就是说

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}(t), \qquad g(t)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_{B_j}(t)$$

---

① $\mathbf{R}$中有限个元的特征函数的线性组合称为简单函数，它可以表示成$\mathbf{R}$中有限个两两不交的元的特征函数的线性组合．

其中 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$, $B_j(j=1,2,\cdots,m)$是 $\mathbf{R}$ 中分别互不相交的元. 这时

$$\int f(t)dE(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i E(A_i),$$

$$\int g(t)dE(t)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j E(B_j)$$

$$\int f(t)g(t)dE(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j E(A_i\cap B_j) \tag{7.14}$$

由于 $E(A\cap B)=E(A)E(B)$, 由(7.14)式即知(7.12)式成立. 对于实值的 f、g, 如定理 2 证明中对 f 作函数 g 那样地, 可以作出 f_n 及 g_n 都是简单函数, 而且 f_n、g_n 分别一致收敛于 f 及 g. 这时, $f_n g_n$ 一致收敛于 fg. 注意到定理 1 的(iii), 得到

$$\begin{aligned}\int f(t)g(t)dE(t)&=\lim_{n\to\infty}\int f_n(t)g_n(t)dE(t)\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\int f_n(t)dE(t)\int g_n(t)dE(t)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\int f_n(t)dE(t)\lim_{n\to\infty}\int g_n(t)dE(t)\\&=\int f(t)dE(t)\int g(t)dE(t)\end{aligned}$$

式中的极限都是指一致的极限. 所以(7.12)对实值函数成立. 对复值函数的情况, 只要分成实部和虚部来讨论就可以了. 由(7.12)立即可得(7.13). 证毕.

我们现在再回到定理 1 的性质(iii), 当时我们只是对实值的 $f\in B(X,\ \mathbf{R})$进行了证明. 当 f 是复值时, 由 §4 定理 3 的(ii)及(7.12)得到

$$\left\|\int f(t)dE(t)\right\|^2=\left\|\int\overline{f(t)}dE(t)\int f(t)dE(t)\right\|$$

$$=\left\|\int |f(t)|^2 dE(t)\right\| \leqslant \|f\|^2$$

这样就证明了(iii)对于复值函数 f 也是成立的.

系 2 的结论对于普通数值测度的积分是不成立的，它是谱测度积分所特有的重要性质.

3. 谱系 直线上勒贝格-斯蒂阶测度是和单调增加右连续函数(分布)相对应的. 和勒贝格-斯蒂阶测度一样, 直线上的谱测度空间上的谱测度是和直线上单调增加右连续，但取值是投影算子的函数相对应的. 为此, 下面我们讨论以 $\lambda\in(-\infty,\infty)$ 为自变数, 取值为有界线性算子的算子值函数 E_λ. 当 $\lambda\to\lambda_0+0$(即 λ 从 λ_0 的右方趋向于 λ_0)时, 如果 E_λ 有强极限, 极限值就记为 E_{λ_0+0}, 类似地定义 E_{λ_0-0}.

定义 设 H 是 Hilbert 空间, $\{E_\lambda\}$是以 $\lambda\in(-\infty,\infty)$ 为参数的一族投影算子, 如果它满足:

(i) 单调性: 对任何两个实数 λ、μ, 当 $\lambda\geqslant\mu$ 时, $E_\lambda\geqslant E_\mu$;

(ii) 右连续性: 对任何 $\lambda_0\in(-\infty,\infty)$, $E_{\lambda_0+0}=E_{\lambda_0}$;

(iii) (强) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}E_\lambda=0$, (强) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E_\lambda=I$,

那末就称$\{E_\lambda\}$是一个**谱系**.

首先我们注意, 当$\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$是谱系时, 对任何 λ、$\mu\in(-\infty,\infty)$, $\lambda\geqslant\mu$, 由于 $E_\lambda\geqslant E_\mu$, 根据 §5 定理 7, $E_\lambda E_\mu=E_\mu E_\lambda=E_\mu$.

例 5 在 Hilbert 空间 H 中, 取 n 个两两直交的投影算子 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$, 它们满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}P_i=I$, 再取 n 个实数 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$, 令

$$E_\lambda=\sum_{\lambda_i\leqslant\lambda}P_i$$

(当 $\lambda<\min\limits_i\lambda_i$ 时, 规定 $E_\lambda=0$), 那末可以直接验证$\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,$

$\infty)\}$是谱系.

例6　在 Hilbert 空间 H 中，任意取一列两两直交的投影算子 $P_i(i=1,2,3,\cdots)$，它满足$\sum_{i=1}^{\infty}P_i=I$，又任取一列实数$\{\lambda_i\}$，记

$$E_\lambda=\sum_{\lambda_i\leqslant\lambda}P_i$$

(当 $\lambda<\inf\lambda_i$ 时规定 $E_\lambda=0$)，下面验证 $\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,\ \infty)\}$ 是谱系.

首先，E_λ 是有限个或可列个两两直交的投影算子的和，所以 E_λ 是投影算子.

(i) 当 $\lambda>\mu$ 时，$E_\lambda=\sum\limits_{\lambda_i\leqslant\lambda}P_i=\sum\limits_{\lambda_i\leqslant\mu}P_i+\sum\limits_{\mu<\lambda_i\leqslant\lambda}P_i=E_\mu+\sum\limits_{\mu<\lambda_i\leqslant\lambda}P_i$.

由于 $\sum\limits_{\mu<\lambda_i\leqslant\lambda}P_i\geqslant0$，所以 $E_\lambda\geqslant E_\mu$.

(ii) 对于$\lambda>\lambda_0$，$E_\lambda-E_{\lambda_0}=\sum\limits_{\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda}P_i$. 所以要证明 E_λ 在 λ_0 处的右连续性，只要证明 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0}\sum\limits_{\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda}P_i=0$ 就可以了.

实际上，对任何 $x\in H$，由于$\{P_i\}$两两直交，所以

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|P_ix\|^2\leqslant\|x\|^2$$

记 $M_\lambda=\{i|\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda\}$，$m_\lambda=\min\limits_{i\in M_\lambda}i$(当 M_λ 是空集时规定 $m_\lambda=\infty$)，显然当 $\lambda<\lambda'$ 时，$M_\lambda\subset M_{\lambda'}$，而且 $\bigcap\limits_{\lambda>\lambda_0}M_\lambda=\varnothing$，所以 m_λ 当 $\lambda\in(\lambda_0,\infty)$时是单调不增的函数，而且 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0}m_\lambda=\infty$. 但由于

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda}P_ix\Big\|^2&=\sum_{\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda}\|P_ix\|^2\\&=\sum_{i\in M_\lambda}\|P_ix\|^2\leqslant\sum_{i=m_\lambda}^{\infty}\|P_ix\|^2\end{aligned}$$

当 $\lambda\to\lambda_0+0$ 时，上式的右端趋于零，所以

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0+0}\left\|\sum_{\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda}P_i x\right\|^2=0$$

这就说明当 $\lambda\to\lambda_0+0$ 时，$E_\lambda-E_{\lambda_0}$ 强收敛于零．因此 E_λ 是右连续的．

(iii) 的证明与(ii)是类似的．只要记 $\widetilde{M}_\lambda=\{i\mid\lambda_i\leqslant\lambda\}$ 及 $\widetilde{m}_\lambda=\min\limits_{i\in\widetilde{M}_\lambda}i$，这时当 $\lambda\to-\infty$ 时有 $\widetilde{m}_\lambda\to\infty$，由于对任何 $x\in H$，

$$\|E_\lambda x\|^2=\left\|\sum_{\lambda_i\leqslant\lambda}P_i x\right\|^2=\sum_{i\in\widetilde{M}_\lambda}\|P_i x\|^2\leqslant\sum_{i=\widetilde{m}_\lambda}^{\infty}\|P_i x\|^2$$

所以 $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\|E_\lambda x\|^2=0$，即 $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}E_\lambda=0$．同理可证 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E_\lambda=I$．

由上所述，可知 $\{E_\lambda\mid\lambda\in(\infty,\infty)\}$ 是谱系．

例 7 在 Hilbert 空间 $L^2[0,1]$ 中，对实数 λ，记 $(-\infty,\lambda]$ 上的特征函数 $\chi_{(-\infty,\lambda]}(t)$ 为 $e_\lambda(t)$，作算子 E_λ 如下：

$$E_\lambda f=e_\lambda(t)f(t),\qquad f\in L^2[0,1]$$

现在来验证这样作出的 $\{E_\lambda\mid\lambda\in(-\infty,\infty)\}$ 是个谱系．

首先，由于 $e_\lambda(t)$ 是有界的实值函数，而且 $e_\lambda^2(t)=e_\lambda(t)$，所以 E_λ 是幂等的自共轭算子，即 E_λ 是投影算子．

(i) 当 $\lambda\geqslant\mu$ 时，$e_\lambda(t)e_\mu(t)=e_\mu(t)e_\lambda(t)=e_\mu(t)$，所以 $E_\lambda E_\mu=E_\mu E_\lambda=E_\mu$，由 §5 定理 7 可知 $E_\lambda\geqslant E_\mu$．

(ii) 因为对任何 $f(t)\in L^2[0,1]$，由勒贝格控制收敛定理，

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_0^1|e_\lambda(t)-e_{\lambda_0}(t)|^2|f(t)|^2dt=0$$

也就是 $(E_\lambda-E_{\lambda_0})f$ 收敛于零（$\lambda\to\lambda_0$ 时），所以 E_λ 是强连续的．

(iii) 当 $\lambda\leqslant0$ 时，$E_\lambda=0$，当 $\lambda\geqslant1$ 时，$E_\lambda=I$．

这样就证明了 $\{E_\lambda\mid\lambda\in(-\infty,\infty)\}$ 是 $L^2[0,1]$ 中的谱系．

上面我们举了一些谱系的例子．现在再对它进行一些讨论．

首先我们可以把谱系定义中的强收敛改为弱收敛.

定理 3　设$\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$是 Hilbert 空间 H 中一族投影算子,满足如下的条件:

(i) 单调性:当 $\lambda\geqslant\mu$ 时 $E_\lambda\geqslant E_\mu$;

(ii) 对一切 $\lambda_0\in(-\infty,\infty)$, $E_{\lambda_0}=$(弱)$\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0}E_\lambda$;

(iii) (弱)$\lim\limits_{\lambda\to-\infty}E_\lambda=0$,(弱)$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E_\lambda=I$;

那末 E_λ 是一个谱系.

证　由(弱)$\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0}E_\lambda=E_{\lambda_0}$,即知 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0}((E_\lambda-E_{\lambda_0})x,x)=0$. 但是因为 $\lambda>\lambda_0$ 时, $E_\lambda-E_{\lambda_0}$ 是投影算子,所以

$$\|(E_\lambda-E_{\lambda_0})x\|^2=((E_\lambda-E_{\lambda_0})x,x)$$

因而弱收敛与强收敛是等价的. 所以$\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$满足谱系的条件 (ii). 条件 (iii) 也可以类似地验证. 从而 $\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$是谱系. 证毕.

定理 3′　设$\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$是 Hilbert 空间 H 上的一族投影算子, 那末 $\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$成为谱系的充要条件是对于任何 $x\in H$, 函数 $F_x(\lambda)=(E_\lambda x,x)$满足下列条件:

(i) F_x 是单调不减的,即当 $\lambda>\mu$ 时 $F_x(\lambda)\geqslant F_x(\mu)$;

(ii) F_x 是右连续函数;

(iii) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}F_x(\lambda)=0$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}F_x(\lambda)=\|x\|^2$.

证　必要性:是显然的. 由谱系的条件即可推出定理中的 (i)—(iii).

充分性:如果投影算子族$\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$使 $F_x(\lambda)=(E_\lambda x,x)$满足定理中的三个条件. 根据 §5 定理 7, 对每个 x, 由 F_x 的单调性就得到$\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$的单调性. 又由 F_x 的右连续性可得

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0+0}\|(E_\lambda-E_{\lambda_0})x\|^2=\lim_{\lambda\to\lambda_0+0}((E_\lambda-E_{\lambda_0})x,x)$$

$$= \lim_{\lambda \to \lambda_0 + 0} (E_\lambda x, x) - (E_{\lambda_0} x, x) = 0$$

因此 $\{E_\lambda | \lambda \in (-\infty, \infty)\}$ 是右连续的. 对于 $\lambda \to \pm\infty$ 的情形也由类似的计算可以说明. 所以$\{E_\lambda | \lambda \in (-\infty, \infty)\}$是谱系. 证毕.

如果$\{E_\lambda | \lambda \in (-\infty, \infty)\}$是个谱系，而且有有限数 m、M，使得当 $\lambda < m$ 时 $E_\lambda = 0$ (E_m 可以不是 0)，当 $\lambda \geq M$ 时 $E_\lambda = I$，就称$\{E_\lambda | \lambda \in (-\infty, \infty)\}$是在区间$[m, M]$上的谱系. 区间$[m, M]$上谱系又常写成$\{E_\lambda | \lambda \in [m, M]\}$.

4. 谱系和谱测度的关系 前面我们已经分别讨论了谱系$\{E_\lambda | \lambda \in (-\infty, \infty)\}$及谱测度空间$(X, \boldsymbol{R}, E)$. 现在我们讨论两者的关系. 设$X$是实数全体 E^1, $\boldsymbol{R}$ 取为直线上 Borel 集全体所成的 σ-代数 $\boldsymbol{B}$, 这时, $(E^1, \boldsymbol{B})$上的谱测度和谱系有密切的关系.

容易看到, 如果$(E^1, \boldsymbol{B}, E)$是个谱测度空间, 那末我们利用谱测度E可以造出一个谱系如下: 对于 $\lambda \in (-\infty, \infty)$, 令

$$E_\lambda = E((-\infty, \lambda]) \qquad (\lambda \in (-\infty, \infty)) \tag{7.15}$$

由谱测度的定义, 立即可推知由(7.15)所作的$\{E_\lambda | \lambda \in (-\infty, \infty)\}$是谱系. 称它为由谱测度 $E(\cdot)$ 导出的谱系.

下面我们要从一个谱系 $\{E_\lambda | \lambda \in (-\infty, \infty)\}$ 出发来定义出在$(E^1, \boldsymbol{B})$ 上的谱测度 $E(\cdot)$, 使得它导出的谱系 $\{E_\lambda | \lambda \in (-\infty, \infty)\}$就是$\{E_\lambda | \lambda \in (-\infty, \infty)\}$, 即使得(7.15)式成立. 我们把直线 E^1 上的左开右闭区间$(a, b]$全体, 再加上$(-\infty, a]$, $(-\infty, \infty)$后的集类所张成的环记作 $\boldsymbol{B}_0$. 由于$(-\infty, \infty) \in \boldsymbol{B}_0$, 所以 $\boldsymbol{B}_0$ 是由 E^1 的子集所成的代数. 如果我们把$(a, b]$、$(-\infty, a]$、$(-\infty, \infty)$都称作“左开右闭的区间”, 那末 $\boldsymbol{B}_0$ 中元都可表示成有限个两两不交的左开右闭的区间的和集. 为方便起见, $(a, +\infty)$也记成$(a, +\infty]$.

定义 设$\{E_\lambda | \lambda \in (-\infty, \infty)\}$是谱系, 而$E$是 $\boldsymbol{B}_0$ 上的谱测度, 如果(7.15)式成立, 就称 $E(\cdot)$是由 $\{E_\lambda | \lambda \in (-\infty, \infty)\}$ 导出的**谱测度**.

引理 2　设$\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$是谱系，那末它必定在 $\boldsymbol{B}_0$ 上导出唯一的谱测度.

证　对于$-\infty\leqslant a\leqslant b\leqslant+\infty$，作

$$E((a,b])=E_b-E_a$$

上式中 $E_{+\infty}$、$E_{-\infty}$ 分别理解为 I 及 0.

对于任何 $\Delta\in\boldsymbol{B}_0$，如果$\Delta=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i,b_i]$而且$(a_i,b_i](i=1,2,\cdots,n)$是两两不交的，那末令 $E(\Delta)=\sum\limits_{i=1}^{n}(E_{b_i}-E_{a_i})$. 和第二章 § 2 中 $\boldsymbol{R}_0$ 上测度 m 的情况相仿可证，这里的 $E(\Delta)$ 与 $\Delta=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$的分解形式无关.

显然 $E((-\infty,\lambda])=E_\lambda$. 今证明 E 是 $(E^1,\boldsymbol{B}_0)$ 上的谱测度. 由于$\{E_\lambda|-\infty<\lambda<\infty\}$是谱系，容易看出，对每个 $A\in\boldsymbol{B}_0$，$E(A)$是投影算子，而且 $E((-\infty\ \infty))=I$. 因此只要证明E的可列可加性.

任意取定 $x\in H$，作 E^1 上函数 $g_x(\lambda)=(E_\lambda x,x)$，$-\infty<\lambda<\infty$，它是单调增加的右方连续函数. 和第二章 § 2一样，利用 $g_x(\lambda)$作 $\boldsymbol{B}_0$ 上的集函数 μ_x 如下：当 $A\in B_0$ 而且 A 表示成为有限个互不相交的$(a_i,b_i]$的和时，

$$\mu_x(A)=\sum_{i=1}^{n}(g_x(b_i)-g_x(a_i))$$

利用第二章 § 2 的方法可证 μ_x 是$(E^1,\boldsymbol{B}_0)$上的测度，因此当$\{A_n\}\subset\boldsymbol{B}_0$ 是一族互不相交的集，而且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\boldsymbol{B}_0$ 时，

$$\mu_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_x(A_n)$$

这就证明了

$$\left(E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)x, x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(E(A_n)x, x)$$

利用类似于§6 定理 5 的方法(即用极化恒等式),立即可知对任何 x、$y\in H$,

$$\left(E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)x, y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(E(A_n)x, y)$$

所以 E 是由 $\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$ 导出的谱测度. 证毕.

谱测度和通常测度一样也有下面的延拓定理.

定理 4 设 E 是 $(X, \boldsymbol{R})$($\boldsymbol{R}$ 是一个代数)上的谱测度. 设 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 是包含 $\boldsymbol{R}$ 的最小 σ-代数. 那末必唯一地有 $(X, \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}))$ 上的谱测度 $\tilde{E}$, 使得当 $A\in\boldsymbol{R}$ 时, $\tilde{E}(A)=E(A)$.

证 对每个 $x\in H$, 作 $(X, \boldsymbol{R})$ 上的测度 μ_x 如下:

$$\mu_x(A)=(E(A)x, x), \quad A\in\boldsymbol{R}, \tag{7.16}$$

那末 $\mu_x(X)=\|x\|^2$. 根据第二章§4, 它必定可以唯一地延拓成 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 上的一个测度 μ_x^*. 当 $A\in\boldsymbol{R}$ 时, 由(7.16)显然有

$$\mu_{x+y}(A)+\mu_{x-y}(A)=2\mu_x(A)+2\mu_y(A)$$

当我们把上式左右两边分别看作 $\boldsymbol{R}$ 上的测度, 并把它们分别延拓成 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 上的测度时, 左右两边分别为 $\mu_{x+y}^*(A)+\mu_{x-y}^*(A)$, $2\mu_x^*(A)+2\mu_y^*(A)$, 由延拓的唯一性, 可以知道, 当 $A\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 时

$$\mu_{x+y}^*(A)+\mu_{x-y}^*(A)=2\mu_x^*(A)+2\mu_y^*(A)$$

类似地, 当 α 为数时

$$\mu_{\alpha x}^*(A)=|\alpha|^2\mu_x^*(A)$$

又因为 $0\leqslant\mu_x^*(A)\leqslant\mu_x^*(X)=\|x\|^2$. 因此当固定 $A\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 时, H 上的泛函 $\mu_x^*(A)$ 是有界的实二次泛函. 由§6 定理 4, 必有 H 中唯一的自共轭算子——记它是 $\tilde{E}(A)$ 使得

$$(\tilde{E}(A)x, x)=\mu_x^*(A)$$

这样得到由 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 到 H 上有界线性自共轭算子全体 $\mathscr{A}$ 中的一个映照 $\tilde{E}$(就是说，当 $A\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 时，$\tilde{E}(A)$ 是自共轭算子)．由 $\mu_x^*(A)$ 对 A 的可列可加性得知，当 $\{A_n\}\subset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ 而且互不相交时，对一切 x、$y\in H$ 有

$$\left(\tilde{E}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)x,y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{E}(A_n)x,y) \tag{7.17}$$

我们只要证明 $\tilde{E}(A)\in\mathscr{P}$($\mathscr{P}$ 表示空间 H 中的投影算子全体)，那末 $\tilde{E}$ 就是谱测度．我们令

$$\boldsymbol{M}=\{A\,|\,A\in\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}),\ \tilde{E}(A)\in\mathscr{P}\}$$

由于 μ_x^* 是 μ_x 的延拓，显然当 $A\in\boldsymbol{R}$ 时 $\tilde{E}(A)=E(A)$，所以 $\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{M}$．我们证明 $\boldsymbol{M}$ 是单调类：因为 $X\in\boldsymbol{M}$，所以只要考察 $\boldsymbol{M}$ 是否对单调增加集列的极限运算封闭就可以了．假设 $B_1\subset B_2\subset\cdots\subset B_n\subset\cdots$ 是 $\boldsymbol{M}$ 中一列集，记 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(B_n-B_{n-1})$．因为

$$(\tilde{E}(B_n)x,x)\geqslant(\tilde{E}(B_{n-1})x,x)$$

所以 $\tilde{E}(B_n)\geqslant\tilde{E}(B_{n-1})$，从而 $\tilde{E}(B_n-B_{n-1})=\tilde{E}(B_n)-\tilde{E}(B_{n-1})\in\mathscr{P}$．由(7.17)可知

$$\tilde{E}(A)=(\text{弱})\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{E}(B_n)-\tilde{E}(B_{n-1}))+\tilde{E}(B_1)=\lim_{n\to\infty}\tilde{E}(B_n)$$

利用§5定理5的证明方法可以证明 $\tilde{E}(A)\in\mathscr{P}$．所以 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\in\boldsymbol{M}$ 因此 $\boldsymbol{M}$ 是单调类．由第二章§1定理4的系可知 $\boldsymbol{M}\supset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$，所以 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$．因此 $\tilde{E}$ 是谱测度而且它是 E 的延拓．唯一性是明显的．证毕．

当 $\{E_\lambda\,|\,\lambda\in(-\infty,\infty)\}$ 是 H 中的谱系时，根据引理2它导出 $(E^1,\boldsymbol{B}_0)$ 上的一个谱测度 E．由于 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}_0)$ 是 E^1 上 Borel 集全体所成的 σ-代数 $\boldsymbol{B}$，根据定理4，E 延拓成 $(E^1,\boldsymbol{B})$ 上的谱测度．我们

仍然把它记为E,称它是由$\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$在$(E^1,\boldsymbol{B})$上导出的谱测度. 由定理1, 当$f\in\boldsymbol{B}(E^1,\boldsymbol{B})$时, 存在谱积分$\int f(\lambda)dE(\lambda)$. 我们有时把$\int f(\lambda)dE(\lambda)$写成函数$f(\cdot)$关于谱系$\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$的积分的形式:

$$\int f(\lambda)dE_\lambda$$

定理5 设$\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$是$H$中的谱系,$E$是由这个谱系导出的$(E^1,\boldsymbol{B})$上的谱测度. 任取$E^1$中的非空开集$O$, 设它的构成区间全体是$\{(a_i,b_i)\}$, 那末

$$E(O)=\sum_i(E_{b_i-0}-E_{a_i}) \tag{7.18}$$

其中 $E_{b_i-0}=(\text{强})\lim\limits_{\substack{\lambda<b_i\\\lambda\to b_i}}E_\lambda$.

证 由E的可列可加性, 只要对$O=(a,b)$的情况来证明(7.18)好了. 取一列$\{b_n\}$, $a<b_n<b$, $b_n\to b$, 那末$(a,b_n]$, $n=1,2,\cdots$是一列单调增加的集列, 而且它的和集是(a,b). 由E的可列可加性容易看出

$$\begin{aligned}E((a,b))&=(\text{强})\lim_{n\to\infty}E((a,b_n])\\&=(\text{强})\lim_{n\to\infty}(E_{b_n}-E_a)=E_{b-0}-E_a\end{aligned}$$

证毕.

习　题

1. 设$(X,\boldsymbol{R},P)$是Hilbert空间H中的谱测度空间, 设有$x_0\in H$使$\{P(E)x_0|E\in\boldsymbol{R}\}$张成$H$. 证明必有$(X,\boldsymbol{R})$上的全有限测度$\mu$, 以及$H$到$L^2(X,\boldsymbol{R},\mu)$上的线性同构$U$,满足$\|Ux\|=\|x\|$, $x\in H$, 并使得当$E\in\boldsymbol{R}$时, $\hat{P}(E)=UP(E)U^{-1}$是如下的投影算子: 对一切$f\in L^2(X,\boldsymbol{R},P)$

$$(\hat{P}(E)f)(x)=\chi_E(x)f(x)$$

此地 $\chi_E(\cdot)$是集E的特征函数.（提示：令$U:P(E)x_0\to\chi_E(x)$.）

2. 设$(X, \boldsymbol{R}, E)$是复 Hilbert 空间H中的谱测度空间，f是$(X, \boldsymbol{R})$上的有界可测函数，$A=\int_X f(x)dE(x)$. 那末$\lambda\in\rho(A)$的充要条件是存在$E_0\in\boldsymbol{R}$，$E(E_0)=0$，使得$\inf\limits_{x\in X-E_0}|f(x)-\lambda|>0$.

3. 记H为复$L^2(-\infty,\infty)$，对每个实数a，作H上算子$U(a)$、$V(a)$如下：当$f\in H$时，

$$(U(a)f)(x)=e^{iax}f(x)$$
$$(V(a)f)(x)=f(x+a)$$

设$(E^1, \boldsymbol{B}, P)$是取值于H上的谱测度空间. 如果存在一个实常数c，对任何$E\in\boldsymbol{B}$，$f\in H$，

$$P(E)f=\chi_{\tau_{-c}E}(x)f(x) \tag{7.19}$$

此地$\tau_a E=\{x-a|x\in E\}$. 证明：对一切实数a，

$$U(a)P(E)=P(E)U(a) \tag{7.20}$$
$$V(a)P(E)=P(\tau_a E)V(a) \tag{7.21}$$

4. 证明习题 3 的逆命题也成立，即满足(7.20)、(7.21)的谱测度P必为(7.19)的形式. 证明时可分成下列几个命题逐步完成.

(i) 如果$f\in P(E)H$，那末对任何实数α，$e^{i\alpha x}f(x)\in P(E)H$；

(ii) 取$E_n=(0, n]$（n为自然数），又取α：$|\alpha|\geqslant n$，那末

$$P(E_n)V(\alpha)P(E_n)=0;$$

(iii) 对任何f、$g\in P(E_n)H$，当$|\alpha|\geqslant n$时，那末

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta x}\overline{g(x)}f(x+\alpha)dx=0$$

对一切实数β成立；

(iv) 利用(iii)以及$L^1(-\infty,\infty)$中 Fourier 变换唯一性，证明必存在仅依赖于n的正数m_n，一切$P(E_n)H$中函数在$[-m_n, m_n]$外几乎处处为零；

(v) 设$\varphi\in H$，并且φ是在$[-k, k]$（k是自然数）外为零的 Borel 可测函数，记$F=\{x|\varphi(x)\neq 0\}$. 证明由$\{e^{i\alpha x}\varphi(x)|\alpha\in R^1\}$张成的线性子空间在 Hilbert 空间$L^2(F, \boldsymbol{B}\cap F, m)$中稠密；

(vi) 对任何自然数k，记H_k为H中在$[-k, k]$外为零的函数全体，又记$\varphi_{nk}(x)=P(E_n)\chi_{[-k,k]}(x)$，$F_{nk}=\{x|\varphi_{nk}(x)\neq 0\}$. 利用(iv)、(v)证明$\overline{P(E_n)H_k}=L^2(F_{nk}, \boldsymbol{B}\cap F_{nk}, m)$；

(vii) 记 $F_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_{nk}$, 证明 $P(E_n)H=L^2(F_n, \boldsymbol{B}\cap F_n, m)$, $F_n\subset[-m_n, m_n]$;

(viii) 特别取 $E_1=(0, 1]$, 记 $c=\sup\{r|m((-\infty, r]\cap F_1)=0\}$, $d=\inf\{\delta|m(F_1\cap[\delta, \infty))=0\}$(显然, $P(E_1)H=L^2(F_1, \boldsymbol{B}\cap F_1, m)=L^2(F_1\cap(c, d], \boldsymbol{B}\cap(F_1\cap(c, d]), m))$. 利用(7.21)证明 $d\leqslant c+1$.

(ix) 利用(7.21)和 P 的可列可加、$P(R)=I$, 证明 $m(F_1\cap(c, d])=1$ (因此, 可取 $F_1=(c, c+1]$)

(x) 证明一切区间 $E=(\alpha, \beta]$, $P(E)H=L^2((\alpha+c, \beta+c], \boldsymbol{B}\cap(\alpha+c, \beta+c], m)$ 从而证明 P 必是(7.19)的形式.

5. 设 $(X, \boldsymbol{R}, E)$ 是 Hilbert 空间 H 上的谱测度空间. f、$g\in B(X, \boldsymbol{R})$, 并且 $f(x)g(x)=1$. 证明算子 $A=\int f(x)dE(x)$ 必是正则的, 并且 $A^{-1}=\int g(x)dE(x)$.

6. 设 $(X, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{E})$ 是 Hilbert 空间 H 上的谱测度空间, f、$g\in B(X, \boldsymbol{R})$. 如果存在 $S\in\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{E}(S)=0$, 并且当 $x\bar{\in}S$ 时, $f(x)=g(x)$. 证明

$$\int f(x)dE(x)=\int g(x)dE(x)$$

7. 设 $(X, \boldsymbol{R}, E)$ 是 Hilbert 空间 H 上的谱测度空间, f、$g_n\in B(X, \boldsymbol{R})$, $n=1, 2, \cdots$, 并且

(i) 存在常数 M, 使得 $|g_n(x)|\leqslant M$ 对一切 $x\in X$ 成立;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=f(x)$ 处处成立.

证明算子序列 $\left\{\int g_n(x)dE(x)\right\}$ 必弱收敛于算子 $\int f(x)dE(x)$.

§ 8 酉算子的谱分解

1. 酉算子的定义 在本节中, 我们将讨论酉算子, 特别是要研究它的谱分解.

定义 设 U 是由内积空间 H 的线性子空间 $\mathscr{D}(U)$ 到内积空间 G 的线性算子, 如果对任何 $x\in\mathscr{D}(U)$, 都有 $\|Ux\|=\|x\|$, 那末称 U 是在 $\mathscr{D}(U)$ 上**保范的**. 如果 $\mathscr{D}(U)=H$, 并且 U 是 $\mathscr{D}(U)$ 上保范的, 那末称 U 是 H 到 G 的**保距算子**, 当 $H=G$ 时, 简称 U 是 H 上的保距

算子．如果$\mathscr{D}(U)=H$，$\mathscr{R}(U)=G$，并且U是$\mathscr{D}(U)$上保范的，那末称U是H到G的**酉算子**，当$H=G$时，简称U是H上的酉算子．

H上的酉算子，在物理学上习惯称为**幺正算子**．

如果H到G的线性算子U，是在$\mathscr{D}(U)$上保范的，那末当$x\neq0$，$x\in\mathscr{D}(U)$时，由$\|Ux\|=\|x\|\neq0$，立即知道U是连续且一对一的，即U是可逆的．特别就得到：内积空间H到内积空间G的酉算子是有界的、可逆的，并且U^{-1}也是G到H上的酉算子．

引理 1 设H、G是两个 Hilbert 空间，U是H到G的线性算子，那末

(i) U是$\mathscr{D}(U)$上的保范算子的充要条件是对任何x、$y\in\mathscr{D}(U)$，

$$(Ux,Uy)=(x,y) \tag{8.1}$$

特别，U是$H\to G$的保距算子的充要条件是对任何x、$y\in H$，(8.1)成立．

(ii) U是$H\to G$的酉算子的充要条件是

$$U^*U=I_H,\ UU^*=I_G \text{①} \tag{8.2}$$

或者是

$$U^{-1}=U^* \tag{8.3}$$

证 (i) 由于内积空间中的内积可以用范数表示(见§1的极化恒等式(1.5)、(1.6))，易知$\mathscr{D}(U)$上的保范算子必保持内积不变，即(8.1)成立．

反之，如果(8.1)成立，在(8.1)中特别取$x=y$时，便知U是保范的．

(ii) (8.2)的必要性：如果U是酉算子，由(8.1)式可知，对任何x、$y\in H$，有

① I_H、I_G分别表示H及G上的恒等算子．

$$(x, y)=(Ux, Uy)=(U^*Ux, y)$$

即对一切 x、$y\in H$,

$$((U^*U-I_H)x, y)=0$$

特别取 $y=(U^*U-I_H)x$ 时，由上式立即得到对任何 $x\in H$, $(U^*U-I_H)x=0$, 即 $U^*U=I_H$.

又因为$\mathscr{R}(U)=G$, 所以从 $U^*U=I_H$ 可知 U^* 就是 U 的逆算子(即 $U^{-1}=U^*$), 因此 U^* 是 $G\to H$ 的酉算子，对 U^* 应用已被证明的(8.2)的第一式，我们又得到$(U^*)^*U^*=I_G$, 即 $UU^*=I_G$.

(8.2)的充分性：由于 $U^*U=I_H$, 因此对任何 x、$y\in H$,

$$(x, y)=(U^*Ux, y)=(Ux, Uy)$$

即(8.1)成立，从而 U 是保距算子．又从 $UU^*=I_G$ 可知 $\mathscr{R}(U)=G$, 所以 U 是 $H\to G$ 的酉算子.

显然(8.2)成立的充要条件是(8.3)．证毕.

系　设$(X, \boldsymbol{R}, E)$ 是 Hilbert 空间 H 中的谱测度空间，函数 $f\in B(X, \boldsymbol{R})$而且$|f|=1$. 那末谱积分

$$U=\int f dE$$

是酉算子.

证　由§7定理1的(ii), $U^*=\int \bar{f} dE$. 又由§7 定理2系2,

$$U^*U=UU^*=\int |f|^2 dE=\int dE=E(X)=I$$

因此 U 是 H 中的酉算子．证毕.

下面我们要研究 Hilbert 空间 H 上的酉算子(即 $H\to H$ 上的酉算子).

2. 酉算子的谱分解　在§7的第1段中我们说过，如果 H 是复 n 维空间，那末(见(7.3)式) H 中的酉算子 U 有形式

$$U=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P_j,\qquad \sum_{j=1}^{n}P_j=I$$

其中 $|\lambda_j|=1$, $P_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是相互直交的投影算子. 把 λ_j 记成为 $e^{i\theta_j}$, $(0<\theta_j\leqslant 2\pi)$. 然后按 §7 例 5 的方法, 由 $\{P_j\}$ 及 $\{\theta_j\}$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 可以作出一个谱系 $\{E_\lambda|\lambda\in[0,2\pi]\}$. 这个谱系是 $[0,2\pi]$ 上的谱系. 而 U 的表示式也可以写成积分的形式

$$U=\int e^{i\lambda}dE_\lambda$$

现在再看一个无限维的 Hilbert 空间中酉算子的例.

例 1 考虑复 Hilbert 空间 $L^2[0,2\pi]$, U 是如下的算子:

$$(Uf)(t)=e^{it}f(t),\ f\in L^2[0,2\pi]$$

容易知道算子 U 是 $L^2[0,2\pi]$ 中的酉算子.

对于 $[0,2\pi]$ 中的每个 Borel 集 A, 作算子 $E(A)$ 如下:

$$E(A)f=\chi_A(t)f(t),\ f\in L^2[0,2\pi]$$

其中 χ_A 是 A 的特征函数. 这时, 对于任何 $[0,2\pi]$ 中 Borel 集 A, $E(A)$ 都是投影算子, 而 E 是 $[0,2\pi]$ 中 Borel 集全体所成的 σ- 代数 $\boldsymbol{B}_{[0,2\pi]}$ 上的谱测度. 就是说 $([0,2\pi],\boldsymbol{B}_{[0,2\pi]},E)$ 是个谱测度空间. 由于 $(E(A)f,g)=\int_A f(t)\overline{g(t)}dt$, 根据第三章 §8, 对于任何 f、$g\in L^2[0,2\pi]$

$$\int_0^{2\pi}e^{it}d(E(t)f,g)=\int_0^{2\pi}e^{it}f(t)\overline{g(t)}dt=(Uf,g)$$

因此,

$$U=\int_0^{2\pi}e^{it}dE(t)\tag{8.4}$$

本节的主要目的是要证明(8.4)是酉算子的一般形式. 也就是说, 对于复 Hilbert 空间 H 中的酉算子 U, 必定有 $([0,2\pi],\boldsymbol{B}_{[0,2\pi]})$ 上的谱测度 E 使(8.4)式成立.

引理 2 设 $P(e^{it})=\sum_{-N}^{N}c_\nu e^{i\nu t}$ 是一个三角多项式，而且对任何实数 t, $P(e^{it})>0$. 那末必有三角多项式 $Q(e^{it})=\sum_{\nu=0}^{m}a_\nu e^{i\nu t}$ 使

$$P(e^{it})=|Q(e^{it})|^2 \tag{8.5}$$

证 因为有理函数 $P(z)=\sum_{-N}^{N}c_\nu z^\nu$ 在 $|z|=1$ 上取实数值，由复变函数中的 Schwarz 反照原理可知 $P(z)=\overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$. 又因为 $P(e^{it})>0$, $P(z)$ 在单位圆周上没有零点. 设 $P(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内的零点是 α_1、α_2、$\cdots$、α_n，其重数分别为 m_1、m_2、$\cdots$、m_n. 由于 $P\left(\frac{1}{\bar{\alpha}_\nu}\right)=\overline{P(\alpha_\nu)}=0$, 因而 $\frac{1}{\bar{\alpha}_\nu}$ 也是 $P(z)$ 的零点. 由 $P(z)=\overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ 容易说明零点 $\frac{1}{\bar{\alpha}_\nu}$ 也是 m_ν 次的. 因此

$$P(z)=c\prod_{\nu=1}^{n}(z-\alpha_\nu)^{m_\nu}\left(\frac{1}{z}-\bar{\alpha}_\nu\right)^{m_\nu}$$

所以就得到

$$P(e^{it})=c\prod_{\nu=1}^{n}|e^{it}-\alpha_\nu|^{2m_\nu}\ (c>0)$$

记 $Q(z)=\sqrt{c}\prod_{\nu=1}^{n}(z-\alpha_\nu)^{m_\nu}$, 那末(8.5)式成立. 证毕.

定理 1 设 U 是复 Hilbert 空间 H 上的酉算子，那末必有 H 中唯一的谱系 $\{E_\theta|\theta\in[0,2\pi]\}$ 满足 $E_0=0$, 并使

$$U=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dE_\theta \tag{8.6}$$

在证明定理1前，我们先回忆一些事实：$C_{2\pi}=\{f|f\in C[0,2\pi],\ f(0)=f(2\pi)\}$, 它是 Banach 空间 $C[0,2\pi]$ 的闭线性子空间. 对

于 $f\in C_{2\pi}$，$\|f\|=\max\limits_{t\in[0,2\pi]}|f(t)|$. $T_{2\pi}$ 表示三角多项式全体. $T_{2\pi}$ 是 $C_{2\pi}$ 中的线性子空间，而且 $T_{2\pi}$ 在 $C_{2\pi}$ 中稠密.

下面我们再谈一下定理 1 的证明的思路. 如果 E_θ 是 $[0,2\pi]$ 上的谱系，根据引理 1 的系，由(8.6)式定义的算子 U 是个酉算子. 现在的问题是反过来，对于给定的酉算子 U，要说明一定有这样的谱系. 这个谱系应该怎样去找呢？我们设想对于酉算子 U，如果确有谱系 E_θ 使(8.6)式成立. 那末由 §7 的定理 2 的系 2 可知

$$U^n=\int_0^{2\pi}e^{in\theta}dE_\theta\ \ (n=0,\ \pm1,\pm2,\cdots)$$

因而对于任何三角多项式 $P(e^{i\theta})$，$\int_0^{2\pi}P(e^{i\theta})dE_\theta$ 就代表算子 $P(U)$，这样，对于任何两个元 x、$y\in H$，

$$(P(U)x,y)=\int_0^{2\pi}P(e^{i\theta})d(E_\theta x,y) \qquad (8.7)$$

但是在(8.7)式中，对于给定的三角多项式 P 及 x、$y\in H$，左端是已知的. 而三角多项式全体 $T_{2\pi}$ 在 $C_{2\pi}$ 中是稠密的. 如果能够应用 $C_{2\pi}$ 上连续线性泛函的表示定理，那末对于 x、$y\in H$，$(E_\theta x,y)$ 就可以确定下来了. 由此可见，E_θ 确实是可以根据 U 来确定的. 下面我们就把这个想法具体化.

定理 1 的证明　对于三角多项式 $P(e^{i\theta})=\sum\limits_{-N}^{N}c_\nu e^{i\nu\theta}$，称三角多项式 $\sum\limits_{-N}^{N}\bar{c}_\nu e^{-i\nu\theta}$ 为 P 的共轭三角多项式，记为 $\bar{P}(e^{i\theta})$，算子 $\sum\limits_{-N}^{N}c_\nu U^\nu$ 简记为 $P(U)$，这时 $\bar{P}(U)=P(U)^*$，两个三角多项式 $P_1(e^{i\theta})$ 与 $P_2(e^{i\theta})$ 的乘积 $P_3(e^{i\theta})$ 显然仍是三角多项式，而且 $P_3(U)=P_1(U)P_2(U)$. 这些都是可以直接验证的.

对任何 $P\in T_{2\pi}$ 及任何 x、$y\in H$，记

$$\varphi(P,x,y)=(P(U)x,y) \tag{8.8}$$

由(8.8)式，对任何固定 x、$y\in H$，$\varphi_{x,y}$: $P\longmapsto\varphi(P,x,y)$是 $T_{2\pi}$ 上的线性泛函．下面我们证明它是连续的．

如果P是在$[0,2\pi]$上只取正值的三角多项式，由引理2，有三角多项式Q使 $P(e^{i\theta})=|Q(e^{i\theta})|^2$．所以

$$\varphi_{x,x}(P)=(P(U)x,x)=(\bar{Q}(U)Q(U)x,x)=\|Q(U)x\|^2\geqslant 0 \tag{8.9}$$

如果P是实值三角多项式，那末对于任何 $c>\|P\|$，$P_1=c-P$ 是正值的，由(8.9)式，

$$\varphi_{x,x}(P_1)=(cx,x)-\varphi_{x,x}(P)\geqslant 0$$

这就得到 $\varphi_{x,x}(P)\leqslant c(x,x)$．令$c$趋于$\|P\|$，就有 $\varphi_{x,x}(P)\leqslant\|P\|\|x\|^2$．再用$-P$代替$P$，就有$-\varphi_{x,x}(P)\leqslant\|P\|\|x\|^2$．因此

$$|\varphi_{x,x}(P)|\leqslant\|P\|\|x\|^2 \tag{8.10}$$

对于复值的三角多项式P，它的实部和虚部是实值的三角多项式：$P=P_1+iP_2$．由(8.10)式对于P_1、P_2 都成立，以及$\|P_1\|\leqslant\|P\|$，$\|P_2\|\leqslant\|P\|$，

$$|\varphi_{x,x}(P)|\leqslant|\varphi_{x,x}(P_1)|+|\varphi_{x,x}(P_2)|\leqslant 2\|P\|\|x\|^2$$

所以对 $x\in H$，$\varphi_{x,x}(\cdot)$是 $T_{2\pi}$ 上的连续线性泛函．但由(8.8)式，我们得到极化恒等式

$$\varphi_{x,y}=\frac{1}{4}\left(\varphi_{x+y,x+y}-\varphi_{x-y,x-y}+i\varphi_{x+iy,x+iy}-i\varphi_{x-iy,x-iy}\right)$$

因此对任何 x、$y\in H$，$\varphi_{x,y}(\cdot)$是 $T_{2\pi}$ 上的连续线性泛函．因此由第五章§2定理4的系，必定存在唯一的 $\psi(\cdot,x,y)\in V_{2\pi}$——即函数$\theta\longmapsto\psi(\theta,x,y)$，$\theta\in[0,2\pi]$，是$[0,2\pi]$上的有界变差函数，它在$[0,2\pi)$ 中每点是右连续的，而且 $\psi(0,x,y)=0$——使得对任何$P\in T_{2\pi}$，

$$\varphi_{x,y}(P)=\varphi(P,x,y)=\int_0^{2\pi}P(e^{i\theta})d\psi(\theta,x,y) \tag{8.11}$$

下面考察$\psi(\theta,x,y)$($\theta\in[0,2\pi]$, x、$y\in H$)的性质:

(i) $\psi(\theta,x,y)$关于x、y分别是线性和共轭线性的.

事实上,由于φ关于x是线性的,因而对于x_1、x_2、$y\in H$及任何两个复数λ_1、λ_2,由(8.11)式得到

$$\varphi(P,x_1,y)=\int_0^{2\pi}P(e^{i\theta})d\psi(\theta,x_1,y) \tag{8.12}$$

$$\varphi(P,x_2,y)=\int_0^{2\pi}P(e^{i\theta})d\psi(\theta,x_2,y) \tag{8.13}$$

$$\varphi(P,\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y)=\int_0^{2\pi}P(e^{i\theta})d\psi(\theta,\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y) \tag{8.14}$$

由于$x\longmapsto\varphi(P,x,y)$是线性的,由(8.12—14)得到

$$\int_0^{2\pi}P(e^{i\theta})d\psi(\theta,\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y)$$

$$=\int_0^{2\pi}P(e^{i\theta})d[\lambda_1\psi(\theta,x_1,y)+\lambda_2\psi(\theta,x_2,y)] \tag{8.15}$$

由于等式(8.15)对任何$P\in T_{2\pi}$成立,由第五章§2定理4即得

$$\psi(\theta,\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y)=\lambda_1\psi(\theta,x_1,y)+\lambda_2\psi(\theta,x_2,y)$$

这就证明了$\psi(\theta,x,y)$关于x是线性的. 关于y的共轭线性也可以类似地证明.

(ii) 对于$x\in H$, $\psi(\theta,x,x)$(关于θ)是单调上升的.

由于对取正值的$P\in T_{2\pi}$, $\varphi(P,x,x)\geqslant0$(见(8.9)式), 也就是当$P(e^{i\theta})>0$时$\int_0^{2\pi}P(e^{i\theta})d\psi(\theta,x,x)\geqslant0$. 根据第三章§8即知$\psi(\theta,x,x,)$关于$\theta$是单调上升的.

(iii) 在(8.11)式中取$P=1$, 得到

$$(x,y)=\psi(2\pi,x,y)-\psi(0,x,y)=\psi(2\pi,x,y)$$

再由上面的(ii), 当$\theta\in[0, 2\pi]$时, $0\leqslant\psi(\theta,x,x)\leqslant(x,x)=\|x\|^2$.

综上所述, $\psi(\theta,x,y)$当固定$\theta\in[0,2\pi]$时,是H上双线性的泛函,当$x=y$时, $0\leqslant\psi(\theta,x,x)\leqslant\|x\|^2$. 因此由§6的定理2及定理

4 可知必有唯一的H中自共轭算子E_θ，使

$$(E_\theta x, y)=\psi(\theta, x, y) \tag{8.16}$$

由性质(iii)即知$E_{2\pi}=I$，而$E_0=0$是显然的．E_θ的右连续性是由于$\psi(\theta, x, y)$的右连续性．因此只要说明$\{E_\theta\}$都是投影算子，那末根据§7的定理3′就知道$\{E_\theta\}$是谱系了．

对于任意两个取实值的P、$Q\in T_{2\pi}$，以及任何x、$y\in H$，由(8.8)，(8.11)，(8.16)，

$$(P(U)x, Q(U)y)=\int_0^{2\pi}P(e^{i\theta})d(E_\theta x, Q(U)y) \tag{8.17}$$

但由于$Q(U)$是自共轭的，所以

$$(E_\theta x, Q(U)y)=(Q(U)E_\theta x, y)=\int_0^{2\pi}Q(e^{it})d(E_tE_\theta x, y)$$

另一方面，(8.17)式的左边又可以化成

$$\begin{aligned}(P(U)x, Q(U)y)&=(Q(U)P(U)x, y)\\&=\int_0^{2\pi}P(e^{i\theta})Q(e^{i\theta})d(E_\theta x, y)\end{aligned}$$

根据第三章§8定理6的系1，这个积分又等于

$$\int_0^{2\pi}P(e^{i\theta})d\left[\int_0^\theta Q(e^{it})d(E_tx, y)\right]$$

所以(8.17)式就变成

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}P(e^{i\theta})d\left[\int_0^\theta Q(e^{it})d(E_tx, y)\right]\\&=\int_0^{2\pi}P(e^{i\theta})d\left[\int_0^{2\pi}Q(e^{it})d(E_tE_\theta x, y)\right]\end{aligned}$$

由于上式对任何$P\in T_{2\pi}$成立，$T_{2\pi}$在$C_{2\pi}$中稠密．由第五章§2 Riesz定理中泛函表示的唯一性，就得到

$$\int_0^\theta Q(e^{it})d(E_tx, y)=\int_0^{2\pi}Q(e^{it})d(E_tE_\theta x, y) \tag{8.18}$$

我们作函数$g_\theta(t)$如下：当$t\leqslant\theta$时$g_\theta(t)=(E_tx, y)$，当$t>\theta$时

$g_\theta(t)=(E_\theta x, y)$．这样(8.18)式就是

$$\int_0^{2\pi} Q(e^{it})dg_\theta(t)=\int_0^{2\pi} Q(e^{it})d(E_tE_\theta x, y)$$

因此，由于这式子对任何 $Q\in T_{2\pi}$ 成立，仍由 Riesz 定理所述的泛函表示的唯一性，

$$g_\theta(t)=(E_tE_\theta x, y)$$

所以当 $t\leqslant\theta$ 时，$(E_tx, y)=(E_tE_\theta x, y)$．取 $t=\theta$，即知 $E_\theta=E_\theta^2$．所以 E_θ 是投影算子．因此 $\{E_\theta|\theta\in[0,\ 2\pi]\}$ 是谱系，在(8.11)中取 $P(e^{i\theta})\stackrel{f}{=}e^{i\theta}$，就得到 $(Ux, y)=\int_0^{2\pi} e^{i\theta}d(E_\theta x, y)$，因此(8.6)式成立．

从定理的证明过程可知使(8.6)成立的谱系是唯一的．证毕．

定理 1 只是在复空间中成立．在实空间中，(8.6)右边的谱积分一般没有意义．另一方面，即使在有限维实空间中，酉算子也不一定有特征值(例如 n 维实欧几里得空间的旋转变换就没有特征值)，所以就谈不上谱系了．

定理 1 称作酉算子的谱分解定理，定理中的谱系 $\{E_\theta|\theta\in[0, 2\pi]\}$ 称为酉算子 U 的谱系．

现在我们指出谱分解定理的一些应用．

系 1　如果复数 ξ，$|\xi|\neq1$，则 ξ 是酉算子 U 的正则点．

证　因为 $U-\xi I=\int_0^{2\pi}(e^{i\theta}-\xi)dE_\theta$，而 $\dfrac{1}{e^{i\theta}-\xi}$ 是 $[0, 2\pi]$ 上连续函数，由 §7 定理 2 系 2 即可验算 $\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{e^{i\theta}-\xi}dE_\theta$ 是 $U-\xi I$ 的逆算子．所以 ξ 是 U 的正则点．

系 2　数 $e^{i\theta_0}(0<\theta_0<2\pi)$ 是酉算子 U 的正则点的充要条件是有正数 δ，使得 U 的谱系 E_θ 在 $[\theta_0-\delta, \theta_0+\delta]$ 中是常算子(即 E_θ 在 $(\theta_0-\delta, \theta_0+\delta)$ 中取值与 θ 无关)．1 为 U 的正则点的充要条件是有正数 δ，使得当 $\theta\in(0, \delta)$ 时 $E_\theta=0$，当 $\theta\in(2\pi-\delta,\ 2\pi)$ 时 $E_\theta=I$．

证 我们讨论 $\theta_0\in(0,2\pi)$ 的情况.

充分性: 如果 U 的谱系在 θ_0 的某个邻域 $[\theta_0-\delta,\theta_0+\delta]$ 中是常算子, 取 $[0,2\pi]$ 上的一个连续函数 $f(\theta)$, 使它在这邻域之外等于 $e^{i\theta}$, 而这邻域中的函数值不等于 $e^{i\theta_0}$, 这当然是可以的. 这时, 由于 $\int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta}e^{i\theta}dE_\theta=\int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta}f(\theta)dE_\theta=0$, 所以

$$U=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dE_\theta=\int_0^{2\pi}f(\theta)dE_\theta$$

而因为 $\frac{1}{f(\theta)-e^{i\theta_0}}\in C[0,2\pi]$, $\int_0^{2\pi}\frac{1}{f(\theta)-e^{i\theta_0}}dE_\theta$ 是有界线性算子, 它是 $\int_0^{2\pi}(f(\theta)-e^{i\theta_0})dE_\theta=U-e^{i\theta_0}I$ 的逆算子. 所以 $e^{i\theta_0}$ 是 U 的正则点.

必要性: 用反证法. 设在 θ_0 的任何环境中 E_θ 不是常算子, 那末必有 $\theta_n\to\theta_0$, $E_{\theta_n}\neq E_{\theta_0}$. 不妨认为 $\theta_n>\theta_0$. 这时可取 x_n, 使 $\|x_n\|=1$, $x_n\in(E_{\theta_n}-E_{\theta_0})H\,(=E_{\theta_n}H\ominus E_{\theta_0}H)$, 于是当 $\theta\geqslant\theta_n$ 时, $x_n\in E_{\theta_n}H\subset E_\theta H$, 而当 $\theta\leqslant\theta_0$ 时, 因 $x_n\perp E_{\theta_0}H$, $E_{\theta_0}H\supset E_\theta H$, 所以 $x_n\perp E_\theta H$. 这样,

$$(E_\theta x_n,x_n)=\begin{cases}1 & \text{当 } \theta\geqslant\theta_n\\ 0 & \text{当 } \theta\leqslant\theta_0\end{cases}$$

所以

$$\|(U-e^{i\theta_0}I)x_n\|^2=\int_0^{2\pi}|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|^2d(E_\theta x_n,x_n)$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta_n}|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|^2d(E_\theta x_n,x_n)\leqslant c_n\|x_n\|^2=c_n$$

其中 $c_n=\sup\limits_{\theta\in[\theta_0,\theta_n]}|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|^2$. 当 $n\to\infty$ 时, 显然 $c_n\to0$, 但如果 $e^{i\theta_0}$ 是 U 的正则点, 那末 $\|x_n\|\leqslant\|(U-e^{i\theta_0}I)^{-1}\|\|(U-e^{i\theta_0}I)x_n\|$, 当 $n\to\infty$ 时就导出 $1\leqslant0$ 的矛盾, 即 $e^{i\theta_0}$ 不可能是 U 的正则点.

同样可证 1 为 U 的正则点的充要条件. 证毕.

系 3　数 $e^{i\theta_0}(0<\theta_0\leqslant 2\pi)$ 是酉算子 U 的特征值的充要条件是 $E_{\theta_0}\neq E_{\theta_0-0}$.

证　充分性：如果 $E_{\theta_0-0}\neq E_{\theta_0}$,那末有 $x_0\in E_{\theta_0}H, x_0\perp E_{\theta_0-0}H$, $x_0\neq 0$, 那末当 $\theta\geqslant\theta_0$ 时 $E_\theta x_0=E_{\theta_0}x_0=x_0$, 当 $\theta<\theta_0$ 时 $E_{\theta_0}x_0=0$. 因此

$$(Ux_0, y)=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}d(E_\theta x_0, y)=(e^{i\theta_0}x_0, y)\quad (y\in H)$$

所以 $Ux_0=e^{i\theta_0}x_0$.

必要性：如果 $e^{i\theta_0}$ 是 U 的特征值而且 x_0 是相应的特征向量，那末 $Ux_0=e^{i\theta_0}x_0$. 所以由(7.13)我们得到

$$0=\|(U-e^{i\theta_0}I)x_0\|^2=\int_0^{2\pi}|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|^2d(E_\theta x_0, x_0)$$

但在上式的积分中，被积函数除去在 $\theta=\theta_0$ 处等于 0 外是正值的连续函数，$\mu(A)=(E(A)x_0, x_0)$是$([0, 2\pi], B[0, 2\pi])$上的测度，因此要积分为 0，必须测度 $\mu(A)$集中在单点集 $\{\theta_0\}$上. 由 E_θ 的右连续性可知$(E_\theta x_0, x_0)$在$[\theta_0, 2\pi]$上是常数，在 $[0, \theta_0)$ 上也是常数. 所以

$$(E_\theta x_0, x_0)=\begin{cases}(E_{2\pi}x_0, x_0)=\|x_0\|^2, & \text{当 } \theta\in[\theta_0, 2\pi]\\ (E_0x_0, x_0)=0, & \text{当 } \theta\in[0, \theta_0)\end{cases}$$

因此当 $\theta\in[\theta_0, 2\pi]$时 $E_\theta x_0=x_0$, 当 $\theta\in[0, \theta_0)$ 时 $E_\theta x_0=0$. 这就得到

$$E_{\theta_0-0}x_0=0\neq x_0=E_{\theta_0}x_0$$

证毕.

从系 3 的证明中还知道，对于 $\theta_0\in[0, 2\pi]$, U 的相应于特征值 $e^{i\theta_0}$ 的特征子空间是

$$\{x|Ux=e^{i\theta_0}x\}=(E_{\theta_0}-E_{\theta_0-0})H$$

我们再要指出谱系的一个重要性质.

系 4　设U是复 Hilbert 空间中的酉算子，$\{E_\theta|\theta\in[0, 2\pi]\}$是$U$的谱系，设$([0, 2\pi], B\cap[0, 2\pi], E)$是谱测度空间，$E$是由谱

系$\{E_\theta|\theta\in[0,\ 2\pi]\}$决定的谱测度，那末对于任何与$U$可交换①的有界线性算子$A$, E_θ以及$E(M)(M\in\boldsymbol{B}\cap[0,2\pi])$都与$A$可交换.

证 由于$AU=UA$，容易证明$AU^n=U^nA(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 因此对任何一个三角多项式$P(e^{i\theta})=\sum\limits_{\nu=-N}^{N}c_\nu e^{i\nu\theta}$，总有 $AP(U)=P(U)A$. 所以对于一切 x、$y\in H$

$$\int_0^{2\pi}P(e^{i\theta})d(E_\theta Ax,y)=(P(U)Ax,y)=(AP(U)x,y)$$

$$=(P(U)x,A^*y)=\int_0^{2\pi}P(e^{i\theta})d(E_\theta x,Ay^*)=\int_0^{2\pi}P(e^{i\theta})d(AE_\theta x,y)$$

由第五章§2泛函表示的唯一性定理可知$(E_\theta Ax,\ y)=(AE_\theta x,y)$对一切 x、$y\in H$ 成立，由此即得$E_\theta A=AE_\theta$. 令$\boldsymbol{M}=\{M\,|\,M\in\boldsymbol{B}\cap[0,2\pi],E(M)A=AE(M)\}$，那末易知环$(\boldsymbol{R}_0$②$\cap[0,2\pi])\subset\boldsymbol{M}$. 又易知$\boldsymbol{M}$成为单调类，所以$\boldsymbol{M}\supset\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0\cap[0,\ 2\pi])=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}_0)\cap[0,2\pi]=\boldsymbol{B}\cap[0,2\pi]$，即对一切$M\in\boldsymbol{B}\cap[0,2\pi]$, $E(M)$与A可交换. 证毕.

3. 相应于酉算子的谱测度 我们注意复 Hilbert 空间H中酉算子U的谱$\sigma(U)$是复平面上单位圆周上的一个闭集. 令$\boldsymbol{B}_{\sigma(U)}$表示$\sigma(U)$中的(平面)Borel 集全体.

设$(X,\boldsymbol{R})$是可测空间，E是$(X,\boldsymbol{R})$上谱测度（或数值测度），如果$S\in\boldsymbol{R}$, $E(X-S)=0$，那末称E集中在S上.

定理 2(酉算子的谱分解定理) 设U是复 Hilbert 空间H上的酉算子，那末必有$(\sigma(U),\boldsymbol{B}_{\sigma(U)})$上唯一的谱测度$F$使得

$$U=\int_{\sigma(U)}\lambda dF(\lambda)\tag{8.19}$$

而且F有如下的性质：对于任何 $M\in\boldsymbol{B}_{\sigma(U)}$及$H$中任何一个与$U$

① 两个有界线性算子成立$AB=BA$时称A与B可交换.

② $\boldsymbol{R}_0$是$(-\infty,\infty)$上由左开右闭区间张成的环，参见第二章§1.

可交换的有界线性算子 A, $F(M)$ 与 A 也是可交换的.

证 对于酉算子 U 的谱系 $\{E_\theta | \theta \in [0, 2\pi]\}$, 我们作出它的谱测度 E. 由于 $E_{0+} = E_0 = 0$, 显然 $E((0, 2\pi]) = I$, 因此谱测度集中在 $(0, 2\pi]$ 上. 而 $(0, 2\pi]$ 的余集的谱测度为 0. 我们可以把谱测度限制在 $X = (0, 2\pi]$ 上. 令 C_1 表示复平面上的单位圆周 $\{\lambda | |\lambda| = 1\}$, 作 $(0, 2\pi] \longrightarrow C_1$ 的一一对应 $T: \theta \longmapsto e^{i\theta}$. 记 $\boldsymbol{B}_{C_1} = \{TA | A \in \boldsymbol{B}, A \subset (0, 2\pi]\}$ ($\boldsymbol{B}$ 表示直线上 Borel 集全体). $\boldsymbol{B}_{C_1}$ 中的元称为 C_1 中的 Borel 集 (参见第四章 § 4 习题 17、18). 利用 T 可以把 $(E^1, \boldsymbol{B})$ 上的谱测度 E 变换成 $(C_1, \boldsymbol{B}_{C_1})$ 上的谱测度 F 如下:

$$F(TA) = E(A) \quad A \in \boldsymbol{B}, A \subset (0, 2\pi]$$

那末当 $f \in B(C_1, \boldsymbol{B}_{C_1})$ 时可以证明

$$\int_{C_1} f(\lambda) dF(\lambda) = \int_{(0, 2\pi]} f(e^{i\theta}) dE(\theta) \tag{8.20}$$

事实上, 当 f 是实值函数时, 由 $\{\lambda | y_{i-1} \leqslant f(\lambda) < y_i, \lambda \in C_1\} = T\{\theta | y_{i-1} \leqslant f(e^{i\theta}) < y_i, \theta \in (0, 2\pi]\}$ 立即得到

$$F(C_1(y_{i-1} \leqslant f(\lambda) < y_i)) = E(X(y_{i-1} \leqslant f(e^{i\theta}) < y_i))$$

由此就得到(8.20). 由定理 1 和(8.20)我们知道

$$U = \int_{C_1} \lambda dF(\lambda)$$

所以只要证明谱测度 F 集中在 $\sigma(U)$ 上好了. 由定理 1 的系 2, 如果 $e^{i\theta_0} \in \rho(U)$ $(0 < \theta_0 < 2\pi)$, 那末 E_θ 在 θ_0 的某个邻域中是常算子, 因此有正数 ε, 使 $E((\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)) = 0$. 所以有单位圆周上一段包含 $e^{i\theta_0}$ 的开弧 $O(e^{i\theta_0})$, 使得 $F(O(e^{i\theta_0})) = 0$. 当 $1 \in \rho(U)$ 时, 同样可证明有 C_1 上开弧 $O(1)$ 包含 1, 而使 $F(O(1)) = 0$. 利用 F 的可列可加性, 对于单位圆周 C_1 上任一含在 $\rho(U)$ 中的开弧 γ 可证 $F(\gamma) = 0$. 由于 $\sigma(U)$ 是闭集, 类似于直线上开集的构成区间, 可以证明 $\rho(U) \cap C_1$ 可以表示成 C_1 上至多可列条两两不交的开弧的和

集（参见第四章§4 习题16），而在每段开弧 F 的值为0，因此 $F(\rho(U)\cap C_1)=0$. 所以谱测度 F 集中在 $\sigma(U)$ 上. 证毕.

有时，我们也称 $(C_1, \mathbf{B}_{C_1}, F)$ 或 $(\sigma(U), \mathbf{B}_{\sigma(U)}, F)$ 为由酉算子决定的谱测度空间.

定义 设 A 是复 Hilbert 空间 H 上的一个线性算子，如果存在 $B(\sigma(A), \mathbf{B}_{\sigma(A)})$①$\to\mathfrak{B}(H\to H)$ 的映照 $f\longmapsto f(A)$ 满足如下条件:

(i) 线性：当 α、β 为复数，f、$g\in B(\sigma(A), \mathbf{B}_{\sigma(A)})$ 时

$$(\alpha f+\beta g)(A)=\alpha f(A)+\beta g(A)$$

(ii) 可乘性： 当 f、$g\in B(\sigma(A), \mathbf{B}_{\sigma(A)})$ 时，

$$(fg)(A)=f(A)g(A)$$

(iii) 当 $f\equiv 1$ 时，$f(A)=I$.

(iv) 当 $f(\lambda)\equiv\lambda$ 时，$f(A)=A$.

那末就称 $f\longmapsto f(A)$ 是算子演算.

由谱积分的定理，立即可以得到

定理 3 设 U 是复 Hilbert 空间 H 中的酉算子，$(\sigma(U), \mathbf{B}_{\sigma(U)}, E)$ 是相应于 U 的谱测度空间，对于 $f\in B(\sigma(U), \mathbf{B}_{\sigma(U)})$，令

$$f(U)=\int_{\sigma(U)} f(\lambda)dE(\lambda)$$

那末 $f\longmapsto f(U)$ 是算子演算.

4. L^2-Fourier 变换 前面我们曾介绍过 L^1-Fourier 变换，现在我们要用酉算子的观念介绍 L^2-Fourier 变换.

定理 4 (Plancherel) 对任何 $f\in L^2(-\infty,\infty)$，存在 $L^2(-\infty,\infty)$ 中函数

$$(Uf)(x)=(\text{强})\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{ixy}f(y)dy \tag{8.21}$$

---

① 这里 $\mathbf{B}_{\sigma(A)}$ 表示复平面上含在 $\sigma(A)$ 中的 Borel 集全体，即 $\mathbf{B}_{\sigma(A)}=\mathbf{B}\cap\sigma(A)$.

而且 $U:f\longmapsto Uf$ 是 $L^2(-\infty,\infty)$ 中的酉算子，它的逆算子的形式是

$$(U^{-1}f)(x)=(\text{强})\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-ixy}f(y)\,dy \qquad (8.22)$$

证　把有限区间的特征函数全体记为 $\mathcal{X}$，$\mathcal{X}$ 中有限个函数的线性组合全体记为$\mathscr{M}$. 那末对 $f\in\mathscr{M}$，记 $U_1f=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixy}f(y)\,dy$，$U_2f=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixy}f(y)\,dy$，显然它们都属于 $L^2(-\infty,\infty)$. 当 f、$g\in\mathcal{X}$ 时，利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}dx=\pi|\alpha|$$

可以直接算出

$$(U_1f,U_1g)=(f,g),\ (U_2f,U_2g)=(f,g),\ (U_1f,g)=(f,U_2g) \qquad (8.23)$$

而 U_1、U_2 显然是线性的，因此(8.23)式对于 f、$g\in\mathscr{M}$ 也成立.

因为 $\mathscr{M}$ 在 $L^2(-\infty,\infty)$中稠密，U_1、U_2 是 $\mathscr{M}$ 上的有界线性算子，所以 U_1，U_2 可以唯一地延拓成为 $L^2(-\infty,\infty)$ 上的有界线性算子. 延拓之后的算子仍记为 U_1 及U_2，由内积的连续性可知，(8.23)式对 f、$g\in L^2(-\infty,\infty)$也成立. 由 U_1、U_2 的保范性即知 $U_1^*U_1=U_2^*U_2=I$. 再由 $U_2=U_1^*$ 得到 $U_1U_1^*=I$，因此由引理 1 知 U_1 是酉算子，从而 $U_2=U_1^*=U_1^{-1}$ 也是酉算子.

对 $\lambda>0$，令 $N_\lambda=\{f\mid f\in L^2(-\infty,\infty)$，当$|x|>\lambda$时 $f(x)=0\}$，那末当 $f\in N_\lambda$ $(\alpha>0)$ 时，由 $U_1^*=U_2$ 和

$$U_2\mathcal{X}_{[0,\alpha]}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{-ix}(e^{-i\alpha x}-1)\ (\alpha>0)$$

得到　$$\int_0^{\alpha}(U_1f)(x)\,dx=(U_1f,\mathcal{X}_{[0,\alpha]})=(f,U_2\mathcal{X}_{[0,\alpha]})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{e^{i\alpha x}-1}{ix}f(x)dx$$

两边对 α 求导数并利用第三章 §4 对 $L^1(-\infty,\infty)$的 Fourier 变换讨论的方法，得到当 $f\in N_\lambda$ 时

$$(U_1 f)(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{i\alpha x}f(x)dx \tag{8.24}$$

类似地当 $f\in N_\lambda$ 时

$$(U_2 f)(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-i\alpha x}f(x)dx \tag{8.25}$$

对于$f\in L^2(-\infty,\infty)$，因为 $f=(\text{强})\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(\chi_{[-\lambda,\lambda]}f)$， 由 (8.24)、(8.25)及 U_1、U_2 的连续性就知道 $U=U_1$, $U^{-1}=U_2$. 证毕.

定义 设 $f\in L^2(-\infty,\infty)$，函数

$$\hat{f}(\alpha)=(\text{强})\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{i\alpha x}f(x)dx$$

称为f的 **L^2-Fourier 变换**. 又称$U:f\longmapsto\hat{f}$ 为 L^2-Fourier 变换. 类似地，函数

$$\check{f}(\alpha)=(\text{强})\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-i\alpha x}f(x)dx$$

称为f的 L^2-Fourier 逆变换，也称 $f\longmapsto\check{f}$ 为L^2-Fourier 逆变换. 公式$(\hat{f},\hat{g})=(f,g)$称为 **Parseval 公式**.

这里 L^2-Fourier 变换比第三章中的 L^1-Fourier 变换多一个常数因子$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$是为了使它成立 Parseval 公式，同时也是为了使 Fourier 变换公式和逆变换公式之间具有对称性.

例2 现在我们研究L^2-Fourier变换U这个酉算子的谱分解，为此，我们引进$L^2(-\infty,\infty)$中的算子J如下：

$$(Jf)(x)=f(-x)\quad f\in L^2(-\infty,\infty)$$

显然J是酉算子，而且在(8.21)、(8.22) 中由变数替换 $x\longmapsto-x$

可以看到

$$U^{-1}J=U$$

因此 $U^2=J$. 但 $J^2=I$,所以 $U^4=I$. 由第五章 §5 引理 2 得

$$\sigma(I)=\{\lambda^4 \mid \lambda\in\sigma(U)\}$$

但 $\sigma(I)=\{1\}$,所以 $\sigma(U)\subset\{1, i, -1, -i\}$. 因而由酉算子的谱分解定理,必有 $L^2(-\infty,\infty)$ 中谱测度 E, 它集中在 $\{1, i, -1, -i\}$上而且

$$I=E(\{1\})+E(\{-1\})+E(\{i\})+E(\{-i\})$$

$$U=E(\{1\})-E(\{-1\})+iE(\{i\})-iE\{-i\}$$

实际上±1, $\pm i$ 都是U的特征值.

5. 平稳随机序列　为了介绍酉算子谱分解理论在随机过程中的应用,首先我们介绍一下概率论中的基本概念.

定义　设$X=(\Omega, \boldsymbol{B}, p)$是一个测度空间,如果 $\Omega\in\boldsymbol{B}$, 且 $p(\Omega)=1$. 就称X是个**概率测度空间**,而 p 就称为**概率测度**. 可测空间$(\Omega,\boldsymbol{B})$ ($\boldsymbol{B}$ 是 σ-代数) 上的可测函数 f 称为概率测度空间 $X=(\Omega, \boldsymbol{B}, p)$上的一个**随机变量**. 如果 $f\in L(\Omega, \boldsymbol{B}, p)$就称

$$E(f)=\int_\Omega f\,dp$$

是随机变量 f 的**数学期望**. 设 $x_n(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$是 X 上的随机变量,而且 $x_n\in L^2(\Omega, \boldsymbol{B}, p)$, 如果 $E(x_n)$和 n 无关,而且$E(x_n\bar{x}_m)$只和$n-m$ 有关——这个数记为 $r(n-m)$, 称为**相关数**——就称$\{x_n\}$是一个(弱)**平稳随机序列**.

下面我们考察满足 $E(x_n)=0$ 的平稳随机序列. 记 $A=\{x_n \mid n=0, \pm1, \cdots\}$由于$\{x_n\}$的平稳性,按平稳的定义有

$$(x_n, x_m)=r(n-m) \tag{8.26}$$

其中$(\cdot,\cdot)$表示 $L^2(\Omega, \boldsymbol{B}, p)$的内积. 作 A 到 A 上的算子U 和 V:

$$Ux_n=x_{n+1}, Vx_n=x_{n-1}$$

由(8.26)式即知对于 A 中任何两个元 x、y,

$$(Ux,y)=(x,Vy),\ (Ux,Uy)=(x,y)=(Vx,Vy) \tag{8.27}$$

利用线性把 U、V 两个算子延拓到由 A 张成的线性空间 M 上,容易看出,这时(8.27)对 x、$y\in M$ 仍成立. 易见 U、V是 M 到 M 上的保范算子. 用 H 表示 M 在 $L^2(\Omega,\boldsymbol{B},p)$中的闭包, 这时 H 是一个 Hilbert 空间. 由第五章§2 的延拓定理1, U、V 可以延拓成 H 到 H 的线性算子, 即(8.27)对 x、$y\in H$ 都成立. 由此易知U、V 都是酉算子而且 $U=V^{-1}$.

根据酉算子的谱分解定理, 有 H 中的$[0,2\pi]$ 上的谱系$\{E_\theta|\theta\in[0,2\pi]\}$使得 $U=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dE_\theta$, 这时对任何 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$$U^n=\int_0^{2\pi}e^{in\theta}dE_\theta \tag{8.28}$$

对每个 $\theta\in[0,2\pi]$, 记 $z(\theta)=E_\theta x_0\in H$, $z(\theta)$ 是随机变量, 这时由(8.28)得到

$$U^nx_0=\int_0^{2\pi}e^{in\theta}dE_\theta x_0,\qquad x_n=\int_0^{2\pi}e^{in\theta}dz(\theta), \tag{8.29}$$

当区间$(a_1,b_1]$和$(a_2,b_2]$不交时, $E((a_1,b_1])E((a_2,b_2])=0$. 因此

$$\begin{aligned}&(z(b_1)-z(a_1),z(b_2)-z(a_2))\\&=(E((a_1,b_1])x_0,E((a_2,b_2])x_0)=0\end{aligned}$$

所以在$(a_1,b_1]\cap(a_2,b_2]=\varnothing$ 时,

$$E((z(b_1)-z(a_1))\overline{(z(b_2)-z(a_2))})=0$$

满足上述条件的随机函数 $z(\theta)$就称为直交增量函数(因为 $z(b)-z(a)$ $(b\geqslant a)$是增量), 也称为直交增量随机过程 (θ 是参数). 这种把平稳随机序列用直交增量函数表达的(8.29)式也称做平稳随机序列的谱展开式. 又由

$$(x_n,x_0)=(U^nx_0,x_0)=\int_0^{2\pi}e^{in\theta}d(E_\theta x_0,x_0)$$

立即得到

$$r(n)=\int_0^{2\pi} e^{in\theta}dF(\theta) \tag{8.30}$$

其中 $F(\theta)=\|E_\theta x_0\|^2=E(|z(\theta)|^2)$是$[0,2\pi]$上单调增加的右连续函数，称为平稳随机序列的谱函数．(8.30) 式称为平稳随机序列的相关数的谱展开式．

对于连续参数的(弱)平稳随机过程 $x_t(-\infty<t<\infty)$ 有完全类似的结果．

6．平移算子　我们还要介绍一种典型的酉算子和一种典型的不是酉算子的保距算子．它们分别是双向平移算子和单向平移算子．

定义　设 H 是复可析 Hilbert 空间，$\{e_n|n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是 H 中完备的就范直交系，又设U是 H 中的有界线性算子，它具有性质

$$Ue_n=e_{n+1}\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

那末称U是**双向平移算子**．

设$\{\xi_n|n=0,1,2,\cdots\}$是 H 中的完备就范直交系，又设 V 是 H 中的有界线性算子，它具有性质

$$V\xi_n=\xi_{n+1}\qquad n=0,1,2,3,\cdots$$

那末称V是**单向平移算子**．

容易看出：双向平移算子U由上述完备就范直交系所唯一地确定．事实上，对任何 $x\in H$，由 Fourier 展开式，

$$x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x,e_n)e_n$$

因此由U的连续性，即得

$$Ux=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x,e_n)e_{n+1}$$

由此立即可知

$$\|Ux\|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|(x, e_n)|^2=\|x\|^2$$

所以 U 是保距的，显然 $UH=H$，因此 U 是酉算子．而且这时

$$U^{-1}e_n=e_{n-1}$$

因此 U^{-1} 也是（关于完备就范直交系 $\{e_{-n}|n=0, \pm1, \pm2, \cdots\}$）双向平移算子．同样地，单向平移算子也是由完备就范直交系 $\{\xi_n|n=0, 1, \cdots\}$ 所唯一确定，而且它是保距算子．但是 V 不是酉算子，因为由 $Vx=V\left(\sum_{n=0}^{\infty}(x, \xi_n)\xi_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(x, \xi_n)\xi_{n+1}$，容易验证 $V^*x=\sum_{n=1}^{\infty}(x, \xi_n)\xi_{n-1}$，即

$$V^*\xi_n=\begin{cases}\xi_{n-1}, & n=1, 2, \cdots\\ 0, & n=0\end{cases}$$

因此 $VH=H\ominus M_0$，此地 M_0 为由 ξ_0 张成的一维子空间．

例 3 在复 $L^2[0, 2\pi]$ 中取完备就范直交系 $\left\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\middle|n=0, \pm1, \cdots\right\}$，设 U_0 为乘法算子：$(U_0f)(t)=e^{it}f(t)$，这时

$$U_0e^{int}=e^{i(n+1)t} \qquad n=0, \pm1, \pm2, \cdots$$

所以 U_0 是双向平移算子．

现在我们考察 $L^2[0, 2\pi]$ 的子空间 H^2，它是由 $L^2[0, 2\pi]$ 中形如

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_ne^{int}$$

（上式右边的级数是按 $L^2[0, 2\pi]$ 中范数收敛于 f），而 $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2<\infty$ 的函数 f 全体．H^2 作为 $L^2[0, 2\pi]$ 的闭线性子空间，它也成为

一个 Hilbert 空间, 称它为哈代(Hardy) 空间. 记上述双向平移算子 U_0 在 H^2 上的限制为 V_0. 注意到 $\{e^{int}|n=0,1,2,\cdots\}$ 是 H^2 中的完备就范直交系, 于是 V_0 就是 H^2 中的单向平移算子.

我们现在引进酉等价的概念.

定义 设 H 和 G 是内积空间, A 是 H 中的线性算子, U 是 H 到 G 上的酉算子, 称算子 UAU^{-1} 和 A 是**酉等价的**.

上面例 3 (哈代空间) 中的双 (单) 向平移算子 $U_0(V_0)$ 是一般的双(单) 向平移算子的典型形式. 事实上, 对任何复 Hilbert 空间 H 中的双(单)向平移算子 $U(V)$, 必有 H 到 $L^2[0,2\pi]$ (H^2) 的酉算子 W 使得

$$WUW^{-1}=U_0 \qquad (WVW^{-1}=V_0)$$

实际上, 对于双向平移的情况, W 取为如下的酉算子: $We_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$, 对于单向平移的情况, W 取为如下的酉算子: $W\xi_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$. 因此在"酉等价"的意义下, 可以把 $U(V)$ 看成 $U_0(V_0)$. 所以下面我们对双 (单) 向平移算子, 只要讨论它的典型形式 $U_0(V)$ 好了.

对于酉算子 U_0, 它的谱分解已见(8.4)式, U_0 的谱系是 $\{E_\theta|\theta\in[0,2\pi]\}$, 而且 $(E_\theta f)(t)=\chi_{[0,\theta]}(t)f(t)$. 由 $\{E_\theta|\theta\in[0,2\pi]\}$ 所决定的谱测度空间是 $([0,2\pi],\boldsymbol{B}_{[0,2\pi]},E)$, 其中 E 是这样的算子: 当 $A\in\boldsymbol{B}_{[0,2\pi]}$ 时, $(E(A)f)(t)=\chi_A(t)f(t)$ $(f\in L^2[0,2\pi])$. 我们现在要来求出 U_0 的一切约化子空间 L.

更一般地, 我们有如下结果.

定理 5 设 $([0,2\pi],\boldsymbol{B}_{[0,2\pi]},\mu)$ 是全有限的勒贝格-斯蒂阶测度空间, U_0 是 $H=L^2([0,2\pi],\boldsymbol{B}_{[0,2\pi]},\mu)$ 上的酉算子①:

---

① 可仿例 1 直接证明 U_0 是酉算子.

$$(U_0f)(t)=e^{it}f(t),\quad f\in H$$

那末，U_0 的一切约化子空间正是集 $\{E(A)H\mid A\in B_{[0,2\pi]}\}$，这里 $E(A)$ 为投影算子：

$$(E(A)f)(t)=\chi_A(t)f(t),\ f\in H$$

证 证 $E(A)H$ $(A\in B_{[0,2\pi]})$ 是 U_0 的约化子空间：因为对任何 $f\in H$，

$$(U_0E(A)f)(t)=e^{it}\chi_A(t)f(t)=(E(A)U_0f)(t)$$

即投影算子 $E(A)$ 与 U_0 可交换. 由§5 定理 9 的系 1 可知 $E(A)H$ 是 U_0 的约化子空间.

反之，设 L 是 U_0 的一个约化子空间，P 是 H 在 L 上的投影算子，因此 P 和 U_0 可交换.

另一方面，显然 $([0,2\pi],B_{[0,2\pi]},E)$ 是谱测度空间，由它决定的谱系为 $\{E_\theta\mid\theta\in[0,\ 2\pi]\}$ $(E_\theta=E([0,\ \theta]))$，易知(请读者严格证明)

$$U_0=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dE_\theta$$

由谱分解的唯一性以及定理 1 的系 4 知道 P 必与 $E_\theta(\theta\in[0,2\pi])$、$E(A)$ $(A\in B_{[0,2\pi]})$ 可交换.

令 $f_0(t)\equiv1$，记 $f_1=Pf_0$. 那末，对任何 $A\in B_{[0,2\pi]}$ 有

$$P\chi_A=PE(A)f_0=E(A)Pf_0=E(A)f_1$$

即

$$(P\chi_A)(t)=\chi_A(t)f_1(t)=f_1(t)\chi_A(t)\tag{8.31}$$

现在证 $|f_1(t)|\underset{\mu}{\leqslant}1$：任取 $\alpha>1$，作集 $A_\alpha=\{t\mid t\in[0,2\pi],\ |f_1(t)|\geqslant\alpha\}$. 由(8.31)式及 $\|P\|\leqslant1$，即得

$$\alpha^2\mu(A_\alpha)\leqslant\int_0^{2\pi}|\chi_{A_\alpha}(t)f_1(t)|^2d\mu\leqslant\|P\chi_{A_\alpha}\|^2\leqslant\|\chi_{A_\alpha}\|^2$$
$$=\int_0^{2\pi}|\chi_{A_\alpha}(t)|^2d\mu=\mu(A_\alpha)$$

因此 $\mu(A_\alpha)=0$. 因为 α 是任意的, 所以 $|f_1(t)|\underset{\mu}{\leqslant}1$.

作 H 上算子 Q 如下:

$$Q: f(t)\longmapsto f_1(t)f(t),\quad f\in H \tag{8.32}$$

显然, Q 是 H 上有界线性算子. 由(8.31)、(8.32)可知, 对任何 $A\in\boldsymbol{B}_{[0,2\pi]}$,

$$P\chi_A=Q\chi_A$$

因为 P、Q 都是有界线性算子, 而 $\overline{\text{span}}\{\chi_A|A\in\boldsymbol{B}_{[0,2\pi]}\}=H$, 所以

$$P=Q$$

即投影算子 P 由 (8.32) 式所表达. 由于 $P^2=P$, 所以 $f_1(t)^2=f_1(t)$, 即 $f_1(t)$(关于 μ)几乎处处等于 0 或 1. 记 $A=\{t|f_1(t)=1\}$, 那末 $f_1(t)\underset{\mu}{\doteq}\chi_A(t)$, 这就是说, 存在 $A\in\boldsymbol{B}_{[0,2\pi]}$, 使得

$$(Pf)(t)=f(t)\chi_A(t)=(E(A)f)(t),\quad f\in H$$

即 $P=E(A)$. 证毕.

特别, 对于例 3 中的双向平移算子 U_0, 它的一切约化子空间就是 $\{E(A)L^2[0,2\pi]\,|\,A\in\boldsymbol{B}_{[0,2\pi]}\}$.

定理 6 H^2 中单向平移算子 V_0 没有非平凡的约化子空间.

证 设 L 是 V_0 的一个约化子空间, P 是 $H^2\longrightarrow L$ 的投影算子. 由§5 定理 9 系1, P 与 V_0 可交换, 所以 $PV_0^n=V_0^nP(n=0,1,2,\cdots)$. 记 $f_1=Pf_0(f_0\equiv1)$, 那末对任何代数多项式 $Q(\lambda)$,

$$Q(e^{it})f_1=Q(V_0)Pf_0=PQ(V_0)f_0=PQ(e^{it})$$

由于 $\|P\|\leqslant1$, 所以

$$\int_0^{2\pi}|Q(e^{it})f_1(t)|^2dt\leqslant\int_0^{2\pi}|Q(e^{it})|^2dt \tag{8.33}$$

对于任何三角多项式 $R(e^{it})=\sum\limits_{\nu=-n}^{n}c_\nu e^{i\nu t}$, 由于 $R(e^{it})=e^{-int}Q(e^{it})$, 其中 Q 是一个代数多项式, 而且 $|R(e^{it})|=|Q(e^{it})|$,

因此由(8.33)式, 可知对任何三角多项式 $R(e^{it})$,

$$\int_0^{2\pi} |R(e^{it})f_1(t)|^2 dt \leqslant \int_0^{2\pi} |R(e^{it})|^2 dt$$

由于对任何 $A\in \mathbf{B}_{[0,2\pi]}$, $\chi_A(t)$ 是一列一致有界的三角多项式 $\{R_k(e^{it})\}$的几乎处处收敛的极限①. 因此根据勒贝格控制收敛定理,

$$\int_0^{2\pi} |\chi_A(t)f_1(t)|^2 dt \leqslant \int_0^{2\pi} |\chi_A(t)|^2 dt$$

所以$|f_1(t)|\leqslant 1$. 类似于定理5对U_0的约化子空间的证明, 可知对任何 $f\in H^2$, $Pf(t)=f_1(t)f(t)$. 由于 $P^2=P$, 所以 $f_1(t)^2 \doteq f_1(t)$, 因此有 $A\in \mathbf{B}_{[0,2\pi]}$, 使 $f_1(t)\doteq\chi_A(t)$. 但由于 $\chi_A\in H^2$, 因此在 $L^2[0,2\pi]$中, χ_A 与 $e^{int}(n=-1,-2,-3,\cdots)$都直交, 即

$$\int_0^{2\pi} \chi_A(t)e^{-int}dt=0 \quad (n=-1,-2,\cdots)$$

在上式中取复共轭, 因为χ_A是实值的, 因此知道上式对于 $n=1$, $2,\cdots$ 也成立, 所以 χ_A与 $e^{int}(n=1,2,3,\cdots)$也直交. 因此, χ_A关于 H^2 中的完备就范直交系 $\{e^{int}\}(n=0,1,2,\cdots)$ 的 Fourier 系数只有一项(即关于 $e^{i0t}\equiv 1$ 的 Fourier 系数)不等于零, 所以χ_A 就是常数函数. 显然只有 $\chi_A\doteq 0$ 或 $\chi_A\doteq 1$. 因此, P或是零算子, 或是恒等算子, 所以 V_0的约化子空间只能是零空间或全空间 H^2, 证毕.

但是我们注意, V_0却有丰富的不变子空间. 例如任取一个在单位圆内有零点的多项式 $Q(\lambda)$, 那末

$$L_Q=\{Q(e^{it})f(t)\,|\,f\in H^2\}$$

就是 V_0 的一个非平凡的不变子空间. 而且可以证明当多项式 Q_1 和 Q_2 在单位圆内的零点的位置不一致时, $L_{Q_1}\neq L_{Q_2}$, 因此对算子结构的研究不能只限于研究约化子空间, 还应该研究不变子空间.

① 参见第三章§2.

关于 V_0 的不变子空间的研究引起了 Hilbert 空间中的算子调和分析理论. 但这些已超出本书范围, 请参考[7].

习　题

1. 设 V 是内积空间 H 的线性子空间 $\mathscr{D}(V)$ 上到内积空间 G 的保范算子. 证明:

(i) 当 G 是 Hilbert 空间时, V 必可唯一地延拓成 $\overline{\mathscr{D}(V)}$ 上(到 G 的) 保范算子;

(ii) 视 V 为内积空间 $\mathscr{D}(V)$ 到内积空间 G 的线性算子时, V^* 是 V 的共轭算子, 那末 V 是 $\mathscr{D}(V)$ 上保范算子的充要条件是

$$V^*V=I_{\mathscr{D}(V)},\quad VV^*=I_{\mathscr{R}(V)}$$

2. 仿例 1 方法, 证明: 在勒贝格-斯蒂阶平方可积的空间 $L^2([0,2\pi], \boldsymbol{B}_{[0,2\pi]},\mu)$ 上定义的算子

$$U:\ f(t)\longmapsto e^{it}f(t),\quad f(t)\in L^2([0,2\pi],\boldsymbol{B}_{[0,2\pi]},\mu)$$

是酉算子, 并且

$$U=\int_0^{2\pi}e^{it}dE_t$$

其中 $\{E_t|t\in[0,2\pi]\}$ 是由谱测度

$$\{E(A)|A\in\boldsymbol{B}_{[0,2\pi]}\}\ (E(A):f(t)\longmapsto\chi_A(t)f(t))$$

决定的谱系.

3. 设 A 是 Hilbert 空间 H 到 H 中的保距线性算子. 证明必有 Hilbert 空间 $\tilde{H}\supset H$, 使得 A 能延拓成 $\tilde{H}$ 到 $\tilde{H}$ 上的酉算子.

4. 设 U 是 Hilbert 空间中的酉算子, 而且 $U-I$ 是全连续的, 证明必有单位圆周上的有限个或可列个数 $\{\lambda_\nu\}$ 以及互相直交的投影算子 $\{P_\nu\}$ 使 $I=\sum\limits_\nu P_\nu$, $U=\sum\limits_\nu\lambda_\nu P_\nu$, 并且 $\{\lambda_\nu\}$ 只以 1 为极限点.

5. 设 U 是 Hilbert 空间 H 上酉算子. 证明: (i) $\sigma(U)=\sigma_a(U)$ ($\sigma_a(U)$ 意义可见第五章 § 5); (ii) 当 $\lambda\in\rho(U)$ 时,

$$\|(U-\lambda I)^{-1}\|\leqslant 1/\inf_{\lambda'\in\sigma(U)}|\lambda-\lambda'|$$

6. 设 H 是复 Hilbert 空间, $\{E_\lambda|-\infty<\lambda<\infty\}$ 是 H 中的谱系. 对每个实数 t, 作 H 中的算子

$$U(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}dE_\lambda$$

那末$U(t)$是H中的酉算子，而且$\{U(t)\mid -\infty<t<\infty\}$是$H$中的单参数群，即

$$U(t_1+t_2)=U(t_1)U(t_2),\ -\infty<t_1,\ t_2<\infty$$

并且$U(t)$是强连续的，即对任何$t_0\in(-\infty,\ \infty)$，满足下列条件：对任何$x\in H$，

$$\lim_{t\to t_0}\|(U(t)-U(t_0))x\|=0$$

7. 设$U(t)(t\in(-\infty,\infty))$是复 Hilbert 空间$H$上单参数酉算子族，并且成为单参数群：$U(t_1+t_2)=U(t_1)U(t_2)$，$-\infty<t_1,\ t_2<\infty$. 如果$U(t)$是弱连续的，即对任何$x$、$y\in H$、$f(t)=(U(t)x,\ y)$是$t$的连续函数. 证明$U(t)$必是强连续的.

8. 设U是复 Hilbert 空间$L^2(a,\ b)$ $(-\infty\leqslant a<0<b\leqslant\infty)$中的酉算子，那末有两个函数$K(\xi,x)$和$H(\xi,x)$，$a<\xi<b$，$a<x<b$，当固定$\xi$时，$x$的函数$K(\xi,x)$及$H(\xi,x)$都属于$L^2(a,b)$而且适合条件

(i) $$\int_a^b\overline{K(\xi,x)}K(\eta,x)\,dx=\int_a^b\overline{H(\xi,x)}H(\eta,x)\,dx=\begin{cases}\min\{|\xi|,|\eta|\}, & \text{当 }\xi\eta\geqslant 0\text{ 时},\\ 0, & \text{当 }\xi\eta<0\text{ 时};\end{cases}$$

(ii) $$\int_0^\eta K(\xi,x)\,dx=\int_0^\xi\overline{H(\eta,x)}\,dx;$$

这时对任何$f\in L^2(a,b)$有

$$(Uf)(x)=\frac{d}{dx}\int_a^b\overline{K(x,\xi)}f(\xi)\,d\xi,\quad (U^{-1}f)(x)=\frac{d}{dx}\int_a^b\overline{H(x,\xi)}f(\xi)\,d\xi$$

9. 设U是复 Hilbert 空间H上的酉算子，证明必存在H上的酉算子U_0，使得$U_0^2=U$；又证明存在H上的酉算子U_1，使得$\sigma(U_1)$落在下半圆周上，且$U_1^2=U$.

10. (Wold 分解) 设V是 Hilbert 空间H上保距算子，记$L=H\ominus VH$. 证明

(i) $\{V^nL\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$彼此互相直交；

(ii) $\bigoplus_{n=0}^{\infty}V^nL$ 必约化V；

(iii) V 在 $H\ominus\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty}V^nL\right)$ 上是酉算子.

(特别, 如果 $\dim L=1$, V 便是 $H_0=\bigoplus_{n=0}^{\infty}V^nL$ 上单向平移算子, $\dim L\neq 1$ 时, 又称 V 是 H_0 上多重单向平移算子. Wold 分解在预测理论和控制论中很重要)

定义 设 V 是(不定内积空间) Π (见§3习题)上线性算子, 如果对一切 x、$y\in\Pi$, $[Vx,Vy]=[x,y]$, 称 V 是 Π 上**保度规算子**; 如果 V 是一对一的保度规算子, 称 V 是 Π 上**保距算子**; 如果 V 是 Π 上保距算子, 并且 $\mathscr{R}(V)=\Pi$, 称 V 为 Π 上**酉算子**.

11. 证明下列命题:

(i) Π 上保度规算子必是保距算子.

(ii) Π 上算子 V 为保距的充要条件是对一切 $x\in\Pi$,

$$[Vx,Vx]=[x,x]$$

(iii) Π 上算子 V 为酉算子的充要条件是

$$VV^\dagger=I\quad V^\dagger V=I\quad (\text{记号}\dagger\text{参见§4习题7})$$

(注意 Π 上酉算子必是有界的, 这可由§3习题10所指出的"Π 空间上任何两个正则分解的导出范数必等价"事实推出, 或直接证明 $V^\dagger$ 是全空间定义的稠定闭算子, 从而用共鸣定理推出).

(iv) Π 上酉算子的谱 $\sigma(U)$ 关于单位圆周对称, 即满足 $\sigma(U)=\dfrac{1}{\overline{\sigma(U)}}$, 这里 $\dfrac{1}{\overline{\sigma(U)}}=\left\{\dfrac{1}{\bar\lambda}\,\middle|\,\lambda\in\sigma(U)\right\}$ (注意 Hilbert 空间上酉算子所有的谱仅分布在单位圆周上). 读者能举一个在单位圆周外确有谱点的 Π 上的酉算子吗?

(v) 设 V 是从 Π 的闭线性子空间 L 到 Π 的线性算子, 并且

$$[Vx,Vy]=[x,y],\quad x、y\in\Pi$$

V 是否必连续?

§9 自共轭算子的谱分解

1. 引言 在前面各章节中, 我们所考察的都是有界线性算子, 定义域一般也认为是全空间. 然而在许多具体问题中, 特别是

在量子力学和微分方程理论中，我们经常碰到并不是在全空间上定义的而且不是有界的线性算子.

例1 在 Hilbert 空间 $L^2(-\infty,\infty)$ 中，考察线性子空间

$$\mathscr{D}=\{f\mid f\in L^2(-\infty,\infty),\ \int_{-\infty}^{+\infty}|tf(t)|^2dt<\infty\}$$

以及以$\mathscr{D}$为定义域的算子 A：当 $f\in\mathscr{D}$ 时，

$$(Af)(t)=tf(t) \tag{9.1}$$

A是由$\mathscr{D}$到 $L^2(-\infty,\infty)$ 中的算子，这是一种**乘法算子**. 如果要保留算子A的形式(9.1)，同时要求A把$L^2(-\infty,\infty)$中元仍变到$L^2(-\infty,\infty)$中，那末A的定义域最大只能是$\mathscr{D}$了. A是个线性算子，但它不是有界算子. 因为如果 $f_n(t)$是区间$[n,\ n+1]$ 的特征函数，那末$\|f_n\|=1$. 但是

$$\|Af_n\|^2=\int_n^{n+1}t^2dt=\frac{1}{3}((n+1)^3-n^3)$$

因此当 $n\to\infty$ 时，$\|Af_n\|\to+\infty$.

设K为实数域或复数域，H和G是K上线性空间，A、B 分别是以H的线性子空间 $\mathscr{D}(A)$、$\mathscr{D}(B)$ 为定义域的取值于G的线性算子，$\alpha,\beta\in K$. 我们规定算子的一些运算如下：

(i) 以$\mathscr{D}(A)$ 为定义域的算子 $x\longmapsto\alpha Ax$ 称为 α 与A的乘积，记为αA;

(ii) 以$\mathscr{D}(A)\cap\mathscr{D}(B)$为定义域的算子 $x\longmapsto Ax+Bx$ 称为A与B的和，记为 $A+B$;

(iii) 设 H、G、L 是K上线性空间，A是以 $\mathscr{D}(A)(\supset H)$为定义域的取值于$G$的线性算子，$B$是以$\mathscr{D}(B)(\subset G)$为定义域的取值于$L$的线性算子. 那末以$\mathscr{D}=\{x\mid x\in\mathscr{D}(A),\ Ax\in\mathscr{D}(B)\}$为定义域的算子 $x\longmapsto B(Ax)$称为B与A的积，记为BA.

设 A、B都是H到G的线性算子，它们的定义域分别是 $\mathscr{D}(A)$

和$\mathscr{D}(B)$, 如果 $\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{D}(B)$ 而且对于 $x\in\mathscr{D}(A)$, $Ax=Bx$, 就说B是A的延拓, 记为 $A\subset B$. 如果 $A\subset B$ 而且 $B\subset A$ 才认为两个算子 A 和 B 是相等的.

例 2 设 A 是例 1 中的乘法算子, I 表示 $L^2(-\infty,\infty)$ 中的恒等算子, $A+I$ 的定义域仍为 $\mathscr{D}$, 而且 $(A+I)f=(t+1)f(t)$ $(f\in\mathscr{D})$. 我们注意 $0A$(数 0 乘上算子 A)并不就是零算子 0, 因为零算子是在全空间定义的, 而 $0A$ 的定义域是$\mathscr{D}$. 所以 $0A\neq 0$, 而是 $0A\subset 0$, 但是 $A0=0$, 又易知算子 $A^n=\overbrace{AA\cdots A}^{n\text{个}}$的定义域

$$\mathscr{D}(A^n)=\{f\,|\,f\in L^2(-\infty,\infty),\ \int_{-\infty}^{\infty}|t^nf(t)|^2dt<\infty\}$$

而　$A^nf=t^nf(t)$　$(f\in\mathscr{D}(A^n))$.

2. 共轭算子　现在我们要把§ 4 中有界算子的共轭算子的概念推广到定义域不一定是全空间的线性算子上去.

首先我们注意下面的命题.

引理 1　设 H 和 G 是 Hilbert 空间, T 是$\mathscr{D}(T)$ $(\subset H)$ 到 G 中的线性算子, 那末对 G 中某一个向量 y, 满足

$$(Tx,y)=(x,y^*)\qquad (x\in\mathscr{D}(T))\tag{9.2}$$

的 H 中向量 y^* 最多只有一个的充要条件是$\mathscr{D}(T)$在 H 中稠密.

证　设 $\overline{\mathscr{D}(T)}=H$, 那末如果 H 中向量 y_1^* 及 y_2^* 都使(9.2)式成立, 即

$$(Tx,y)=(x,y_1^*),\ (Tx,y)=(x,y_2^*)\qquad (x\in\mathscr{D}(T))$$

就得到 $(x,y_1^*-y_2^*)=0$ 对任何 $x\in\mathscr{D}(T)$ 成立, 即 $y_1^*-y_2^*\perp\mathscr{D}(T)$. 但由于 $\overline{\mathscr{D}(T)}=H$, 根据§ 1 中定理, 可知 $y_1^*=y_2^*$, 所以使(9.2)式成立的 y^* 至多只有一个.

另一方面, 如果 $\overline{\mathscr{D}(T)}\neq H$, 那末必有 $z\in H$, $z\neq 0$, $z\perp\overline{\mathscr{D}(T)}$. 因此对于 $y=0$, 取 $y^*=0$ 及 $y^*=z$ 都使(9.2)式成立, 因

此使(9.2)式成立的 y^* 可以不止一个. 所以使(9.2)式成立的 y^* 至多只有一个时, 必定 $\overline{\mathscr{D}(T)}=H$. 证毕.

但我们注意, 引理1只是讨论了唯一性, 即使 $\overline{\mathscr{D}(T)}=H$, 也并不保证对于一切 $y\in G$, 都能够找到使(9.2)式成立的 y^*. 另一方面, 在 $\overline{\mathscr{D}(T)}\neq H$ 时, 对于某些 $y\in G$, 仍然可能没有使(9.2)式成立的 y^*, 但如果 $y\in G$ 使得(9.2)式有解时, 解就必定不止一个. 为了保证相应于 y 的 y^* 的唯一性, 就需要 $\mathscr{D}(T)$ 在 H 中的稠密性, 因此引进下面的定义.

定义 如果算子定义域在全空间中稠密, 就称它是**稠定算子**.

设 H、G 是 Hilbert 空间, T 是 H 到 G 的稠定线性算子. 任取 $y\in G$, 这时 $\varphi_y: x\longmapsto (Tx, y)$ 是以 $\mathscr{D}(T)$ 为定义域的线性泛函. 由于 $\mathscr{D}(T)$ 在 H 中稠密, 利用 Riesz 的表示定理不难知道: 线性泛函 φ_y 在 $\mathscr{D}(T)$ 上连续的充要条件是存在(唯一的) y^*, 使得 $\varphi_y(x)=(x, y^*)$, $\mathscr{D}(T)$ 在 H 中稠密就保证了 y^* 的唯一性. 当 T 是全空间定义的有界线性算子时, 对任何 y, φ_y 是连续的, 因而都有相应的 y^*, 而映照 $y\longmapsto y^*$ 就是§4中所定义的 T 的共轭算子 T^*. 对于一般的稠定的线性算子, 就不一定对每个 $y\in G$, φ_y 都是连续的, 而我们只能挑选那些使 φ_y 连续, 即使得 y^* 存在的 y, 作为共轭算子 T^* 的定义域中的向量. 我们就是用这样的方法来定义共轭算子的.

定义 设 H 和 G 是 Hilbert 空间, T 是 H 到 G 的稠定线性算子. 它的定义域为 $\mathscr{D}(T)$, 记

$\mathscr{D}(T^*)=\{y\,|\,y\in G$, 存在 $y^*\in H$ 使 $(Tx, y)=(x, y^*)$ 对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$ 成立$\}$

并在 $\mathscr{D}(T^*)$ 上作算子 T^*: $y\longmapsto y^*(y\in\mathscr{D}(T^*))$. 那末称 T^* 为 T 的**共轭算子**(或**伴随算子**).

由上所述, T 的共轭算子 T^* 的意义是完全确定的, 从共轭算子的定义可知, 对于任何 $x\in\mathscr{D}(T)$ 及 $y\in\mathscr{D}(T^*)$ 成立着等式

$$(Tx, y)=(x, T^*y) \tag{9.3}$$

引理 2 设 H、G 是两个 Hilbert 空间. 共轭算子有下列性质.

(i) H 到 G 的稠定线性算子 T 的共轭算子 T^* 是线性算子;

(ii) 设 T_1、T_2 是 H 到 G 的稠定线性算子, 而且 $\mathscr{D}(T_1)\cap\mathscr{D}(T_2)$ 也是 H 中稠密集, 那末 $(T_1+T_2)^*\supset T_1^*+T_2^*$;

(iii) 设 T_1、T_2 都是 H 到 G 的稠定线性算子, 且 $T_1\subset T_2$, 那末 $T_1^*\supset T_2^*$;

(iv) 设 T 是 H 到 G 的稠定线性算子. 那末

$$\mathscr{N}(T)\subset\mathscr{R}(T^*)^{\perp},\quad \mathscr{N}(T)\supset\mathscr{R}(T^*)^{\perp}\cap\mathscr{D}(T)$$

$$\mathscr{N}(T^*)=\mathscr{R}(T)^{\perp}$$

证 (i) 如果 y_1、$y_2\in\mathscr{D}(T^*)$, α、β 是数, 那末对任何 $x\in\mathscr{D}(T)$, 由(9.3)式,

$$(Tx, y_1)=(x, T^*y_1),\qquad (Tx, y_2)=(x, T^*y_2)$$

所以得到

$$\begin{aligned}(Tx, \alpha y_1+\beta y_2)&=\bar{\alpha}(Tx, y_1)+\bar{\beta}(Tx, y_2)\\&=\bar{\alpha}(x, T^*y_1)+\bar{\beta}(x, T^*y_2)=(x, \alpha T^*y_1+\beta T^*y_2)\end{aligned}$$

因为上式对任何 $x\in\mathscr{D}(T)$ 成立, 由共轭算子的定义, 即知

$$\alpha y_1+\beta y_2\in\mathscr{D}(T^*),\quad T^*(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha T^*y_1+\beta T^*y_2$$

所以 T^* 是线性算子.

(ii) 如果 $y\in\mathscr{D}(T_1^*)\cap\mathscr{D}(T_2^*)=\mathscr{D}(T_1^*+T_2^*)$, 那末对任何 $x\in\mathscr{D}(T_1)\cap\mathscr{D}(T_2)=\mathscr{D}(T_1+T_2)$

$$(T_1x, y)=(x, T_1^*y),\quad (T_2x, y)=(x, T_2^*y)$$

所以 $((T_1+T_2)x, y)=(x, T_1^*y+T_2^*y)=(x, (T_1^*+T_2^*)y)$. 由共轭算子定义即知 $y\in\mathscr{D}((T_1+T_2)^*)$ 而且 $(T_1+T_2)^*y=(T_1^*+T_2^*)y$, 因此

$$(T_1+T_2)^*\supset T_1^*+T_2^*$$

(iii) 由共轭算子定义显然可得.

(iv) 证明完全仿§4定理4. 证毕.

系 如果 T_1、T_2 中有一个是全空间定义的有界线性算子, 那末(ii)中的结论可改成 $(T_1+T_2)^*=T_1^*+T_2^*$

证 设 T_1 是全空间定义的有界线性算子. 把(ii)的结论用于 T_1+T_2 和 $-T_1$, 可得 $\mathscr{D}([(T_1+T_2)-T_1]^*)\supset\mathscr{D}((T_1+T_2)^*+(-T_1^*))$, 即

$$\mathscr{D}((T_1+T_2)^*)\subset\mathscr{D}(T_2^*)=\mathscr{D}(T_1^*+T_2^*)$$

因此 $(T_1+T_2)^*$ 和 $T_1^*+T_2^*$ 的定义域相同, 所以等式成立. 证毕

引理3 设 T 是 H 到 G 的稠定线性算子, 那末 T^* 是闭算子.

证 设 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T^*)$, $x_n\to x_0\in G$, $T^*x_n\to y_0\in H$, 今证 $x_0\in\mathscr{D}(T^*)$ 而且 $T^*x_0=y_0$. 事实上, 对任何 $x\in\mathscr{D}(T)$, $(Tx, x_n)=(x, T^*x_n)$. 令 $n\to\infty$, 就得到 $(Tx, x_0)=(x, y_0)$. 因而由 T^* 的定义得知 $x_0\in\mathscr{D}(T^*)$ 且 $T^*x_0=y_0$. 证毕.

例3 在复 Hilbert 空间 $L^2[0, 1]$ 中, 记

$$\mathscr{D}=\{f\,|\,f(t)\text{是}[0, 1]\text{上全连续函数而且}$$
$$f(0)=f(1)=0,\ f'(t)\in L^2[0, 1]\}$$

显然 $\mathscr{D}$ 是 $L^2[0, 1]$ 中稠密的线性子空间, 作以 $\mathscr{D}$ 为定义域的 $L^2[0, 1]$ 中算子 T 如下:

$$(Tf)(t)=if'(t)\qquad f\in\mathscr{D}$$

现在我们来求 T 的共轭算子 T^*.

设 g 和 $g^*\in L^2[0, 1]$ 使得

$$(Tf, g)=(f, g^*)\qquad f\in\mathscr{D}\tag{9.4}$$

也就是 $\int_0^1 if'(t)\overline{g(t)}dt=\int_0^1 f(t)\overline{g^*(t)}dt$ 对任何 $f\in\mathscr{D}$ 成立. 记 $g^{**}(t)=\int_0^t g^*(\tau)d\tau$. 利用分部积分公式(见第三章§8)

$$(f', -g^{**})=(f, g^*)\tag{9.5}$$

由(9.4)及(9.5)式即得 $(f', -ig+g^{**})=0$

我们注意，虽然$\{f' \mid f\in\mathscr{D}\}$并不在$L^2[0, 1]$中稠密，但它和$L^2[0,1]$只相差一维. 事实上，由于对任何$\varphi\in L^2[0,1]$，函数

$$f(t)=\int_0^t \varphi(t')dt'-t\int_0^1\varphi(t')dt'$$

属于$\mathscr{D}$，而且$f'(t)=\varphi(t)-\int_0^1\varphi(t)dt(=\varphi-(\varphi,1)1)$，反之，对任何$f\in\mathscr{D}$，作$\varphi(t)=f'(t)-\int_0^1 f'(t)dt$，便知

$$\{f' \mid f\in\mathscr{D}\}=\left\{\varphi-\int_0^1\varphi(t)dt\cdot 1 \mid \varphi\in L^2[0,1]\right\}$$

这里1是$L^2[0,1]$中元. 于是

$$\{f' \mid f\in\mathscr{D}\}^{\perp}=\{c\cdot 1\}$$

因为$-ig+g^{**}\in\{f' \mid f\in\mathscr{D}\}^{\perp}$故存在复数$c$，使得$-ig+g^{**}=c$，即

$$g=-ig^{**}+ic=-i\int_0^t g^*(\tau)d\tau+ic \tag{9.6}$$

记

$$\mathscr{D}^*=\{\tilde g \mid \tilde g\in L^2[0,1],\ \tilde g\ \text{是}[0,1]\text{上全连续函数，而且}\ \tilde g'(t)\in L^2[0,1]\}$$

由(9.6)，可知$g\in\mathscr{D}^*$，且$g^*=ig'$. 反过来，当$g\in\mathscr{D}^*$，$g^*=ig'$时，用分部积分法可以说明(9.4)式成立. 因此，$\mathscr{D}(T^*)=\mathscr{D}^*$，而且

$$T^*g=ig' \qquad (g\in\mathscr{D}^*)$$

3. 对称算子与自共轭算子　在例3中，$T\subset T^*$. 但因为$\mathscr{D}\neq\mathscr{D}^*$，所以$T\neq T^*$. 我们引进下面的概念.

定义　H中的稠定线性算子T，如果有$T\subset T^*$，就称T是**对称**的(或 **Hermite** 的)，又如果成立$T=T^*$，就称T是**自共轭**的或**自伴的**.

显然自共轭算子必是对称算子，但对称算子不一定是自共轭的. 例如例3中的算子T. 显然由于$\mathscr{D}(T^*)=\mathscr{D}^*\supset\mathscr{D}=\mathscr{D}(T)$，

并且当 $f\in\mathscr{D}$时, $Tf=T^*f=if'$, 所以 T 是对称算子. 但是, $\mathscr{D}^*\neq\mathscr{D}$, 所以 T 并不是自共轭算子. 如果将 $T=i\dfrac{d}{dt}$ 的定义域适当扩大, 就成为自共轭算子了.

例 3 续在例 3 中取

$$\mathscr{D}'=\{f\mid f(t)\text{在}[0,1]\text{上全连续, 且 } f'(t)\in L^2[0,1],\\ f(0)=f(1)\}$$

取 T': $(T'f)(t)=if'(t)$, $f\in\mathscr{D}'$. 那末 T' 是 $L^2[0,1]$上的自共轭算子.

事实上, 首先容易直接验证(更方便的是用下面引理 4 验证) T' 是对称算子, 因此 $T'\subset T'^*$. 又由于例 3 中的 $\mathscr{D}\subset\mathscr{D}'$, 因此 $T\subset T'$, 由引理 2, 就得到 $T'^*\subset T^*$. 从而

$$T\subset T'\subset T'^*\subset T^*$$

因为

$$\mathscr{D}(T^*)=\{f\mid f(t)\text{是}[0,1]\text{上全连续, 而且 } f'(t)\in L^2[0,1]\}$$

并且 $T^*g=ig'$ $(g\in\mathscr{D}(T^*))$, 因而当 $g\in\mathscr{D}(T'^*)$ $(\subset\mathscr{D}(T^*))$时,

$$T'^*g=T^*g=ig'$$

根据全连续函数的分部积分公式, 对任何 $f\in\mathscr{D}(T')$, $g\in\mathscr{D}(T'^*)$, 有

$$(T'f,g)=\int_0^1 if'(t)\overline{g(t)}dt=if(t)\overline{g(t)}\Big|_0^1-\int_0^1 if(t)\overline{g'(t)}dt$$
$$=i\left(f(1)\overline{g(1)}-f(0)\overline{g(0)}\right)+(f,T'^*g)$$

因为 $f(1)=f(0)$, 由上式可知必有 $f(1)(\overline{g(1)}-\overline{g(0)})=0$, 即$\overline{g(1)}=\overline{g(0)}$, 从而$\mathscr{D}(T'^*)=\mathscr{D}(T')$, 这就是说 T' 是自共轭算子.

定理 1 设H是 Hilbert 空间. 如果T是定义在整个 H 上的对称算子, 那末 T 必是 H 上的有界的自共轭算子.

证 因为T是对称算子, 即 $T\subset T^*$, 并且 $\mathscr{D}(T)=H$, 所以$T=$

T^*. 由引理3, T是H上的闭算子. 再由第五章§4的闭图象定理, T是H上的有界算子. 证毕.

引理4 H中稠定线性算子T是对称算子的充要条件是对任何x、$y\in\mathscr{D}(T)$, 都成立$(Tx,y)=(x,Ty)$.

证 如果T是对称的, 由(9.3)式即知结论成立. 反过来, 如对任何x、$y\in\mathscr{D}(T)$, $(Tx, y)=(x, Ty)$. 由T^*的定义, 可知$y\in\mathscr{D}(T^*)$而且$T^*y=Ty$, 所以$T\subset T^*$. 证毕.

例4 我们再考察例1中的乘法算子A. 我们证明它是个自共轭算子. 由引理4容易验证A是个对称算子. 下面再证$A^*\subset A$. 设$g\in\mathscr{D}(A^*)$而且$A^*g=g^*$. 那末就有$(Af,g)=(f,g^*)$, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\overline{g(t)}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g^*(t)}dt \qquad (f\in\mathscr{D})$$

因此, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)[t\overline{g(t)}-\overline{g^*(t)}]dt=0$, 特别当取$f(t)$是有界勒贝格可测集的特征函数时, 得知函数$t\overline{g(t)}-\overline{g^*(t)}$在任何有界勒贝格可测集上的积分为零, 可见它必定几乎处处为零. 因此

$$tg(t)\doteq g^*(t)$$

所以$g\in\mathscr{D}(A)$. 这样就证明了$A=A^*$.

引理5 设A是Hilbert空间H中的自共轭算子, B是H上对称算子, 如果$A\subset B$那末$A=B$.

证 由$A\subset B$即得$A^*\supset B^*$, 这就是$A=A^*\supset B^*\supset B\supset A$. 所以$A=B$.

引理6 设H和G是Hilbert空间, A是H中自共轭算子, U ($\mathscr{D}(U)=H$)是H到G上的酉算子, 那末UAU^{-1}是G中的自共轭算子.

证 记$T=UAU^{-1}$, 显然$\mathscr{D}(T)=U\mathscr{D}(A)$, 因此$T$是$G$中稠定的线性算子. 当$x$、$y\in\mathscr{D}(T)$时, $U^{-1}x$、$U^{-1}y\in\mathscr{D}(A)$而且

$$(Tx, y) = (UAU^{-1}x, y) = (AU^{-1}x, U^{-1}y) = (U^{-1}x, AU^{-1}y)$$
$$= (x, UAU^{-1}y) = (x, Ty)$$

所以T是对称的. 另一方面, 如果 $y\in\mathscr{D}(T^*)$, 那末由(9.3)就有

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \qquad x\in\mathscr{D}(T)$$

于是$(UAU^{-1}x, y) = (x, T^*y)$, 因而

$$(AU^{-1}x, U^{-1}y) = (x, T^*y) = (U^{-1}x, U^{-1}T^*y)$$

但 $U^{-1}\mathscr{D}(T) = \mathscr{D}(A)$, 因此 $U^{-1}y\in\mathscr{D}(A^*)$, 且 $A^*U^{-1}y = U^{-1}T^*y$, 由 $A^* = A$, 可见 $y\in\mathscr{D}(T)$, $T^*y = UAU^{-1}y$, 这就证明了 $T^*\subset T$. 因而T是自共轭的. 证毕.

当A是全空间定义的有界算子时, $(UAU^{-1})^* = (U^{-1})^*A^*U^* = UAU^{-1}$, 这时引理 6 是显然的.

定义 设 H 和G是内积空间, A是由 H 的子空间$\mathscr{D}(A)$到 H 的算子, U 是 H 到G上的酉算子. 那末称算子 UAU^{-1}和A是酉等价的.

这种酉等价的关系是算子的表示理论的基础. 我们常常把抽象空间中的算子表示成另一个具体空间中与原来抽象算子酉等价的具体算子(见后面定理 5), 即通过酉等价关系把 H 和G同一化, 把A和 UAU^{-1} 同一化.

例 5 在复空间 $L^2(-\infty, \infty)$中, 记

$$\mathscr{D}_1 = \{f \mid f\in L^2(-\infty, \infty),\ f \text{ 在任何有限区间上全连续}, \\ f'\in L^2(-\infty, \infty)\}$$

作以$\mathscr{D}_1$为定义域的 $L^2(-\infty, \infty)$中算子D如下:

$$Df = \frac{1}{i}f', \quad f\in\mathscr{D}_1$$

U 表示 $L^2(-\infty, \infty)$的 L^2-Fourier 变换, 它是酉算子. A 表示例 4 中的乘法算子, 它是自共轭算子, 它的定义域为$\mathscr{D}$. 下面我们要证

明

$$D=UAU^{-1} \tag{9.7}$$

首先我们证明 $U\mathscr{D}=\mathscr{D}_1$. 设 $f\in\mathscr{D}$, 记 $\varphi=Af\in L^2(-\infty,\infty)$, 那末

$$\tilde{f}(\alpha)=(\text{强})\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{i\alpha t}f(t)\,dt$$

$$\tilde{\varphi}(\alpha)=(\text{强})\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{i\alpha t}tf(t)\,dt \tag{9.8}$$

由第四章§3, 平均收敛的函数列必有几乎处处收敛的子列, 所以可取 $\lambda_n\to\infty$, 使(9.8)中两式右边的函数列几乎处处收敛于左边函数.

取 α_0 和 α 是收敛点, 那末

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\tilde{\varphi}(x)\,dx&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n}e^{ixt}tf(t)\,dt\,dx\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n}(e^{i\alpha t}-e^{i\alpha_0 t})f(t)\,dt\\&=-i(\tilde{f}(\alpha)-\tilde{f}(\alpha_0))\end{aligned}$$

因而 $\tilde{f}(\alpha)=\int_{\alpha_0}^{\alpha}i\tilde{\varphi}(x)\,dx+\tilde{f}(\alpha_0)$. 由此 $\tilde{f}\in\mathscr{D}_1$, 也就是 $U\mathscr{D}\subset\mathscr{D}_1$. 而且我们还得到了对 $f\in\mathscr{D}$, $DUf=D\tilde{f}(\alpha)=\tilde{\varphi}(\alpha)=UAf$.

类似地不难证明 $U^{-1}\mathscr{D}_1\subset\mathscr{D}$. 这样就说明 $DU=UA$, 所以

$$D=UAU^{-1}$$

由引理 6 即知 D 是个自共轭算子.

4. Cayley 变换 下面我们讨论自共轭算子和酉算子之间的关系. 它是通过这样的类比而来的: 如果我们把算子 A 看成复变数 z, A^* 看成复变数 $\bar{z}$, 那末自共轭算子相当于实变数, 酉算子相当于模为 1 的复变数. 因为由分式线性变换可以自然地把实变数变成模为 1 的复变数. 因此就考虑利用分式线性变换把自共轭算

子变为酉算子. 下面我们更一般地对对称算子建立 Cayley 变换的理论.

引理 7 设 A 是复 Hilbert 空间 H 上对称算子, 那末

(i) 算子 $A\pm iI$ 将 $\mathscr{D}(A)$ 一对一地映到 $\mathscr{R}(A\pm iI)$ 上, 并且 $(A\pm iI)^{-1}$ 是 $\mathscr{R}(A\pm iI)$ 到 $\mathscr{D}(A)$ 的有界线性算子;

(ii) 当 A 是闭对称算子时, $\mathscr{R}(A\pm iI)$ 是 H 中的闭线性子空间;

(iii) 如果 A 是 H 上自共轭算子, 则 $\mathscr{R}(A\pm iI)=H$.

证 (i) 显然, $\mathscr{D}(A\pm iI)=\mathscr{D}(A)$. 由于 A 是对称的, 所以对任何 $f\in\mathscr{D}(A)$, $(Af, f)=(f, Af)$, 从而 (Af, f) 是实数. 由此得到

$$\|(A\pm iI)f\|^2=((A\pm iI)f, (A\pm iI)f)=(Af, Af)+(if, if)$$
$$=\|Af\|^2+\|f\|^2 \tag{9.9}$$

因此 $\|(A\pm iI)f\|\geqslant\|f\|$ $(f\in\mathscr{D}(A))$. 可见 $A\pm iI$ 是可逆的, 即 $(A\pm iI)^{-1}$ 是 $\mathscr{R}(A\pm iI)\to\mathscr{D}(A)$ 上的算子, 且 $\|(A\pm iI)^{-1}\|\leqslant 1$.

(ii) 对任何 $g\in\overline{\mathscr{R}(A\pm iI)}$, 存在 $g_n\in\mathscr{R}(A\pm iI)$, 使得 $g_n\to g(n\to\infty)$. 从而存在 $f_n\in\mathscr{D}(A)$, $(A\pm iI)f_n=g_n$. 由于

$$\|f_n-f_m\|=\|(A\pm iI)^{-1}(g_n-g_m)\|\leqslant\|g_n-g_m\|\to 0$$
$$(n, m\to\infty)$$

所以 $\{f_n\}$ 有极限 $f\in H$. 但算子 A 是闭的, 所以 $f\in\mathscr{D}(A)$, 且 $(A\pm iI)f=g$, 即 $g\in\mathscr{R}(A\pm iI)$), 因此 $\mathscr{R}(A\pm iI)$ 是闭的.

(iii) 当 A 是自共轭算子时, 由引理 3, $A(=A^*)$ 是闭算子. 再由引理 2 的系, $(A\pm iI)^*=A\mp iI$. 由于本引理的(i)已证明 $\mathscr{N}(A\mp iI)=\{0\}$, 利用引理 2 的(iv), $\mathscr{R}(A\pm iI)$ 在 H 上稠密. 但根据本引理的(ii), $\mathscr{R}(A\pm iI)$ 是闭线性空间, 所以 $\mathscr{R}(A\pm iI)=H$. 证毕.

定义 A 是复 Hilbert 空间上对称算子, 称 $\mathscr{R}(A+iI)\to\mathscr{R}$

$(A-iI)$的算子

$$U=(A-iI)(A+iI)^{-1} \tag{9.10}$$

是A的凯莱(Cayley)变换.

定理2 设A是复Hilbert空间上对称算子, U是A的Cayley变换, 那末

(i) U是$\mathscr{R}(A+iI)\to\mathscr{R}(A-iI)$上的保范算子;

(ii) $1\overline{\in}\sigma_p(U)$ ($\sigma_p(U)$是U的特征值全体);

(iii) $\mathscr{R}(I-U)=\mathscr{D}(A)$, 且

$$A=i(I+U)(I-U)^{-1}$$

特别, 当A是自共轭算子时, U还是H上酉算子.

证 (i) 由于$(A+iI)^{-1}$是定义在$\mathscr{R}(A+iI)$上, 值域为$\mathscr{D}(A)$的有界线性算子, 而$\mathscr{D}(A-iI)=\mathscr{D}(A)$, 可见(9.10)是有确定意义的, 并且$\mathscr{D}(U)=\mathscr{R}(A+iI)$, $\mathscr{R}(U)=\mathscr{R}(A-iI)$.

对于$f\in\mathscr{D}(U)$, 记$g=(A+iI)^{-1}f$, 因此$g\in\mathscr{D}(A)$, 于是

$$Uf=(A-iI)g, \qquad f=(A+iI)g \tag{9.11}$$

由(9.9)知

$$\|Uf\|^2=\|Ag\|^2+\|g\|^2, \ \|f\|^2=\|Ag\|^2+\|g\|^2$$

所以$\|Uf\|=\|f\|$ $(f\in\mathscr{D}(U))$. 因而U是$\mathscr{R}(A+iI)$到$\mathscr{R}(A-iI)$上保范算子.

(ii) 对$f\in\mathscr{D}(U)$, 有$g\in\mathscr{D}(A)$, 使(9.11)成立. 如果$Uf=f$, 必有$(A+iI)g=(A-iI)g$, 即$g=0$, 从而$f=0$, 可见$1\overline{\in}\sigma_p(U)$.

(iii) 反解方程(9.11)立即得到

$$(I-U)f=2ig, \qquad (I+U)f=2Ag \tag{9.12}$$

当f在$\mathscr{R}(A+iI)$(即$\mathscr{D}(U)$)中变化时, g将取遍$\mathscr{D}(A)$中元, 所以$\mathscr{R}(I-U)=\mathscr{D}(A)$. 而且当$g\in\mathscr{D}(A)$时,

$$(I+U)(I-U)^{-1}g=\frac{1}{2i}(I+U)f=\frac{1}{i}Ag$$

所以 $A=i(I+U)(I-U)^{-1}$.

特别,当 A 是自共轭算子时,由引理 7 的(iii)知 $\mathscr{D}(U)=\mathscr{R}(U)=H$,所以 U 还是 H 上酉算子. 证毕.

系 当 A 是全空间上定义的有界自共轭算子时,那末 1 必是 A 的 Cayley 变换 U 的正则点.

证 在定理 2 证明中,对于 $g\in\mathscr{D}(A)=H$,记 $f=(A+iI)g$,$(I-U)f=2ig$,因此 $\mathscr{R}(I-U)=H$. 由逆算子定理便得到 $(I-U)^{-1}$ 是定义在 H 上的有界算子. 证毕.

现在我们证明定理 2 的逆也成立.

定理 3 设 U 是 Hilbert 空间 H 上 $\mathscr{D}(U)\to\mathscr{R}(U)$ 的保范算子,如果 $\mathscr{R}(I-U)$ 在 H 中稠密,那末

(i) 1 必不是 U 的特征值;

(ii) 线性算子

$$A=i(I+U)(I-U)^{-1} \tag{9.13}$$

是定义在 $\mathscr{R}(I-U)$ 上的对称算子,并且 A 的 Cayley 变换就是 U;

(iii) 如果 $\mathscr{D}(U)$ 还是闭子空间,那末 A 是闭对称算子;

(iv) 如果 U 还是 H 上酉算子,那末 A 是自共轭算子.

证 (i) 对任何 $x\in\mathscr{R}(I-U)$ 必有 $z\in\mathscr{D}(U)$,使得 $x=(I-U)z$. 如果有 $y\in\mathscr{D}(U)$,使得 $(U-I)y=0$,那末

$$\begin{aligned}(y,x)=(y,(I-U)z)&=(Uy,Uz)-(y,Uz)\\&=(Uy-y,Uz)=0\end{aligned}$$

注意到 $\overline{\mathscr{R}(I-U)}=H$,因此 $y=0$.

(ii) 显然,从(9.13)可知 $\mathscr{D}(A)=\mathscr{R}(I-U)$,因而 A 是稠定的. 为证 A 是对称算子,只需证明:对任何 g_1、$g_2\in\mathscr{D}(A)$,$(Ag_1,g_2)=(g_1,Ag_2)$. 设 g_1、$g_2\in\mathscr{D}(A)$,则存在 f_1、$f_2\in\mathscr{D}(U)$,使得 $g_i=(I-U)f_i\ (i=1,2)$. 利用 U 的保范性直接计算便有

$$(Ag_1,g_2)=i((I+U)f_1,(I-U)f_2)=i[(Uf_1,f_2)-(f_1,Uf_2)]$$

$$=(g_1, Ag_2)$$

即 A 是对称的.

从(9.13)可知, 在$\mathscr{D}(A)(=\mathscr{R}(I-U))$上,

$$A+iI=i(I+U)(I-U)^{-1}+i(I-U)(I-U)^{-1}=2i(I-U)^{-1}$$

$$A-iI=i(I+U)(I-U)^{-1}-i(I-U)(I-U)^{-1}$$

$$=2iU(I-U)^{-1}$$

由于$(I-U)^{-1}$是$\mathscr{R}(I-U)$到$\mathscr{D}(U)$上的一一对应, 由上面第一式可知$\mathscr{D}(U)=\mathscr{R}(A+iI)$, 并且$(A+iI)^{-1}=\frac{1}{2i}(I-U)$. 再由上面第二式可知$U=(A-iI)(A+iI)^{-1}$. 这表明 A 的按(9.10)所定义的 Cayley 变换正是 U.

(iii) 设$\mathscr{D}(U)$是闭的. 由 U 的保范性易知$\mathscr{R}(U)$也是闭的. 现在证明 A 是闭算子: 设有$\{g_n\}\subset\mathscr{D}(A)$, $g_n\to g$, 并且 $Ag_n\to f$. 显然$(A\pm iI)g_n\to f\pm ig$. 因为 U 是对称算子 A 的 Cayley 变换, 所以$(A+iI)g_n\in\mathscr{D}(U)$, $U(A+iI)g_n=(A-iI)g_n$. 再令 $n\to\infty$, 得到

$$U(f+ig)=f-ig$$

从而

$$(I-U)(f+ig)=2ig,\ (I+U)(f+ig)=2f$$

这说明 $g\in\mathscr{R}(I-U)=\mathscr{D}(A)$, 且 $Ag=f$. 因此 A 是闭算子.

(iv) 如果 U 是酉算子, 那末从(9.13)可知

$$(A-iI)=2iU(I-U)^{-1},\ (A+iI)=2i(I-U)^{-1}$$

因为$\mathscr{D}(A^*)=\mathscr{D}((A+iI)^*)$, 要证明 A 是自共轭算子, 只要证明$\mathscr{D}((A+iI)^*)\subset\mathscr{D}(A)$即可. 今证明如下:

因为$(I-U)^{-1}(I-U)=I$, $(I-U)^{-1}$是稠定的, 并且 $I-U$ 是全 H 上定义的有界线性算子, 易知对任何 $y\in\mathscr{D}(((I-U)^{-1*})$, $x\in H$, 有

$$(x, y)=((I-U)^{-1}(I-U)x, y)=((I-U)x, (I-U)^{-1*}y)$$
$$=(x, (I-U)^*(I-U)^{-1*}y)$$

即对任何 $y\in\mathscr{D}((I-U)^{-1*})$, $(I-U)^*(I-U)^{-1*}y=y$. 但是$(I-U)^*=I-U^*=(U-I)U^{-1}$,由此可知$(U-I)U^{-1}(I-U)^{-1*}y=y$,即$y\in\mathscr{R}(I-U)=\mathscr{D}(A)$,从而$\mathscr{D}((A+iI)^*)\subset\mathscr{D}(A)$. 证毕.

(iv) 的另一证明 设 $y\in\mathscr{D}(A^*)$,那末存在 $y^*\in H$,使得

$$((I+U)(I-U)^{-1}x, y)=(x, y^*), \qquad x\in\mathscr{R}(I-U)$$

令 $z=(I-U)^{-1}x$, 从上式可知对一切 $z\in H$,

$$((I+U)z, y)=((I-U)z, y^*)$$

因为 U 是酉算子,下式成立

$$((I+U)z, y)=(Uz, (I+U)y)$$
$$((I-U)z, y^*)=(Uz, (U-I)y^*)$$

所以,对一切 $z\in H$,

$$(Uz, (I+U)y)=(Uz, (U-I)y^*)$$

因为 $UH=H$, 从上式就得到

$$(I+U)y=(U-I)y^*$$

即 $y=\frac{1}{2}(I-U)(y-y^*)\in\mathscr{R}(I-U)$, 从而$\mathscr{D}(A^*)\subset\mathscr{D}(A)$. 证毕.

由(9.13)式所定义的对称算子A称为保范算子U的Cayley变换,或称为Cayley变换(9.10)的**逆变换**. 定理2、3就是沟通对称算子和保范算子,特别是自共轭算子和酉算子之间的桥梁.由此可以利用保范算子的保范扩张或酉扩张来讨论对称算子的对称扩张或自共轭扩张.

定义 A是复Hilberf空间H上对称算子, 记 $m=\dim(H\ominus\mathscr{R}(A-iI))$, $n=\dim(H\ominus\mathscr{R}(A+iI))$(这里空间维数是指完备就

范直交系的势①)，称数对(m,n)为A的**亏指数**. 如果U是H上的保范算子，记$m=\dim(H\ominus\mathscr{R}(U))$，$n=\dim(H\ominus\mathscr{D}(U))$，称$(m,n)$为$U$的亏指数. 并称$H\ominus\mathscr{R}(A-iI)$、$H\ominus\mathscr{R}(A+iI)$和$H\ominus\mathscr{R}(U)$、$H\ominus\mathscr{D}(U)$分别为$A$和$U$的**亏子空间**.

显然，自共轭算子的亏指数$(m,n)=(0,0)$

定理 4　设A是复 Hilbert 空间上对称算子，那末

(i) 必存在A的最小闭对称扩张，即存在闭对称算子$\bar{A}$: $\bar{A}\supset A$，且对任何闭对称扩张$\tilde{A}$，总有$\tilde{A}\supset\bar{A}$;

(ii) A有自共轭扩张的充要条件是A的亏指数(m,n)满足$m=n$.

证　(i) 如果A是闭的，显然取$\bar{A}=A$. 如果A不是闭的，显然$\mathscr{R}(A\pm iI)$就不闭. U是A的 Cayley 变换，$\mathscr{D}(U)=\mathscr{R}(A+iI)$，$\mathscr{R}(U)=\mathscr{R}(A-iI)$，显然$U$可唯一地扩张成$\overline{\mathscr{R}(A+iI)}\to\overline{\mathscr{R}(A-iI)}$上保范算子$\bar{U}$，由于$\overline{\mathscr{R}(U-I)}=H$，自然更有$\overline{\mathscr{R}(\bar{U}-I)}=H$. 由定理 3，可作$\bar{U}$的 Cayley 变换. 记$\bar{A}$是$\bar{U}$的 Cayley 变换，由于$U\subset\bar{U}$，易知$A\subset\bar{A}$. 由于$\mathscr{D}(\bar{U})$是闭的，根据定理 3 的(iii)，$\bar{A}$是闭的对称算子.

如果再有闭对称算子$\tilde{A}\supset A$，令$\tilde{U}$是$\tilde{A}$的 Cayley 变换，由$\tilde{A}\supset A$，易知$\tilde{U}\supset U$. 因为$\tilde{A}$闭，所以$\mathscr{D}(\tilde{U})$是闭的，从而$\mathscr{D}(\tilde{U})\supset\overline{\mathscr{D}(U)}$. 但是在$\mathscr{D}(U)$上，$\tilde{U}=U$，所以在$\overline{\mathscr{D}(U)}$上也有$\tilde{U}=\bar{U}$. 由此可知$\tilde{U}\supset\bar{U}$，从而$\tilde{A}\supset\bar{A}$.

(ii) 按定义，显然A的亏指数就是U的亏指数，也就是$\bar{U}$的亏指数，从而也是$\bar{A}$的亏指数. 因为自共轭算子是闭算子，所以A有自共轭扩张的充要条件是$\bar{A}$有自共轭的扩张. 而$\bar{A}$有自共轭扩张的充要条件是相应的 Cayley 变换$\bar{U}$有酉扩张. 因为

① 利用任何无限势α满足$\aleph_0^2=\alpha$这个事实可以证明空间维数不依赖于完备就范直交系的选取.

$\dim\mathscr{D}(\bar{U})^{\perp}=m$, $\dim\mathscr{R}(\bar{U})^{\perp}=n$, 所以 $\bar{U}$ 有酉扩张时必有 $m=n$.

反之, 如果 $m=n$, 那末我们就可在 $\mathscr{D}(\bar{U})^{\perp}$, $\mathscr{R}(\bar{U})^{\perp}$ 上分别取完备就范直交系 $\{f_{\lambda}\}$、$\{g_{\lambda}\}$, $\lambda\in\Lambda$, 而 $\bar{\bar{\Lambda}}=m=n$. 只要对算子 $\bar{U}$, 补充定义一个 $\mathscr{D}(\bar{U})^{\perp}$ 到 $\mathscr{R}(\bar{U})^{\perp}$ 上的酉算子 U_0, 例如可取

$$U_0:\qquad f_{\lambda}\longmapsto g_{\lambda},\ \lambda\in\Lambda$$

作 H 上算子

$$\tilde{U}=\begin{cases}\bar{U}, \text{在 } \mathscr{D}(\bar{U}) \text{ 上};\\ U_0, \text{在} \mathscr{D}(\bar{U})^{\perp} \text{上}.\end{cases}$$

显然, $\tilde{U}$ 是 H 上酉算子, 并且 $\tilde{U}\supset\bar{U}$. 由于 $\overline{\mathscr{R}(\bar{U}-I)}=H$, 所以 $\overline{\mathscr{R}(\tilde{U}-I)}=H$. 因此由 $\tilde{U}$ 经 Cayley 变换所产生的自共轭算子 $\tilde{A}\supset A$. 证毕.

在本章的最后一节(§11)中还将对算子理论中常见的几种算子扩张进行介绍. 下面将根据后面的需要, 介绍自共轭算子与它的 Cayley 变换的谱之间的关系.

引理 8 设 A 是复 Hilbert 空间 H 中的自共轭算子, U 是 A 的 Cayley 变换. 那末在映照

$$L:\ z\longrightarrow w=\frac{z-i}{z+i}$$

下, $\sigma(A)$ 映照成 $\sigma(U)-\{1\}$ (即 $L(\sigma(A))=\sigma(U)-\{1\}$).

证 设 $z\in\rho(A)$, 并且 $z\neq -i$, 记 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$, 这时

$$\begin{aligned}wI-U&=\frac{z-i}{z+i}I-(A-iI)(A+iI)^{-1}\\&=\frac{1}{z+i}[(z-i)I-(z+i)(A-iI)(A+iI)^{-1}]\\&=\frac{1}{z+i}[(z-i)(A+iI)-(z+i)(A-iI)](A+iI)^{-1}\\&=\frac{2i}{z+i}(zI-A)(A+iI)^{-1}\end{aligned}$$

由于 z 是 A 的正则点，因此

$$(wI-U)^{-1}=\frac{z+i}{2i}(A+iI)(zI-A)^{-1}$$

是全空间定义的有界线性算子，即 $w\in\rho(U)$。从而 $L(\rho(A)-\{-i\})\subset\rho(U)-\{1\}$.

反过来，如果 $w\in\rho(U)$，$w\neq 1$，记 $z=i\frac{1+w}{1-w}$（这是 $L^{-1}w$），那末

$$\begin{aligned}(zI-A)&=i\left[\frac{1+w}{1-w}I-(I+U)(I-U)^{-1}\right]\\&=\frac{i}{1-w}[(1+w)(I-U)-(1-w)(I+U)](I-U)^{-1}\\&=\frac{2i}{1-w}(wI-U)(I-U)^{-1}\end{aligned}$$

所以 $(zI-A)^{-1}=\frac{1-w}{2i}(I-U)(wI-U)^{-1}$，从而

$$L^{-1}(\rho(U)-\{1\})\subset\rho(A)-\{-i\}.$$

如果再注意到 $L(\{-i\})=\infty$，$L(\infty)=1$，由上面可知

$$L(\sigma(A))=\sigma(U)-\{1\}.$$

证毕

系 复 Hilbert 空间 H 中自共轭算子的谱点分布在实轴上.

5. 无界函数谱积分 利用 Cayley 变换，就不难从酉算子的谱分解定理得到自共轭算子的谱分解定理了. 为了研究无界自共轭算子的谱分解，我们要用到无界函数谱积分. 首先给出下面的构造自共轭算子的两个引理.

引理 9 设 $\{A_n\}(n=1,2,3,\cdots)$ 是 Hilbert 空间 H 的全空间上定义的有界自共轭算子，而且 A_n 的值域彼此直交，记

$$\mathscr{D}=\{x\mid x\in H,\ \sum_{n=1}^{\infty}\|A_nx\|^2<\infty\}$$

又作以 $\mathscr{D}$ 为定义域的算子 A 如下:

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x \qquad (x \in \mathscr{D}) \tag{9.14}$$

(级数(9.14)按强极限收敛)那末 A 是自共轭算子.

证 记 A_n 的值域的闭包为 R_n, 在 R_n 上的投影算子记为 P_n. 由假设 $P_n(n=1, 2, \cdots)$是一列两两直交的投影算子. 根据§4定理4, A_n 在 $R_n^{\perp}$ 上为零. 记 $P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n$, 这也是投影算子, $P_0 = I - P$ 也是投影算子,这时 $I = \sum_{n=0}^{\infty} P_n$, 显然$\mathscr{D}$是线性子空间, 又 $P_n H \subset \mathscr{D}(n=0, 1, 2, \cdots)$, 所以$\mathscr{D}$在 H 中是稠密的. 当 $x \in \mathscr{D}$时, $\{A_n x\}$ 是两两直交的, 又因 $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n x\|^2 < \infty$, 所以$\sum_{n=1}^{\infty} A_n x$ 是强收敛的, 由(9.14)定义的算子 A 是确定的. 对任何 x、$y \in \mathscr{D}$, 由内积的连续性, A_n 的自共轭性即得

$$(Ax, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n x, y\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n x, y)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (x, A_n y) = \left(x, \sum_{n=1}^{\infty} A_n y\right) = (x, Ay)$$

所以 A 是对称的, $A \subset A^*$. 因此只要证明$\mathscr{D}(A^*) \subset \mathscr{D}$就可以了. 设 $y \in \mathscr{D}(A^*)$, 显然 $x_N = \sum_{n=1}^{N} A_n y \in \mathscr{D}$, 因此

$$(Ax_N, y) = (x_N, A^* y)$$

但是当 $n > N$ 时, $A_n y \perp x_N$, 所以

$$(Ax_N, y) = \lim_{m \to \infty}\left(\sum_{\nu=1}^{m} A_\nu x_N, y\right) = \lim_{m \to \infty}\left(x_N, \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu y\right)$$

$$= \left(x_N, \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu y\right) = \|x_N\|^2$$

由 Schwarz 不等式，$\|x_N\|^2=(x_N, A^*y)\leqslant\|x_N\|\|A^*y\|$，所以$\|x_N\|\leqslant\|A^*y\|$。而$\|x_N\|^2=\sum_{n=1}^{N}\|A_ny\|^2$，因此$\sum_{n=1}^{N}\|A_ny\|^2\leqslant\|A^*y\|^2$，即得 $y\in\mathscr{D}$。证毕。

引理 10 设$\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty, +\infty)\}$是 Hilbert 空间$H$ 上的谱系，$f(\lambda)$是 Baire 函数。记$\mathscr{D}=\{x|x\in H, \int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2 d\|E_\lambda x\|^2<\infty\}$，那末，必有$\mathscr{D}$上定义的算子$A$，使得当 x、$y\in\mathscr{D}$时

$$(Ax, y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)d(E_\lambda x, y) \tag{9.15}$$

而且当$x\in\mathscr{D}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1\leqslant|f(\lambda)|<n}f(\lambda)dE_\lambda x$强收敛于$Ax$。当$f$是实值函数时$A$是自共轭的。

证 我们由谱系$\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty, \infty)\}$作$(E^1, \boldsymbol{B})$上的谱测度$E$。那末当$x$、$y\in H$时，$A\longmapsto(E(A)x, y)$是$(E^1, \boldsymbol{B})$上的广义测度。

下面只证明$f(\lambda)$是实值函数的情况(如果$f(\lambda)$是复值的，只要化成实部、虚部分别加以讨论就可以了)。令

$$f_n(\lambda)=\begin{cases}f(\lambda), & \text{当 } n-1\leqslant|f(\lambda)|<n \text{ 时;}\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

那末$f_n(\lambda)$是直线上有界 Baire 函数。作H中的有界自共轭算子

$$A_n=\int f_n(\lambda)dE_\lambda$$

由 § 7 定理 2 的系 2，$\|A_nx\|^2=\int|f_n(\lambda)|^2d\|E_\lambda x\|^2$。因此

$$\mathscr{D}=\{x|x\in H, \sum_{n=1}^{\infty}\|A_nx\|^2<\infty\}$$

根据引理 9，有自共轭算子A，满足(9.14)，从而当$x\in\mathscr{D}$时，

$$(Ax, x) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n x, x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n(\lambda)d\|E_\lambda x\|^2 \qquad (9.16)$$

因为$\int_{-\infty}^{\infty}d\|E_\lambda x\|^2 = \|x\|^2 < \infty$，所以当 $x\in\mathscr{D}$时，由 Schwartz 不等式有$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|d\|E_\lambda x\|^2 < \infty$。再由$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(\lambda)| = |f(\lambda)|$以及勒贝格积分的控制收敛定理，从(9.16)就得到：对任何 $x\in\mathscr{D}$，$(Ax, x) = \int f(\lambda)d(E_\lambda x, x)$。再利用极化恒等式就得到对任何 x、$y\in\mathscr{D}$，(9.15)成立。证毕。

定义 在引理 10 条件下，称定义在

$$\mathscr{D} = \{x \mid x\in H, \int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2 d\|E_\lambda x\|^2 < \infty\}$$

上算子 A：$Ax = \lim_{n\to\infty}\int_{|f(\lambda)|\le n} f(\lambda)dE_\lambda x$ 为 $f(\lambda)$ 关于谱系$\{E_\lambda \mid \lambda\in(-\infty, \infty)\}$的（强）谱积分，记为 $A = \int f(\lambda)dE_\lambda$。

系 设$\{E_\lambda \mid \lambda\in(-\infty, \infty)\}$是 Hilbert 空间$H$上的谱系，那末以 $\mathscr{D}(A) = \{x \mid x\in H, \int\lambda^2 d\|E_\lambda x\|^2 < \infty\}$为定义域的算子 $A = \int\lambda dE_\lambda$ 是自共轭算子。

例 6 我们仍考虑$L^2(-\infty, \infty)$中的乘法算子$A: f\longmapsto tf(t)$，$\mathscr{D}(A) = \{f \mid f\in L^2(-\infty, \infty), \int_{-\infty}^{\infty}t^2|f(t)|^2 dt < \infty\}$（参看例 1）

对每个实数 λ，作 $L^2(-\infty, \infty)$中投影算子 E_λ 如下：$(E_\lambda f)(t) = \chi_{(-\infty,\lambda]}(t)f(t)$ $(f\in L^2(-\infty, \infty))$，其中 $\chi_{(-\infty,\lambda]}$是$(-\infty, \lambda]$的特征函数。显然$\{E_\lambda \mid \lambda\in(-\infty, \infty)\}$是 $L^2(-\infty, \infty)$中的谱系。由于当 f、$g\in\mathscr{D}(A)$时

$$(Af, g) = \int t f(t)\overline{g(t)}dt$$

而对于$\{E_\lambda \mid \lambda\in(-\infty,\infty)\}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E_\lambda f,\ g)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d\int_{-\infty}^{\lambda}f(t)\overline{g(t)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}tf(t)\overline{g(t)}dt$$

所以有 $(Af,\ g)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E_\lambda f,g)$. 又当 $f\in\mathscr{D}(A)$时,有

$$Af=(\text{强})\ \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\lambda dE_\lambda f$$

如果我们令 $B=A^2$, 那末$\mathscr{D}(B)=\{f\mid f\in\mathscr{D}(A),Af\in\mathscr{D}(A)\}$. 所以

$$\mathscr{D}(B)=\{f\mid f\in L^2(-\infty,\infty),\ \int_{-\infty}^{\infty}|t^2f(t)|^2dt<\infty\}$$

当 $\lambda>0$ 时, 作算子 F_λ 如下:

$$(F_\lambda f)(t)=\chi_{[-\mu,\mu]}(t)f(t),\ f\in L^2(-\infty,\infty),\ \mu=\sqrt{\lambda}$$

这时 $F_\lambda=E_\mu-E_{-\mu}$. 当 $\lambda\leqslant 0$ 时令 $F_\lambda=0$, 那末得到一个谱系$\{F_\lambda|,\lambda\in(-\infty,\infty)\}$, 这个谱系的谱测度集中在$[0,\infty)$上, 容易看出

$$B=\int\lambda dF_\lambda$$

例 7　我们再考察例 5 的微分算子. 由于 $D=UAU^{-1}$, 作 $W_\lambda=UE_\lambda U^{-1}$, 那末$\{W_\lambda\mid\lambda\in(-\infty,\infty)\}$是 $L^2(-\infty,\ \infty)$中的谱系, 这时

$$D=\int\lambda dW_\lambda$$

当 $\lambda>0$ 时令 $G_\lambda=W_\mu-W_{-\mu}$, $\mu=\sqrt{\lambda}$, 当 $\lambda\leqslant 0$ 时 令 $G_\lambda=0$, 那末$\{G_\lambda|,\lambda\in(-\infty,\infty)\}$也是 $L^2(-\infty,\infty)$中的谱系, 这时有

$$D^2=\int\lambda dG_\lambda$$

6. 自共轭算子谱分解定理　现在我们利用酉算子的谱分解定理和 Cayley 变换来建立自共轭算子的谱分解.

定理 5 (自共轭算子谱分解定理)　设H是复 Hilbert 空间, A

是以$\mathscr{D}(A)$为定义域的自共轭算子，那末必有 H 中谱系$\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$，使得

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE_\lambda$$

证 先作A的Cayley变换，得到酉算子$U=(A-iI)(A+iI)^{-1}$。这时$A=i(I+U)(I-U)^{-1}$。根据酉算子的谱分解定理，对于U有相应的在$[0,2\pi]$上的谱系E_θ，使得

$$U=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dE_\theta$$

由定理2，1不是U的特征值，因而由酉算子谱分解定理的系，有

$$E_{2\pi-0}=\lim_{\theta\to2\pi-0}E_\theta=I$$

我们作$(0,2\pi)$到$(-\infty,\infty)$的映照$\theta\longmapsto\lambda=-\mathrm{ctg}\dfrac{\theta}{2}=i\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$，这是一一对应，把$\lambda=-\mathrm{ctg}\dfrac{\theta}{2}$看成$\theta$的函数时，它是严格单调上升的连续函数，它的反函数当然也是严格单调上升的连续函数。利用这个映照，我们由谱系$\{E_\theta|\theta\in(0,2\pi)\}$作出谱系$\{F_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$如下：

$$F_\lambda=E_\theta,\qquad\left(\lambda=-\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}\right)$$

由于$\lambda\longmapsto\theta$是严格单调上升，又是连续的，因此F_λ是单调的，右连续的，由$E_{+0}=0$及$E_{2\pi-0}=I$，可知F_λ当$\lambda\to\pm\infty$时分别趋于I及0。因此$\{F_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$是$H$中的谱系。我们把$\theta$看成$\lambda$的函数，由$E_{0+}=0$及$E_{2\pi-0}=I$，容易证明

$$U=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dE_\theta=(\text{强})\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon}e^{i\theta}dE_\theta=(\text{强})\lim_{x\to\infty}\int_{-x}^{x}e^{i\theta}dF_\lambda$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\theta}dF_\lambda$$

作算子$B=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda dF_\lambda$。根据引理10的系，$B$是$H$中自共轭算子，$B$

的定义域是

$$\mathscr{D}=\{x\,|\,x\in H,\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\|F_\lambda x\|^2<\infty\}$$

现在证明：$B=A$.

事实上，由于$\left|\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right|\leqslant\max(1,\ |\lambda|)$ ①$\left(\lambda=-\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)$，因此对任何 $g\in\mathscr{D}$,

$$\int\left|\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right|^2 d\|F_\lambda g\|^2<\infty$$

根据引理 10，存在 h，使得

$$h=(\text{强})\lim_{n\to\infty}2i\int_{\left|\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right|\leqslant n}\frac{1}{1-e^{i\theta}}dF_\lambda g$$

从而利用$(I-U)$是连续的以及 § 7 定理 2 的系 2 得到

$$\begin{aligned}(I-U)h&=(\text{强})2i\lim_{n\to\infty}\int(1-e^{i\theta})dF_\lambda\int_{\left|\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right|\leqslant n}\frac{1}{1-e^{i\theta}}dF_\lambda g\\&=(\text{强})\lim_{n\to\infty}2i\int_{\left|\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right|\leqslant n}dF_\lambda g=2ig\end{aligned}$$

即 $g\in\mathscr{R}(I-U)=\mathscr{D}(A)$. 根据 Cayley 变换（见 (9.12) 式）必有 $(I+U)h=2Ag$.

另一方面，我们可用谱积分直接计算$(I+U)h$：利用 $\lambda=i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$又得到

$$(I+U)h=(\text{强})\lim_{n\to\infty}2\int_{-n}^{+n}\lambda dF_\lambda g=2Bg$$

---

① 由于当$\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$时，$\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{3}$，即$\left|\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right|=\frac{1}{2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}<1$. 而当$\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\geqslant\frac{1}{2}$时，$\left|\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right|=\left|\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right|\left|\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}\right|\leqslant|\lambda|$. 所以$\left|\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right|\leqslant\max(1,|\lambda|)$.

因此 $Bg=\frac{1}{2}(I+U)h=Ag$, 所以 $B\subset A$. 再根据引理 5 即得 $A=B$. 证毕.

我们称由自共轭算子 A 决定的谱系 $\{F_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$ 所产生的谱测度 $(R^1, \boldsymbol{B}, F)$ 为由 A 决定的谱测度.

定理 6 设 A 是复 Hilbert 空间 H 中自共轭算子, 那末由 A 所决定的谱测度 $(E^1, \boldsymbol{B}, F)$ 集中在 $\sigma(A)$ 上, 即 $F(\sigma(A))=I$. 而且 F 不能集中在比 $\sigma(A)$ 更小的闭集上.

证 由引理 8, 映照 $l=L^{-1}: w\longmapsto\lambda=i\frac{1+w}{1-w}$ 把 $\sigma(U)-\{1\}$ 映照成 $\sigma(A)$, 又由于 l 把 $\hat{C}=\{w||w|=1, w\neq1\}$ 一对一地双方连续地映照成 E^1. 而且在此映照下 $F_{l(e^{it})}=E_t$. 由此容易看出, $\hat{C}$ 中的 Borel 集变成 R^1 上的 Borel 集, 反之亦然. 而且对 $\hat{C}$ 中任何 Borel 集 M,

$$F(l(M))=E(M)$$

由 $E_{2\pi-0}=I$, $E_0=0$, 所以 $E(\{1\})=0$, 因此

$$F(\sigma(A))=E(\sigma(U)-\{1\})=E(\sigma(U))$$

再根据 § 8 定理 2, $E(\sigma(U))=I$, 所以

$$F(\sigma(A))=I$$

如果 F 集中在闭集 σ_1 上, $\sigma_1\subset\sigma(A)$ 而且 $\sigma_1\neq\sigma(A)$, 那末必有 $\lambda_0\in\sigma(A)-\sigma_1$. 由于 σ_1 是闭集, 必有正数 ε 使得 $(\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon)$ 与 σ_1 不相交. 这样一来, 函数 $\frac{1}{\lambda_0-\lambda}$ 是 σ_1 中的有界连续函数. 作算子

$$A_1=\int_{\sigma_1}\frac{1}{\lambda_0-\lambda}dF_\lambda$$

易知 $\lambda_0 I-A=\int_{\sigma_1}(\lambda_0-\lambda)dF_\lambda$, 并且 $x\in\mathscr{D}(\lambda_0 I-A)$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\int_{\sigma_1\cap[-n,n]}(\lambda_0-\lambda)dF_\lambda x\right\|^2<\infty$$

利用这些事实容易证明对任何 x，$A_1x\in\mathscr{D}(\lambda_0I-A)$ 且

$$(\lambda_0I-A)A_1=\int_{\sigma_1}(\lambda_0-\lambda)dF_\lambda\int_{\sigma_1}\frac{1}{\lambda_0-\lambda}dF_\lambda=\int_{\sigma_1}dF_\lambda=I$$

类似地可以证明当 $x\in\mathscr{D}(A)$ 时

$$A_1(\lambda_0I-A)x=x$$

因此 λ_0I-A 是 $\mathscr{D}(A)$ 到 H 上的一一对应，且 $(\lambda_0I-A)^{-1}=A_1$ 是有界算子，这就是说 $\lambda_0\in\rho(A)$，这就得到了矛盾，因此 F 不可能集中在比 $\sigma(A)$ 更小的闭集上．证毕．

系 1　设 A 是复 Hilbert 空间 H 中有界的自共轭算子，那末

$$\sup_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda=\sup_{\|x\|=1}(Ax,x)$$
$$\inf_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda=\inf_{\|x\|=1}(Ax,x)\tag{9.17}$$

证　我们只证(9.17)中的第一式．记 $M=\sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)}\lambda$．由于

$$A=\int_{\sigma(A)}\lambda dF_\lambda$$

所以当 $\|x\|=1$ 时，

$$(Ax,x)=\int_{\sigma(A)}\lambda d(F_\lambda x,x)\leqslant M\int_{\sigma(A)}d(F_\lambda x,x)=M\|x\|^2=M$$

因此 $\sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)\leqslant M$．

另一方面，由于 $\sigma(A)$ 是闭集，所以 $M\in\sigma(A)$，对于任何正数 ε，必然有 $F((M-\varepsilon,M])\neq0$ 否则 F 将集中在 $\sigma_1=\sigma(A)\cap(-\infty,M-\varepsilon]$ 上，与上面所证明的结论相矛盾．任取 $\|x\|=1$，$x\in F((M-\varepsilon,M])H$，那末，由于 $x\perp F_{M-\varepsilon}$，因此当 $\lambda\leqslant M-\varepsilon$ 时，$F_\lambda x=0$，所以

$$(Ax,x)=\int\lambda d(F_\lambda x,x)=\int_{(M-\varepsilon,M]}\lambda d(F_\lambda x,x)\geqslant M-\varepsilon$$

因此，又得到 $\sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)\geqslant M-\varepsilon$，由 ε 的任意性即知

$$\sup_{\|x\|=1}(Ax, x)\geqslant M$$

这样就证明了(9.17)第一式. 同理可证(9.17)的第二式. 证毕.

系 2 设 A 是复 Hilbert 空间 H 中任一有界自共轭算子. $(\sigma(A), \boldsymbol{B}_{\sigma(A)}, F)$ 是 A 所决定的谱测度空间. 设 B 是任一与 A 可交换的有界线性算子, 那末对任何 $M\in\boldsymbol{B}_{\sigma(A)}$, B 与 $F(M)$ 可交换.

证 这时, B 与 A 的 Cayley 变换 U 可交换. 因此由 § 8 定理 2, B 与 U 所决定的谱测度的投影算子 $E(M)$, $M\in\boldsymbol{B}_{\sigma(U)}$, 可交换, 因此通过线性变换 l 可知 B 与 $F(l(M))$ 可交换. 证毕.

系 3 设 A 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子, F 是 A 所决定的谱测度. 令 $\mathscr{B}(\sigma(A))$ 为 $\sigma(A)$ 上的有界 Baire 函数全体, 对每个 $f\in\mathscr{B}(\sigma(A))$, 作有界线性算子

$$f(A)=\int_{\sigma(A)}f(\lambda)dF(\lambda)$$

那末映照 $f\longmapsto f(A)$ 有如下的性质:

(i) Hermite 性: $\bar{f}(A)=(f(A))^*$. 特别, 当 f 是实函数时, $f(A)$ 是自共轭的;

(ii) 线性: 设 α, β 是数, f、$g\in\mathscr{B}(\sigma(A))$, 那末

$$(\alpha f+\beta g)(A)=\alpha f(A)+\beta g(A)$$

(iii) 可乘性: 设 f、$g\in\mathscr{B}(\sigma(A))$, 那末 $(fg)(A)=f(A)g(A)$.

这个系可以由 § 7 定理 2 直接推出. 证毕.

系 3 中的映照 $f\longmapsto f(A)$ 即为自共轭算子 A 的算子演算. 显然, 还有如下范数估计:

系 4 $f\in\mathscr{B}(\sigma(A))$, F 为由 A 决定的谱测度, 那末

$$\|f(A)\|\leqslant\sup_{t\in\sigma(A)}|f(t)|$$

系 5 A 是复 Hilbert 空间 H 上有界自共轭算子, 如果 $A\geqslant 0$, 那末必存在唯一的有界线性算子 A_1: $A_1\geqslant 0$, 且 $A_1^2=A$(常记 A_1

$=A^{\frac{1}{2}})$.

证　$A\geqslant 0$ 等价于对一切 $x\in H$, $(Ax, x)\geqslant(0x, x)=0$.

由系 1, 这等价于 $\sigma(A)\subset[0, \infty)$. 令

$$A=\int_{\sigma(A)}\lambda dF_\lambda$$

是 A 的谱分解, 取 $A_1=\int_{\sigma(A)}\sqrt{\lambda}dF_\lambda$, 易知 $A_1\geqslant 0$, 并且 $A_1^2=A$.

再证唯一性: 如果又有 $A'\geqslant 0, A'^2=A$. 那末对任何 $x\in H$, 记 $y=(A_1-A')x$. 因为 $A'^2=A$, 所以 A' 与 A'^2(即 A)可交换, 从而 A' 与 F_λ 可交换, 因此 A' 与 A_1 也可交换. 由于

$$(A_1+A')y=(A_1+A')(A_1-A')x=(A_1^2-A'^2)x=0$$

因此 $A_1y=-A'y$. 由 $A_1\geqslant 0$, $A'\geqslant 0$ 立即得到 $(A_1y, y)=-(A'y, y)=0$. 据此, 再由 A_1、A' 的谱分解可知 $y\in\mathscr{N}(A_1)\cap\mathscr{N}(A')$. 从而 $(A_1-A')(A_1-A')x=0$, 即

$$0=((A_1-A')(A_1-A')x, x)=\|(A_1-A')x\|^2.$$ 证毕.

7. 函数模型　下面我们考察自共轭算子的函数模型. 先引入如下的概念.

定义　设 X 是赋范线性空间, A 是 $\mathscr{D}(A)\subset X$ 到 X 中的线性算子. 如果在 $\mathscr{D}(A)$ 中有向量 $x_0\in\mathscr{D}(A)$, 使得 $\{A^nx_0|n=0,1,2,\cdots\}$ 张成的闭线性子空间就是 X, 那末称 x_0 是 A 的**生成元或循环元**.

我们先考察有生成元的有界自共轭算子.

引理 11　设 A 是复 Hilbert 空中有界自共轭算子, 它有生成元 x_0, 那末必有可测空间 $(\sigma(A), \boldsymbol{B}_{\sigma(A)})$ 上全有限测度 μ, 又有 H 到 $L^2(\sigma(A), \boldsymbol{B}_{\sigma(A)}, \mu)$ 的酉算子 U, 使得 $\hat{A}=UAU^{-1}$ 是 $L^2(\sigma(A), \boldsymbol{B}_{\sigma(A)}, \mu)$ 中如下的乘法算子:

$$(\hat{A}f)(t)\underset{\mu}{=}tf(t), f\in L^2(\sigma(A), \boldsymbol{B}_{\sigma(A)}, \mu) \tag{9.18}$$

而且 $Ux_0=1$.

证 令 $E(\cdot)$是算子 A 所决定的谱测度. 它集中在 $\sigma(A)$ 上. 作 $\mathbf{B}_{\sigma(A)}$上的集函数 μ 如下: 当 $M\in\mathbf{B}_{\sigma(A)}$时,

$$\mu(M)=(E(M)x_0, x_0)$$

显然 μ 是全有限的测度. L 表示 H 的线性子空间 $\{p(A)x_0 | p$ 是多项式$\}$. 又作 L 到 $L^2(\sigma(A), \mathbf{B}_{\sigma(A)}, \mu)$中的算子 U 如下: $Up(A)x_0=p(\cdot)$. 由于

$$(p(A)x_0, p(A)x_0)=(\bar{p}(A)p(A)x_0, x_0)=\int|p(t)|^2d\mu(t)$$

$$=(Up(A)x_0, Up(A)x_0)$$

所以 U 是 L 到 $L^2(\sigma(A), \mathbf{B}_{\sigma(A)}, \mu)$ 中的保范算子, 这也顺便证明了算子U的定义的确定性, 就是说如果又有多项式 q 使 $q(A)x_0=p(A)x_0$, 那末容易算出

$$\|p(\cdot)-q(\cdot)\|=\|p(A)x_0-q(A)x_0\|=0$$

因此多项式 q 和 p 关于测度 μ 几乎处处相等, 它们可以看成 $L^2(\sigma(A), \mathbf{B}_{\sigma(A)}, \mu)$中同一向量. 由于 x_0 是生成元, L 在H中稠密. 根据第 5 章 § 2 定理 1, U 可以唯一地延拓到 H 上成为 H 到 $L^2(\sigma(A), \mathbf{B}_{\sigma(A)}, \mu)$ 中的保范算子. 由 U 的保范性和H是完备的可知, UH 是 $L^2(\sigma(A), \mathbf{B}_{\sigma(A)}, \mu)$中的完备子空间, 也就是闭子空间. 但是 UH 至少包含 $L^2(\sigma(A), \mathbf{B}_{\sigma(A)}, \mu)$中的多项式全体. 由第四章 § 6 定理 5 的系可证 UH 在 $L^2(\sigma(A), \mathbf{B}_{\sigma(A)}, \mu)$中是稠密的. 因此 $UH=L^2(\sigma(A), \mathbf{B}_{\sigma(A)}, \mu)$, U 是酉算子.

显然 $Ux_0=1$. 又因为 $Up(A)x_0=p(t)$, $UAp(A)x_0=tp(t)$, 所以对任何多项式 f, (9.18)成立. 由于 A 是有界线性算子. 而且多项式全体在 $L^2(\sigma(A), \mathbf{B}_{\sigma(A)}, \mu)$中稠密, 不难证明对一切 $f\in L^2(\sigma(A), \mathbf{B}_{\sigma(A)}, \mu)$, (9.18)成立. 证毕.

引理 11 说明对于复 Hilbert 空间 H 上任何具有生成元(循环元)的有界自共轭算子 A, 除了一个酉等价外, 它是全有限测度空

间$(\sigma(A), \boldsymbol{B}_{\sigma(A)}, \mu)$的$L^2(\sigma(A), \boldsymbol{B}_{\sigma(A)}, \mu)$中乘自变量算子. 对于不具生成元的情况也有类似推广.

引理 12 设H是可析复 Hilbert 空间, A是H中有界自共轭算子. 那末必有A的有限个或可列个互相直交的约化子空间H_n, 使得$H=\bigoplus\limits_n H_n$, 而且A在每个H_n上有生成元.

证 由于H是可析的, 必有一列向量$\{x_n \mid n=1, 2, 3, \cdots\}$在$H$中稠密. 我们用归纳的方法作$\{H_n\}$如下: 首先在$\{x_n\}$中取不为零的向量$x_{n_1}$, 我们作$H_1$为$\{A^m x_{n_1} \mid m=0, 1, 2, \cdots\}$所张成的闭线性子空间. 容易看出$H_1$是$A$的不变子空间(参看第五章§5), 根据§5定理9的系2, 自共轭算子的一切不变子空间都是约化的, 所以H_1是A的约化子空间. A在H_1上的限制$A|_{H_1}$以x_{n_1}为生成元. 如果$H=H_1$, 引理已证好了, 如果$H\neq H_1$, 记x_{n_1}为x'_{n_1}, 并用下面的方法继续作下去. 假定对自然数m已作好H_1、H_2、$\cdots$、H_m, 它们是A的相互直交的约化子空间, 分别以x'_{n_1}, x'_{n_2}, $\cdots$, x'_{n_m}为生成元$(n_1<n_2<n_3<\cdots<n_m)$, 而且对于一切$n\leqslant n_m$, x_n都属于$M_m=\bigoplus\limits_{k=1}^{m} H_k$. 如果$M_m=H$, 那末就作到$H_m$为止, 如果$M_m\neq H$, 我们就在$\{x_{n_m+1}, x_{n_m+2}, \cdots\}$中挑选首先一个不在$M_m$中的向量, 设为$x_{n_{m+1}}$, 这时, 当$n<n_{m+1}$时, $x_n\in M_m$, 记$x_{n_{m+1}}$在M_m上的投影为$x''_{n_{m+1}}$. 又记$x'_{n_{m+1}}=x_{n_{m+1}}-x''_{n_{m+1}}$, 那末$x'_{n_{m+1}}\perp M_m$而且由于$x_{n_{m+1}}\overline{\in} M_m$, $x'_{n_{m+1}}\neq 0$, 作H_{m+1}为由$\{A^n x'_{n_{m+1}} \mid n=0, 1, 2, \cdots\}$所张成的闭线性子空间. 易知这样作出的$H_{m+1}$是$A$的约化子空间, 且$A$在$H_{m+1}$上的限制以$x'_{n_{m+1}}$为生成元. 因为$M_m^\perp$是$A$的不变子空间, $x'_{n_{m+1}}\in M_m^\perp$, 所以$H_{m+1}\subset M_m^\perp$, 即$H_{m+1}$与$H_1$、$H_2$、$\cdots$、$H_m$是直交的. 同时由于$x_{n_{m+1}}=x'_{n_{m+1}}+x''_{n_{m+1}}\in\bigoplus\limits_{k=1}^{m+1} H_k$, 由上所述, 我们可以依次作出$H_1$、$H_2$、$\cdots$, 它们的个数或者是有限个(这时, H就

是这有限个闭线性子空间的直交和），或者可以作出一列$\{H_m\}$，每个H_m都是A的约化子空间，它们是两两直交的，而且都有生成元．在有限个H_m的情况下，$H=\underset{m}{\oplus}H_m$成立，引理已证完，在一列的情况下，对任何自然数$m$，当$n\leqslant n_m$时，$x_n\in\bigoplus_{k=1}^{m}H_k$，因此一切$x_n$都属于$\bigoplus_{k=1}^{\infty}H_k$，由于$\{x_n\}$在$H$中稠密，而$\bigoplus_{k=1}^{\infty}H_k$是闭线性子空间，所以$H=\bigoplus_{k=1}^{\infty}H_k$．证毕．

下面我们建立有界自共轭算子的函数模型．

设Λ是一个指标集，它或是有限集$\{1,2,\cdots,m\}$，或是自然数全体①．对每个$n\in\Lambda$，$(X_n,\boldsymbol{B}_n,\mu_n)$是测度空间．这样，就有Hilbert空间$L^2(X_n,\boldsymbol{B}_n,\mu_n)$．对于每个$n\in\Lambda$，取$f_n\in L^2(X_n,\boldsymbol{B}_n,\mu_n)$，使得$\sum\limits_{n\in\Lambda}\|f_n\|^2<\infty$．这样的函数组记为$f$：

$$f=\{f_1,f_2,\cdots\}$$

所有这样的f全体记为$\underset{n\in\Lambda}{\oplus}L^2(X_n,\boldsymbol{B}_n,\mu_n)$．在其中规定线性运算及内积如下：

$$\alpha\{f_1,f_2,\cdots\}+\beta\{g_1,g_2,\cdots\}=\{\alpha f_1+\beta g_1,\alpha f_2+\beta g_2,\cdots\}$$

$$(\{f_1,f_2,\cdots\},\{g_1,g_2,\cdots\})=\sum_{n\in\Lambda}(f_n,g_n)$$

$$=\sum_{n\in\Lambda}\int_{X_n}f_n(x)\overline{g_n(x)}d\mu_n(x)$$

这时$\underset{n\in\Lambda}{\oplus}L^2(X_n,\boldsymbol{B}_n,\mu_n)$称为空间族$L^2(X_n,\boldsymbol{B}_n,\mu_n)(n\in\Lambda)$的直交和，它是一个Hilbert空间．

① 参见下面定理7后的一段说明．

定理 7　设 H 是可析的复 Hilbert 空间，A 是 H 中的有界自共轭算子，那末必有有限个或可列个测度空间$(X_n, \boldsymbol{B}_{X_n}, \mu_n)$，其中每个 X_n 是 $\sigma(A)$ 中的闭集，$\boldsymbol{B}_{X_n}$ 是 X_n 中的 Borel 集全体，并有 H 到直交和$\bigoplus\limits_n L^2(X_n, \boldsymbol{B}_{X_n}, \mu_n)$上的酉算子$U$，使得$\hat{A}=UAU^{-1}$是$\bigoplus\limits_n L^2(X_n, \boldsymbol{B}_{X_n}, \mu_n)$中如下的乘法算子：对于任何 $f=\{f_1, f_2, \cdots\}\in\bigoplus\limits_n L^2(X_n, \boldsymbol{B}_{X_n}, \mu_n)$

$$\hat{A}f=\hat{A}\{f_1, f_2, \cdots\}=\{tf_1(t), tf_2(t), \cdots\}$$

(此定理中的 Hilbert 空间$\bigoplus\limits_n L^2(X_n, \boldsymbol{B}_{X_n}, \mu_n)$以及乘法算子 $\hat{A}$ 称为 Hilbert 空间H及自共轭算子 A 的**函数模型**)

证　由引理 12，存在 A 的有限个或可列个互相直交的约化子空间 H_n 使 $\bigoplus\limits_n H_n=H$，而且 A 在 H_n 上的限制 $A_n=A|_{H_n}$ 有生成元. 根据引理 11，对每个 H_n，有$(\sigma(A_n), \boldsymbol{B}_{\sigma(A_n)})$上的测度 μ_n 以及 H_n到 $L^2(\sigma(A_n), \boldsymbol{B}_{\sigma(A_n)}, \mu_n)$上的酉算子 U_n，使得 $\hat{A}_n=U_nA_nU_n^{-1}$ 形如

$$(\hat{A}_nf)(t)=tf(t)\quad (f\in L^2(\sigma(A_n), \boldsymbol{B}_{\sigma(A_n)}, \mu_n))$$

由于 H_n 是 A 的约化子空间，当 $\lambda\in\rho(A)$时，容易证明(可参见 §5 习题 11)　$(\lambda I-A)^{-1}$在 H_n 上的限制即为 $(\lambda I_{H_n}-A_n)^{-1}$，因此 $\rho(A)\subset\rho(A_n)$，这就推出 $\sigma(A_n)\subset\sigma(A)$，就取 $X_n=\sigma(A_n)$.

现在作H到 $\bigoplus\limits_n L^2(X_n, \boldsymbol{B}_{X_n}, \mu_n)$ 上的酉算子如下：当 $x\in H$，$x=\sum\limits_n x_n$时规定

$$Ux=\{U_1x_1, U_2x_2, \cdots\}$$

容易验证这个U 就满足定理中的要求．证毕.

完全同样地，对于酉算子及对于 §10 中的更一般的正常算子都可以给出函数模型，这些我们就不详述了．此外，这里空间的可析性和算子的有界性的限制都可以除去．在空间不可析的时候，

全空间H可以分成不可列个两两直交的约化子空间的直交和，而函数模型中的空间是$\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}L^2(X_\alpha, \mathbf{B}_{X_\alpha}, \mu_\alpha)$，只是指标集$\Lambda$是一个不可列集，$\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}L^2(X_\alpha, \mathbf{B}_{X_\alpha}, \mu_\alpha)$中的向量$f$的形状是$\{f_\alpha\}(\alpha\in\Lambda)$，即

$$\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}L^2(X_\alpha, \mathbf{B}_{X_\alpha}, \mu_\alpha)=\{f\,|\,f=\{f_\alpha, \alpha\in\Lambda\}, f_\alpha\in L^2(X_\alpha, \mathbf{B}_{X_\alpha}, \mu_\alpha),$$

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}\|f_\alpha\|^2<\infty\}$$

有了算子的函数模型，可以更深入地研究算子的性质，也便于在其它数学分支以及物理学中应用.

8. 全连续自共轭算子 下面我们利用谱分解再来研究 Hilbert 空间上全连续自共轭算子的结构.

定理 8 设H是复 Hilbert 空间，A是H中自共轭的全连续算子，$\{\lambda_n|n=1, 2, \cdots\}$是$A$的非零特征值全体，$P_n$是$H$到相应于特征值$\lambda_n$的特征子空间（只有有限维）的投影算子. $P_0=I-\sum_n P_n$，那末P_0H必是相应于特征值为零的特征子空间，这时A的一切非零谱点都是实的特征值，而且

$$A=\sum_n\lambda_nP_n \tag{9.19}$$

令$\{e_k^{(n)}|k=1, 2, \cdots, m_n\}$是$P_nH(n\geqslant1)$中的完备就范直交系. 那末

$$Ax=\sum_{n,k}\lambda_n(x, e_k^{(n)})e_k^{(n)} \tag{9.20}$$

证 设$F(\cdot)$是算子A的谱测度，它集中在$\sigma(A)(\subset E^1)$上. 由于A是全连续的，由第五章§6定理5（也可利用谱分解和全连续算子定义直接证明），$\sigma(A)-\{0\}$中的数全是A的特征值，而且它们最多是可列个，只能以0为极限点. 记它们是$\{\lambda_n\}$. 又记$P_n=F(\{\lambda_n\})$. 这时$P_0=I-\sum_n P_n=F(\sigma(A))-\sum_n F(\{\lambda_n\})=$

$F(\sigma(A))-F\left(\bigcup_{n}\{\lambda_n\}\right)=F(\{0\})$.

$$AP_n=\int\lambda dF(\lambda)P_n=\lambda_n P_n$$

$$AP_0=\int\lambda dF(\lambda)P_0=0$$

由此易知 P_nH 是相应于特征值 $\lambda_n(\lambda_0=0)$ 的特征子空间. 再由 $A=\int\lambda dF(\lambda)$ 和 F 的可列可加性得到(9.19). 由 (9.19) 立即可知(9.20)是显然的. 证毕.

例 8 设 R 是正方形 $[a,b]\times[a,b]$, $K(\cdot,\cdot)\in L^2(R)$, 而且 $K(s,t)=\overline{K(t,s)}$, 作 $L^2[a,b]$ 中的线性有界算子 K 如下:

$$(Kf)(s)=\int_a^b K(s,t)f(t)dt$$

容易验证这是 $L^2(R)$ 中的有界自共轭算子. 又由第五章 §6 可知 K 是全连续的. 设 $\{\lambda_n\}$ 是 K 的特征值全体, $\lambda_0=0$. 我们取 λ_n 的特征子空间中的完备就范直交系 $\{e_k^{(n)}(\cdot)\mid n=0,1,2,\cdots,\ k=1,2,\cdots,m_n$ (m_n 可能是无限的)$\}$, 那末

$$Kf=\sum_n\lambda_n\sum_{k=1}^{m_n}(f,e_k^{(n)})e_k^n$$

习 题

1. 设 A 是复 Hilbert 空间 H 到 Hilbert 空间 G 的有界线性算子. 证明

(i) A^*A、AA^* 分别是 H、G 上的自共轭算子, 而且 $A^*A\geqslant0$, $AA^*\geqslant0$;

(ii) 必有 $\overline{\mathscr{R}(A^*)}$ 到 $\overline{\mathscr{R}(A)}$ 上的酉算子 U, 使得 $A=U(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ (称为算子 A 的极坐标分解, 简称为极分解).

2. 设 A 是复 Hilbert 空间 H 的子集 $\mathscr{D}(A)$ 到 H 中的自共轭算子, $\{E_\lambda\mid-\infty<\lambda<\infty\}$ 是 A 的谱系, 证明 $\overline{\mathscr{R}(A)}=[(I-E_0)+E_{0-}]H$, $\mathscr{N}(A)=(E_0-E_{0-})H$, 此地 $E_{0-}=\lim\limits_{\substack{\lambda<0\\ \lambda\to0}}E_\lambda$.

3. 设 A 是复 Hilbert 空间 H 的线性子空间 $\mathscr{D}(A)$ 到 H 中的自共轭算子，设 B 是 H 中任何一个与 A 可交换的有界线性算子（即在 $\mathscr{D}(A)$ 上 $AB=BA$），设 $\{E_\lambda \mid \lambda\in(-\infty, \infty)\}$ 是 A 的谱系，证明 $BE_\lambda=E_\lambda B$.（提示：证明 B 与 A 的 Cayley 变换 U 可交换）.

4. 设 A 是复 Hilbert 空间 H 中的有界自共轭算子，E 是 A 的谱测度. $f(\lambda)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\lambda^n$ 是 $|\lambda|<r(A)+\varepsilon$（$r(A)$ 是 A 的谱半径）上的解析函数. 证明

$$f(A)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nA^n=\int_{\sigma(A)}f(\lambda)dE_\lambda$$

5. 把定理 7 推广到空间 H 不一定可析，以及一般自共轭算子（不一定有界）的情况.

6. 求出复 Hilbert 空间 H 上全连续自共轭算子 A 的豫解式 $R(A, \lambda)$，以及对每个 $x\in H$，$R(A, \lambda)x$ 的表达式.

7. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上有界线性算子. 证明

(i) 对任何多项式 $p(t)$，$Tp(I-T^*T)=p(I-TT^*)T$;

(ii) 对任何实直线 E^1 上有界 Borel 可测函数 $f(t)$，

$$Tf(I-T^*T)=f(I-TT^*)T;$$

(iii) 对任何实直线 E^1 上 Borel 可测函数 $f(t)$，

$$Tf(I-T^*T)=f(I-TT^*)T;$$

(iv) E^+、E^-（E'^+、E'^-）分别是 $I-TT^*$（$I-T^*T$）所有正、负谱部分的投影. 那末，对任何 $x\in E'^+$，必有 $Tx\in E^+$.

8. 设 A、B 是复 Hilbert 空间上两个可交换的有界自共轭算子，且 $A\geqslant 0$，$B\geqslant 0$. 证明 $AB\geqslant 0$. 举例说明可交换这个条件不能少.

9. 复 Hilbert 空间上有界线性算子 A 是全连续的充要条件是下面二者之一.

(i) $\{x_n\}$ 弱收敛于零必可推出 $\{Tx_n\}$ 强收敛于零.

(ii) $\{x_n\}$ 弱收敛于零必可推出 $(Tx_n, x_n)\to 0$.

10. 设 A、B 是复 Hilbert 空间中有界线性算子，且 $0\leqslant A\leqslant B$. 证明对一切 $\alpha\in[0, 1]$，$A^\alpha\leqslant B^\alpha$.（利用第五章 §5 习题 7 的（i）证明 $A^\alpha\leqslant B^\alpha$ 的 α 全体是 $[0, 1]$ 中闭凸集，并不妨在假设 $0<\varepsilon I\leqslant A\leqslant B$ 情况下证明，然后令 $\varepsilon\to 0$.）

11. 设 A 是复 Hilbert 空间 H 上对称算子，记 $H^{\pm}=H\ominus\mathscr{R}(A\pm iI)$. 证明 $\mathscr{D}(A^{*})=\mathscr{D}(A)\dot{+}H^{-}\dot{+}H^{+}$.

12. 证明下面三件事是等价的.

(i) T 是复 Hilbert 空间 H 到复 Hilbert 空间 G 的 H. S. 算子(见 §4 习题)；

(ii) $(T^{*}T)^{\frac{1}{2}}$ 是 $H\to H$ 的 H. S. 算子；

(iii) 存在正数列 $\{\lambda_n\}$(可能只有有限个), $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2<\infty$ 以及 H、G 中的就范直交系 $\{x_n\}\subset H$, $\{y_n\}\subset G$, 使得一切 $x\in H$

$$Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,x_n)y_n.$$

13. 设 A 是复 Hilbert 空间 H 上有界自共轭算子，如果存在常数 $M>0$, 使得对于 H 中任意有限个 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 适合

$$(x_i,x_j)=\delta_{ij};\ k\neq l\ 时,\ (Ax_k,x_l)=0$$

总有

$$\sum_{k=1}^{n}(Ax_k,x_k)^2\leqslant M$$

那末 A 必是 H 上 H. S. 算子.

14. 证明下面几件事是等价的.

(i) T 是复 Hilbert 空间 H 到复 Hilbert 空间 G 上的核算子(见 §4 习题)；

(ii) 存在正数列 $\{\lambda_n\}$, (可能只有有限个), $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n<\infty$ 以及 H、G 中就范直交系 $\{x_n\}\subset H$, $\{y_n\}\subset G$, 使得对一切 $x\in H$

$$Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,x_n)y_n$$

(iii) $T=T_1T_2$, T_1、T_2 分别是 $H\to G$ 和 $H\to H$ 的 H. S. 算子.

(iv) $T=T_1T_2$, T_1、T_2 分别是 $G\to G$ 和 $H\to G$ 的 H. S. 算子.

15. 设 T 是 $H\to G$ 的 H. S. 算子(或 $H\to G$ 的核算子), $\{\lambda_n\}$ 是 $(T^{*}T)^{\frac{1}{2}}$ 的特征值. 证明

$$\|T\|_{\text{H.S.}}=(\sum_{n}\lambda_n^2)^{\frac{1}{2}}\left(\text{或}\|T\|_t=\sup_{\{x_n\},\{y_n\}}\sum_{n}|(Tx_n,y_n)|=\sum\lambda_n\right)$$

(这里$\|\cdot\|_{\text{H.S.}}$、$\|\cdot\|_t$参见§4习题14,15)

16. 设A是复Hilbert空间H上有界自共轭算子,如果存在常数$M>0$,使对H中任何有限个$x_i(i=1,2,\cdots n)$适合

$$(x_i,x_j)=\delta_{ij},\ k\neq l\ \text{时},\ (Ax_k,x_l)=0$$

总有

$$\sum_{k=1}^{n}|(Ax_k,x_k)|\leqslant M$$

那末A是$H\to H$的核算子.

§ 10 正常算子的谱分解

在本节中将讨论比酉算子、自共轭算子更为广泛的一类算子的谱分解.和前几节一样,我们将在复Hilbert空间上讨论.

1. 正常算子 在有限维(复)内积空间中,除去酉阵、自共轭阵外,还有正常阵(自共轭、酉阵是它的特例)也是可以对角化的.现在就是要把正常阵的概念推广到无限维Hilbert空间中去.

定义 设N是复Hilbert空间H上的有界线性算子.如果N与它的共轭算子N^*可交换:$NN^*=N^*N$,那末称N是H上的**正常算子,或正规算子**.

下面先举一个正常算子的典型例子.

例1 设Ω是复平面上的一个有界闭集,$\mathbf{B}_\Omega$是Ω中的Borel集全体,μ是$(\Omega,\mathbf{B}_\Omega)$上一个全有限测度.作$L^2(\Omega,\mathbf{B}_\Omega,\mu)$上乘法算子:

$$N:\ f(z)\longmapsto zf(z),\ f(z)\in L^2(\Omega,\mathbf{B}_\Omega,\mu)$$

显然,N是$L^2(\Omega,\mathbf{B}_\Omega,\mu)$上有界线性算子.容易验证,$N^*$也是$L^2(\Omega,\mathbf{B}_\Omega,\mu)$上的乘法算子,并且

$$N^*:\ f(z)\longmapsto \bar{z}f(z),\ f(z)\in L^2(\Omega,\mathbf{B}_\Omega,\mu)$$

因此，当 $f\in L^2(\Omega, \boldsymbol{B}_\Omega, \mu)$时，

$$(NN^*f)(z)=|z|^2f(z)=(N^*Nf)(z)$$

即 $NN^*=N^*N$，所以N是正常算子.

容易验证：当测度 μ 不能集中在比 Ω 更小的闭集上时，$\sigma(N)=\Omega$. 还易于验证：当 μ 不集中在实轴上时，N 不是自共轭算子；当 μ 不集中在单位圆周上时，N 不是酉算子.

类似于复数的直角坐标分解，对于H上有界线性算子 A，也可作出如下分解

$$A_R=\frac{1}{2}(A+A^*),\quad A_I=\frac{1}{2i}(A-A^*)$$

显然，它们都是(有界)自共轭算子，分别称 A_R、A_I 为 A 的**实部**、**虚部**.

引理 1　设N是复 Hilbert 空间H上有界线性算子，那末下列命题等价.

(i) N 是正常算子；

(ii) N^*是正常算子；

(iii) N 的实部与虚部可交换.

由正常算子的定义立即可以得到引理 1 的结论.

定义　设 $(X_j, \boldsymbol{R}_j, E_j)$ $(j=1, 2)$是 Hilbert 空间H上的两个谱测度空间，如果对一切 $M_j\in\boldsymbol{R}_j(j=1, 2)$，$E_1(M_1)$与 $E_2(M_2)$可交换，那末称谱测度 E_1 与 E_2 **可交换**.

引理 2　复 Hilbert 空间上的正常算子的实部、虚部分别决定的两个谱测度是可交换的.

证　设正常算子N的实部、虚部分别是 N_1、N_2，它们分别决定的谱测度空间是$(X_j, \boldsymbol{R}_j, E_j)j=1, 2$. 由引理 1，$N_1$ 与 N_2 可以交换. 又由 §9 定理 6 的系 2，N_2 与一切 $E_1(M_1)$ $(M_1\in\boldsymbol{R}_1)$可交换. 再利用 §9 定理 6 的系 2，就得到 $E_1(M_1)$与一切 $E_2(M_2)$ $(M_2\in\boldsymbol{R}_2)$

可交换. 证毕.

例 2　考察例 1 中的正常算子 N. 令 x_1、x_2 分别表示复数 z 的实部和虚部, N_1、N_2 分别表示算子 N 的实部和虚部. 显然, 当 $f\in L^2(\Omega, \boldsymbol{B}_\Omega, \mu)$ 时,

$$(N_j f)(z)=x_j f(z), j=1, 2,$$

我们取 X_1、X_2 都是实数直线, $\boldsymbol{R}_j(j=1, 2)$ 都是直线上的 Borel 集类. 在可测空间 $(X_j, \boldsymbol{R}_j)$ 上给谱测度 E_j 如下: 对任何 $M\in\boldsymbol{R}_j$, $E_j(M)$ 是 $L^2(\Omega, \boldsymbol{B}_\Omega, \mu)$ 上的如下投影算子: 当 $f\in L^2(\Omega, \boldsymbol{B}_\Omega, \mu)$ 时,

$$(E_j(M)f)(z)=\chi_M(x_j)f(z), \quad z\in\Omega$$

其中 χ_M 是直线上子集 M 的特征函数. 容易看出 $(X_j, \boldsymbol{R}_j, E_j)$ 是自共轭算子 N_j 所决定的谱测度空间, 并且还可直接验证两个谱测度是可交换的.

今作可测空间 $(X_1\times X_2, \boldsymbol{B}_{X_1\times X_2})$① 上谱测度如下: 当 $M\in\boldsymbol{B}_{X_1\times X_2}$ 时, 取

$$E(M): f(z)\longmapsto \chi_M(z)f(z), f\in L^2(\Omega, \boldsymbol{B}_\Omega, \mu)$$

此地 χ_M 是定义在 $X_1\times X_2$ 的子集 M 上的特征函数. 容易从谱积分的定义直接验证谱测度 E 集中在 $(\Omega, \boldsymbol{B}_\Omega)$ 上, 而且

$$N=\int_\Omega z dE(z)$$

此外, 还容易看出, 谱测度 E_1、E_2 与 E 之间有如下关系:

$$E(M_1\times M_2)=E_1(M_1)E_2(M_2), M_j\in\boldsymbol{R}_j, j=1, 2$$

这说明谱测度 E 是 E_1、E_2 的"乘积"测度.

2. 乘积谱测度　为了讨论正常算子的谱分解, 受例 2 的启发, 自然需要引入下面的概念.

定义　设 $(X_j, \boldsymbol{R}_j, E_j)(j=1, 2)$ 是谱测度空间. 又设 E 是

① 这里 $\boldsymbol{B}_{X_1\times X_2}=\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2$, 即 $\boldsymbol{B}_{X_1\times X_2}$ 是平面上 Borel 集类.

$(X_1\times X_2, \boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2)$上的谱测度. 如果对任何 $M_j\in\boldsymbol{R}_j$,

$$E(M_1\times M_2)=E_1(M_1)E_2(M_2) \tag{10.1}$$

那末称E是E_1、E_2的乘积(谱)测度, 有时记E为$E_1\times E_2$, 而且称$(X_1\times X_2, \boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2, E_1\times E_2)$为$(X_1, \boldsymbol{R}_1, E_1)$与$(X_2, \boldsymbol{R}_2, E_2)$的**乘积(谱)测度空间**.

定理 1 设$(X_1, \boldsymbol{R}_1)$、$(X_2, \boldsymbol{R}_2)$是直线上两个 Borel 可测空间, $E_j(j=1, 2)$是$(X_j, \boldsymbol{R}_j)$上的谱测度. 那末在$(X_1\times X_2, \boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2)$①上存在$E_1$与$E_2$的乘积谱测度$E_1\times E_2$的充要条件是$E_1$与$E_2$可交换.

证 必要性: 设E是E_1与E_2的乘积测度, 那末当$M_j\in\boldsymbol{R}_j$时, 由(10.1)式知$E_1(M_1)E_2(M_2)$是投影算子. 根据§5定理6, $E_1(M_1)$与$E_2(M_2)$是可交换的.

充分性: 设E_1与E_2可交换, 现在要直接构造出它们的乘积测度E, 为此分以下几步来做(和第三章构造数值测度的乘积测度的方法相似).

(1) 令$\mathscr{P}$表示H上投影算子全体, $\boldsymbol{P}=\{M_1\times M_2\mid M_j\in\boldsymbol{R}_j, j=1, 2\}$ (即$\boldsymbol{P}$是$X_1\times X_2$中可测矩形全体). 作$\boldsymbol{P}\longrightarrow\mathscr{P}$的映照$E$: 对任何$M_1\times M_2\in\boldsymbol{P}$, 规定$E(M_1\times M_2)=E_1(M_1)E_2(M_2)$.

(2) 作集类

$$\widehat{\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2}=\left\{\bigcup_{j=1}^{n}M_j \mid n\text{ 为有限数而且 }M_j\in\boldsymbol{P},\ M_1、\cdots、M_n\text{两两不交}\right\}$$

正如第三章§5所证明的, 这是个代数, 我们把E从$\boldsymbol{P}$延拓到$\widehat{\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2}$上: 当$M=\bigcup\limits_{j=1}^{n}M_j$, $M_j\in\boldsymbol{P}$而且$M_j(j=1, 2, \cdots, n)$彼此

① $\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2$是由$X_1\times X_2$中的集类$\{M_1\times M_2\mid M_j\in\boldsymbol{R}_j, j=1, 2\}$张成的$\sigma$-代数, 即平面上 Borel 集类, 详见第三章§5.

不交时——这时称$M=\bigcup_{j=1}^{n}M_j$是一个初等分解——规定

$$E(M)=\sum_{j=1}^{n}E(M_j) \tag{10.2}$$

我们只要证明当$j\neq j'$时，$E(M_j)\perp E(M_{j'})$，那末根据§5定理4就知道$E(M)\in\mathscr{P}$．事实上，设$M_j=S_j^{(1)}\times S_j^{(2)}$，由于当$j\neq j'$时$M_j\cap M_{j'}=\varnothing$，所以$S_j^{(1)}\cap S_{j'}^{(1)}=\varnothing$或$S_j^{(2)}\cap S_{j'}^{(2)}=\varnothing$，这样一来

$$\begin{aligned}
&E(S_j^{(1)}\times S_j^{(2)})E(S_{j'}^{(1)}\times S_{j'}^{(2)})\\
&=E_1(S_j^{(1)})E_2(S_j^{(2)})E_1(S_{j'}^{(1)})E_2(S_{j'}^{(2)})\\
&=E_1(S_j^{(1)})E_1(S_{j'}^{(1)})E_2(S_j^{(2)})E_2(S_{j'}^{(2)})\\
&=E_1(S_j^{(1)}\cap S_{j'}^{(1)})E_2(S_j^{(2)}\cap S_{j'}^{(2)})=0
\end{aligned}$$

所以$E(M_j)$与$E(M_{j'})$直交，因此$E(M)$是投影算子．还可以证明(请读者自己证明)$E(M)$的定义(10.2)与M的初等分解$M=\bigcup_{j=1}^{n}M_j$的取法无关，即如果$M=\bigcup_{i=1}^{n}M_i^{(1)}=\bigcup_{j=1}^{m}M_i^{(2)}$，且$M_k^{(1)}\cap M_l^{(1)}=\varnothing(k\neq l)$，$M_{k'}^{(2)}\cap M_{l'}^{(2)}=\varnothing(k'\neq l')$必有

$$\sum_{i=1}^{n}E(M_i^{(1)})=\sum_{i=1}^{m}E(M_i^{(2)})$$

这样E就延拓成为$\widehat{\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2}\to\mathscr{P}$的映照，而且$E(\cdot)$在$\widehat{\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2}$上是有限可加的．

(3) 证E是代数$\widehat{\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2}$上的谱测度．显然，只要证明$E$具有可列可加性就可以了．

对任何$f\in H$，令

$$\begin{aligned}
\varphi_f(x_1,x_2)&=(E((-\infty,x_1]\times(-\infty,x_2])f,f)\\
&=(E_1((-\infty,x_1])E_2((-\infty,x_2])f,f)
\end{aligned} \tag{10.3}$$

显然，当固定f时，二元函数$\varphi_f(x_1,x_2)$在固定一个变元后是关于

另一个变元右连续的. 并且对任何 $x_1<x'_1, x_2<x'_2$,

$$\begin{aligned}&\varphi_f(x'_1,x'_2)-\varphi_f(x'_1,x_2)-\varphi_f(x_1,x'_2)+\varphi_f(x_1,x_2)\\&=(E_1((x_1,x'_1])E_2((x_2,x'_2])f,f)\\&=\|E_1((x_1,x'_1])E_2((x_2,x'_2])f\|^2\geq 0\end{aligned}$$

由此可知 $\varphi_f(x_1,x_2)$ 可以产生 $\widehat{R_1\times R_2}$ 上可列可加的数值测度. 从而对任何 $\widehat{R_1\times R_2}$ 中一列互不相交的集 $\{M_n\}$, 如果 $\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n\in\widehat{R_1\times R_2}$ 时,

$$\left(E\left(\bigcup_n M_n\right)f,f\right)=\sum_n\left(E(M_n)f,f\right)\tag{10.4}$$

固定序列 $\{M_n\}$, 上式对一切 $f\in H$ 成立, 再用极化恒等式, 便知对一切 f、$g\in H$,

$$\left(E\left(\bigcup_n M_n\right)f,g\right)=\sum_n(E(M_n)f,g)\tag{10.5}$$

从而

$$E\left(\bigcup_n M_n\right)=\sum_n E(M_n)\tag{10.6}$$

即 E 是 $\widehat{R_1\times R_2}$ 上测度.

(4) 根据 §7 定理 4, $(X_1\times X_2,\widehat{R_1\times R_2})$ 上的谱测度 E 必唯一地延拓成 $(X_1\times X_2, R_1\times R_2)$ 上的谱测度. 证毕.

定理 2　设 $(X_j, R_j, E_j)(j=1,2)$ 是 Hilbert 空间 H 上的两个谱测度空间, 而且 E_1、E_2 是可交换的谱测度, 那末在 $(X_1\times X_2, R_1\times R_2)$ 上 E_1 与 E_2 的乘积谱测度是唯一的. 设 A 是 H 中任一有界线性算子, 如果 A 与 E_j $(j=1,2)$ 可交换①, 那末 A 与它们的乘积谱测度可交换.

---

① 即对一切 $M\in R_j$, $E_j(M)A=AE_j(M)$.

证 设在 $(X_1\times X_2, \boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2)$ 上有两个谱测度 E 和 F 都是 E_1 与 E_2 的乘积谱测度，作

$$\boldsymbol{M}=\{M\mid M\in\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2, E(M)=F(M)\}$$

当 $M=M_1\times M_2\in\boldsymbol{P}$ 时，$E(M)=E_1(M_1)E_2(M_2)=F(M)$，因此 $\boldsymbol{P}\subset\boldsymbol{M}$. 容易证明 $\boldsymbol{M}$ 是一个 σ-代数，但是 $\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2$ 是包含 $\boldsymbol{P}$ 的最小 σ-代数，所以 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2$，即 $E=F$，这就得到乘积谱测度的唯一性.

类似地，设 A 与 $E_j(j=1,2)$ 可交换，作

$$\boldsymbol{R}=\{M\mid M\in\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2, AE(M)=E(M)A\}$$

由(10.1)易知 $\boldsymbol{P}\subset\boldsymbol{R}$，同样易知 $\boldsymbol{R}$ 是 σ-代数，所以 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2$，证毕.

我们现在要讨论乘积谱测度的谱积分.

定理 3 设 $(X_j, \boldsymbol{R}_j, E_j)$ $(j=1, 2)$ 是 Hilbert 空间 H 上的两个谱测度空间，而 E_1、E_2 是可交换谱测度，E 是 $(X_1\times X_2, \boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{R}_2)$ 上 E_1 与 E_2 的乘积谱测度. $B(X_j, \boldsymbol{R}_j)$ 是 $(X_j, \boldsymbol{R}_j)$ 上的有界可测函数全体，那末当 $f_j\in B(X_j, \boldsymbol{R}_j)$ 时，

$$\int_{X_1\times X_2} f_1(x_1)f_2(x_2)dE(x_1, x_2)$$
$$=\int_{X_1} f_1(x_1)dE(x_1)\int_{X_2} f_2(x_2)dE(x_2) \tag{10.7}$$

证 设 $|f_j(x_j)|<K$, $x_j\in X_j$, $j=1,2$. 对任何正数 ε，作 $[-K, K]$ 中的分点组 y_0、y_1、…、y_n，使 $\max\limits_j(y_j-y_{j-1})<\varepsilon$，作

$$M_j^{(k)}=X_j(y_{k-1}\leqslant f_j(x_j)<y_k)\in\boldsymbol{R}_j, j=1,2$$

那末由 §8 谱积分的定理可知

$$\left\|\int_{X_j} f_j(x_j)dE(x_j)-\sum_{k=1}^{n}y_kE_j(M_j^{(k)})\right\|<\varepsilon, j=1,2$$

再利用 $|f_j(x_j)|<K$ 可以得到估计式

$$\left\| \int_{X_1} f_1(x_1) dE_1(x_1) \int_{X_2} f_2(x_2) dE_2(x_2) - \right.$$

$$\left. \sum_{k=1}^{n} y_k E_1(M_1^{(k)}) \sum_{l=1}^{n} y_l E_2(M_2^{(l)}) \right\| < 2K\varepsilon \tag{10.8}$$

但是

$$\sum_{k=1}^{n} y_k E_1(M_1^{(k)}) \sum_{l=1}^{n} y_l E_2(M_2^{(l)}) = \sum_{k,l=1}^{n} y_k y_l E(M_1^{(k)} \times M_2^{(l)}) \tag{10.9}$$

另一方面，由于当$(x_1, x_2) \in M_1^{(k)} \times M_2^{(l)}$时，

$$|f_1(x_1) f_2(x_2) - y_k y_l| < 2K\varepsilon$$

因此

$$\left\| \int_{X_1 \times X_2} f_1(x_1) f_2(x_2) dE(x_1, x_2) - \sum_{k,l} y_k y_l E(M_1^{(k)} \times M_2^{(l)}) \right\|$$

$$= \left\| \sum_{k,l} \int_{M_1^{(k)} \times M_2^{(l)}} (f_1(x_1) f_2(x_2) - y_k y_l) dE(x_1, x_2) \right\| \leqslant 2K\varepsilon \tag{10.10}$$

把(10.8—10.10)结合起来，就得到(10.7)式左、右两边的差的范数不超过 $4K\varepsilon$. 再令 $\varepsilon \to 0$, 即知(10.7)式成立. 证毕.

3. 正常算子的谱分解 利用自共轭算子的谱分解定理和乘积谱测度可以得到正常算子的谱分解定理.

定理 4 (正常算子的谱分解) 设H是复 Hilbert 空间，N是H上的正常算子，那末必有$(\sigma(N), \mathbf{B}_{\sigma(N)})$上唯一的谱测度$E$，使得

$$N = \int_{\sigma(N)} z dE(z)$$

并且，对H上任何有界线性算子A，当A与N和N^*都可交换时①，A必与$E(M)$ $(M \in \mathbf{B}_{\sigma(N)})$可交换.

① 其实，只要假设A与N可交换，因为由这个假设可以推出A与N^*也可交换.

证 令 N_1、N_2 分别是 N 的实部和虚部. 设 $(X_j, \boldsymbol{B}, E_j)$ 是 N_j 的谱测度空间, 其中 X_j 是数直线, $\boldsymbol{B}$ 是直线上 Borel 集类. 由引理 2, E_1 与 E_2 可交换. 根据定理 1, 在 $(X_1\times X_2, \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B})$ 上存在 E_1、E_2 的乘积谱测度 $E=E_1\times E_2$. 由于

$$N_j=\int_{X_j} x_j dE_j(x_j), \quad I=\int_{X_j} dE_j(x_j)$$

取 $f_1(x_1)=x_1, f_2(x_2)\equiv 1$, 又取 $f_1(x_1)\equiv 1, f_2(x_2)=x_2$, 两次应用定理 3 就得到

$$N_j=\int_{X_1\times X_2} x_j dE(x_1, x_2) \tag{10.11}$$

我们将点 (x_1, x_2) 写成复数形式: $z=x_1+ix_2$, 那末由 $N_1+iN_2=N$ 以及 (10.11) 立即就得到

$$N=\int_{X_1\times X_2} z dE(z), \quad I=\int_{X_1\times X_2} dE(z)$$

当 A 是与 N、N^* 都可交换的有界线性算子时, 显然 A 与 N_j 可交换. 由 §9 定理 6 的系 2, A 与 E_j 可交换. 再由定理 2 知 A 与 E 可交换.

再证谱测度 E 集中在 $\sigma(N)$ 上: 令 $S(\lambda, r)$ 是复平面上以 λ 为中心, r 为半径的闭圆. 对任何 $\lambda\in\rho(N)$, 今证必有正数 r, 使得

$$E(S(\lambda, r))=0 \tag{10.12}$$

如果不对, 必有 $r_n>0$, $r_n\to 0(n\to\infty)$, 而且 $E(S(\lambda, r_n))\neq 0$. 因此有 $x_n\in E(S(\lambda, r_n))H$, $\|x_n\|=1$, $n=1,2,\cdots$, 由 §7 定理 2 的系 2 得到

$$\begin{aligned}
&\|(\lambda I-N)x_n\|^2\\
&=\int_{X_1\times X_2}|\lambda-z|^2 d\|E(z)x_n\|^2\\
&=\int_{S(\lambda, r_n)}|\lambda-z|^2 d\|E(z)x_n\|^2\leqslant r_n^2\|E(S(\lambda, r_n))x_n\|^2=r_n^2
\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，上式右边 $r_n^2\to 0$，从而 $\|(\lambda I-N)x_n\|\to 0(n\to\infty)$，这和 $\lambda\in\rho(N)$ 的假设相矛盾．由此可知，对每个 $\lambda\in\rho(N)$，必有正数 r，使(10.12)成立．再利用谱测度的可列可加性，易知

$$E(\rho(N))=0$$

所以 E 只能集中在 $\sigma(N)$ 上．

关于谱测度的唯一性是容易证得的，留给读者作为练习．证毕．

定理 4 中的谱测度称为由 N 决定的谱测度，或称为相应于 N 的谱测度．

系 1　设 N 是复 Hilbert 空间 H 上的正常算子，那末由 N 决定的谱测度不可能集中在比 $\sigma(N)$ 更小的闭集上．

这个系的证明与 §9 定理 6 中相应部分的证法类似，所以把它的证明略去．

系 2　设 N 是复 Hilbert 空间 H 上的正常算子，$(\sigma(N),\boldsymbol{B}_{\sigma(N)},E)$ 是由 N 决定的谱测度，对于每个 $f\in B(\sigma(N),\boldsymbol{B}_{\sigma(N)})$①作

$$f(N)=\int_{\sigma(N)}f(z)dE(z)$$

那末 $f\longmapsto f(N)$ 是算子演算．

4．算子代数　关于复 Hilbert 空间正常算子谱分解理论的进一步发展是和算子代数密切相关的．我们先叙述有关的一些概念．

定义　设 $\mathfrak{A}$ 是复 Hilbert 空间 H 中某些可交换的有界线性算子族，按通常的代数运算及算子乘法运算组成的 Banach 代数②，$I\in\mathfrak{A}$ 而且当 $A\in\mathfrak{A}$ 时，$A^*\in\mathfrak{A}$，那末称 $\mathfrak{A}$ 为 H 中的**变换对称 Banach 代数**．

设 f 是 $\mathfrak{A}$ 上的连续线性泛函，满足如下的条件：(i) $f(I)=1$；(ii) 当 $A,B\in\mathfrak{A}$ 时，$f(AB)=f(A)f(B)$；(iii) 当 $A\in\mathfrak{A}$ 时，$f(A^*)=\overline{f(A)}$．那末称 f

① $B(\sigma(N),\boldsymbol{B}_{\sigma(N)})$ 是 $\sigma(N)$ 上复变数、复值的有界 Baire 函数全体．

② 即 $\mathfrak{A}$ 按通常算子的线性运算和范数成为 Banach 空间，而且 $\mathfrak{A}$ 对算子的乘法运算也是封闭的．见第五章§1．

是 $\mathfrak{A}$ 上的**对称可乘线性泛函**. $\mathfrak{A}$ 上的对称可乘线性泛函全体记为$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$, 或简记为$\mathfrak{M}$.

我们在$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$上取弱*拓扑, 即对任何正数 ε, 任何 A_1、…、$A_n\in\mathfrak{A}$ 及 $f_0\in\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$, 作

$$U(f_0; A_1, A_2, \cdots, A_n, \varepsilon)=\{f\mid f\in\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}, |f(A_j)-f_0(A_j)|<\varepsilon,\quad j=1, 2, \cdots, n\}$$

以这种形状的集全体作为 f_0 的环境集所导出的拓扑. $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$按这个拓扑所成的拓扑空间称为 $\mathfrak{A}$ 的谱空间.

由 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中的开集全体所张成的 σ-代数记为 $\boldsymbol{B}$, 其中的集称为 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中的 Borel 集.

定理 5 设 $\mathfrak{A}$ 是复 Hilbert 空间H中算子组成的交换对称 Banach 代数, $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的谱空间, $\boldsymbol{B}$是$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 中 Borel 集全体, 那末必有$(\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}, \boldsymbol{B})$上唯一的谱测度$E$, 使得对每个 $A\in\mathfrak{A}$

$$A=\int_{\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}}f(A)dE(f)\tag{10.13}$$

这个定理的证明要利用交换 Banach 代数的理论和紧拓扑空间上连续函数空间的连续线性泛函表示定理, 所以把它略去. 关于这方面更进一步的发展可以参看[14].

例 3 设$\mathfrak{M}$是复平面上的有界闭集, $\boldsymbol{B}$ 是$\mathfrak{M}$中 Borel 集全体所成的 σ-代数. μ 是$(\mathfrak{M}, \boldsymbol{B})$上的一个全有限测度, 而且 μ 不能集中在比$\mathfrak{M}$更小的闭集上. 令 $C(\mathfrak{M})$表示$\mathfrak{M}$上的连续函数全体. 对每个 $f\in C(\mathfrak{M})$ 作 $L^2(\mathfrak{M}, \boldsymbol{B}, \mu)$上的有界线性算子 A_f 如下:

$$(A_f g)(z)=f(z)g(z)\qquad g\in L^2(\mathfrak{M}, \boldsymbol{B}, \mu)$$

显然 $\mathfrak{A}=\{A_f\mid f\in C(\mathfrak{M})\}$成为 $L^2(\mathfrak{M}, \boldsymbol{B}, \mu)$ 中的交换对称 Banach 代数, 而且可以证明对每个 $F\in\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$, 必有唯一的 $z\in\mathfrak{M}$, 使得

$$F(A_f)=f(z)$$

我们把 z 与 F 一致化, 那末$\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 与 $\mathfrak{M}$ 一致. 对每个$M\in\boldsymbol{B}$ 作 $E(M)$如下: 当 $f\in L^2(\mathfrak{M}, \boldsymbol{B}, \mu)$时

$$(E(M)g)(z)=\chi_M(z)g(z)$$

(χ_M 是M的特征函数), 那末容易证明

$$A_f=\int_{\mathfrak{M}}f(z)dE(z)$$

这就是在这个具体情况下的(10.13)式.

习　题

1. 证明：在例 1 中，当测度 μ 不能集中在比 Ω 更小的闭集上时，$\sigma(N)=\Omega$；当 μ 不集中在实轴上时，N 不是自共轭算子；当 μ 不集中在单位圆周上时，N 不是酉算子.

2. 证明引理 1.

3. 证明相应于正常算子的谱测度是唯一的，并且谱测度不能集中在比 $\sigma(N)$ 更小的闭集上.

4. 设 N 是复 Hilbert 空间 H 上有界线性算子.

(1) 证明 N 是正常算子的充要条件是存在 H 上酉算子 U，以及半正(自共轭)算子 R(即对一切 $x\in H$，$(Rx, x)\geqslant 0$)，并且 U 和 R 可交换，使得 $N=UR$.

(2) 问：当 N 是正常算子时，上述分解 $N=UR$(称为极分解)是否唯一？

5. 将 §9 定理 7 推广到正常算子情况.

6. 设 N 是复 Hilbert 空间 H 上正常算子，N_1、N_2 分别是 N 的实部和虚部.

证明(i) $\|N\|^2=\|N_1^2+N_2^2\|$；

(ii) 当 n 是自然数时，$\|N^n\|=\|N\|^n$；

(iii) 当 $\lambda\in\rho(N)$ 时，

$$\|(\lambda I-N)^{-1}\|=\frac{1}{\min\limits_{z\in\sigma(N)}|\lambda-z|}$$

7. 设 S、$S_n(n=1,2,\cdots)$ 都是复 Hilbert 空间上正常算子. 证明：如果(强)$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，那末(强)$\lim\limits_{n\to\infty}S_n^*=S^*$.

§11　算子的扩张[①]与膨胀

对于复 Hilbert 空间上酉算子、自共轭算子以及正常算子都能写成谱积分的形式，这样算子的结构就相当清楚了. 对于更一般的算子，自然不能企求它们都具有谱分解式. 例如单向平移算子(见 §8 末)应该说还是比较简单的一种算子，但连一个约化子空间也

① 扩张即延拓.

没有. 对非正常算子就得从其它方面加以考察. 其中之一就是给定的算子能否扩张或膨胀成为性质良好的算子, 以此用性质良好的算子近似地 (在某种意义下) 描述原来的算子. 在 §9 的第四小节中我们就利用 Cayley 变换研究过对称算子的自共轭扩张. 这一节我们将对算子理论中常见的几种扩张和膨胀作一初步介绍.

1. 闭扩张 在无界线性算子的讨论中,算子是不是闭的是很重要的(闭性与连续性关系很密切),这里要讨论算子的闭扩张,讨论这类扩张的基本方法是用图象方法 (图象方法本身在算子理论是常用的).

设 H、G 同是实或复内积空间, $(\cdot, \cdot)_H$、$(\cdot, \cdot)_G$ 分别为 H、G 的内积, 在乘积空间 $H\times G$ 上引入内积: 当 $\{x, y\}$、$\{x', y'\}\in H\times G$ 时, 规定

$$(\{x, y\}, \{x', y'\})_{H\times G}=(x, x')_H+(y, y')_G \tag{11.1}$$

易知 $H\times G$ 按 $(\cdot, \cdot)_{H\times G}$ 成为内积空间; 当 H、G 是 Hilert 空间时, $H\times G$ 也成为 Hilbert 空间(反之也真), 并且 $(H\times G)^*=H\times G$.

同样, 在 $G\times H$ 上也可类似地引入内积 $(\cdot, \cdot)_{G\times H}$.

为了简便起见, 今后常将各个空间上内积的空间下标省掉.

再引入 $H\times G\to G\times H$ 的算子 U、V 如下: 对任何 $\{x, y\}\in H\times G$

$$U\{x, y\}=\{y, x\}, V\{x, y\}=\{-y, x\} \tag{11.2}$$

易知 U、V 都是 $H\times G\to G\times H$ 的酉算子. 当 $H=G$ 时, U、V 不仅是 $H\times H$ 上酉算子, 而且

$$V^2=-I, \quad U^2=I, \quad UV=-VU \tag{11.3}$$

引理 1 设 H、G 是内积空间, T 是 H 到 G 的线性算子, 定义域为 $\mathscr{D}(T)$, 那末

(i) T 是闭算子的充要条件是 T 的图象 $G(T)$ 是 $H\times G$ 的闭线性子空间.

(ii) L 是 $H\times G$ 的线性子空间, L 是某个 H 到 G 的线性算子

T的图象的充要条件是L中不含形为$\{0,y\}(y\neq 0)$的向量.

(iii) 设H、G是Hilbert空间, T是H到G的稠定算子的充要条件是$(VG(T))^{\perp}$中不含形为$\{0,x\}(x\neq 0)$的向量. 同样, S是G到H的稠定算子的充要条件是$(V^{-1}G(S))^{\perp}$中不含形为$\{0,y\}(y\neq 0)$的向量.

证 (i) 显然, 线性算子的图象是$H\times G$的线性子空间, 由闭算子的定义(见第四章§5)易知(i)成立.

(ii) 如果$L=G(T)$, 由于T是线性算子, 所以$0\in\mathscr{D}(T)$, 从而$T0=0$, 因此L中不含有任何$\{0,y\}(y\neq 0)$.

反之, 如果L中不含有形为$\{0,y\}(y\neq 0)$的向量, 这时由L作H到G的线性算子T_L如下: 当$\{x,y\}\in L$时,

$$T_L x=y,\quad \mathscr{D}(T_L)=\{x\mid\{x,y\}\in L\} \tag{11.4}$$

由于L是线性子空间, 并且不含$\{0,y\}(y\neq 0)$, 易知T_L是$\mathscr{D}(T_L)$到G的单值映照, 并且是线性的算子.

(iii) 显然$\{y,x'\}\in(VG(T))^{\perp}$的充要条件是对一切$x\in\mathscr{D}(T)$,

$$0=(\{y,x'\},\{-Tx,x\})=-(y,Tx)+(x',x) \tag{11.5}$$

如果T是稠定的, 由(11.5)易知$(VG(T))^{\perp}$中不可能含有向量$\{y,x'\}(y=0,x'\neq 0)$.

反之, 如果$\overline{\mathscr{D}(T)}\neq H$, 那末取$y=0$, $x'\in H\ominus\overline{\mathscr{D}(T)}$, 并且$x'\neq 0$. 由(11.5)易知$\{0,x'\}\in(VG(T))^{\perp}$, 这与假设相矛盾. 所以$\overline{\mathscr{D}(T)}=H$.

调换G和H地位就可得到相应于S的结论. 证毕.

定义 设H、G是内积空间, T、T'是H到G的线性算子. 如果T'是闭的, 并且$T\subset T'$, 称T'是T的**闭扩张**(**闭延拓**). 如果$\tilde{T}$是T的一个闭扩张, 而且对一切T的闭扩张T', 都有$\tilde{T}\subset T'$, 称$\tilde{T}$是T的最小闭扩张.

引理 2 设 H、G 是内积空间，T 是 H 到 G 的线性算子，那末

(i) $T\subset T'$ 的充要条件是 $G(T)\subset G(T')$；

(ii) T 存在闭扩张的充要条件是 $G(T)\subset L$，而 L 是 $H\times G$ 中的不含形为 $\{0, y\}(y\neq 0)$ 的向量的闭线性子空间；

(iii) T 有最小闭扩张的充要条件是 $\overline{G(T)}$ 中不含形为 $\{0, y\}$ $(y\neq 0)$ 的向量.

证 从引理 1 知(i)、(ii)是显然的，利用 (ii) 就很容易证明 (iii)，证略.

设 H、G 是 Hilbert 空间，T 是 H 到 G 的稠定线性算子，那末 T^* 便是 $\mathscr{D}(T^*)(\subset G)\longrightarrow H$ 的线性算子.

定理 1 设 H、G 是 Hilbert 空间，那末

(i) 当 T 是 H 到 G 的稠定线性算子时，

$$G(T^*)=(VG(T))^{\perp}=V(G(T)^{\perp}) \tag{11.6}$$

(ii) 稠定线性算子 T 具有闭扩张的充要条件是 T^* 是 G 到 H 的稠定线性算子，并且 T^{**} 是 T 的最小闭扩张. 特别，当 T 是稠定闭算子时，有 $T=T^{**}$.

证 (i) 根据(稠定算子的)共轭算子的定义(参见 §9)，$G\times H$ 中向量 $\{y, z\}\in G(T^*)$ (即 $y\in\mathscr{D}(T^*)$，$z=T^*y$) 的充要条件是对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$，

$$-(Tx, y)+(x, z)=0 \tag{11.7}$$

由此可知(11.6)第一等号成立. 再利用 V 是酉算子，知第二等号成立.

(ii) 首先，对任何线性算子 T，有

$$H\times G=\overline{G(T)}\oplus G(T)^{\perp} \tag{11.8}$$

又因为 V 是酉算子，所以

$$G\times H=V\overline{G(T)}\oplus V(G(T)^{\perp}) \tag{11.9}$$

又因，$V(G(T)^{\perp})=(VG(T))^{\perp}$，所以

$$G\times H=V\overline{G(T)}\oplus(VG(T))^{\perp}\tag{11.10}$$

当 T 是稠定算子时，由(i)得到

$$G\times H=V\overline{G(T)}\oplus G(T^*)\tag{11.11}$$

即

$$H\times G=V^{-1}(G\times H)=\overline{G(T)}\oplus V^{-1}G(T^*)\tag{11.12}$$

因此

$$\overline{G(T)}=(V^{-1}G(T^*))^{\perp}\tag{11.13}$$

如果 T 具有闭扩张 T'，因此 $\overline{G(T)}\subset G(T')$。由于图象 $G(T')$ 中决不会含有形为 $\{0,y\}(y\neq0)$ 的向量，因而 $\overline{G(T)}$ 中也不含此类向量。由引理 1 的(iii)和(11.13)立即知道 T^* 必是 G 到 H 的稠定线性算子。

反之，如果 T^* 是稠定算子，那末 $(T^*)^*$ 存在，但 $T\subset T^{**}$，并且 $T^{**}=(T^*)^*$ 是闭的，所以 T 有闭扩张。

当 T^* 稠定时，由于(11.6)式(在(11.6)式中将 T^* 代替 T，相应 V^{-1} 代替 V)

$$G(T^{**})=(V^{-1}G(T^*))^{\perp}$$

由(11.13)可知 $G(T^{**})=\overline{G(T)}$，从而 T^{**} 还是 T 的最小闭扩张。

特别，当 T 本身是稠定的闭算子时，T 是自身的最小闭扩张，即 $T=T^{**}$。证毕。

系　(i) A 是 Hilbert 空间 H 上自共轭算子的充要条件是

$$G(A)=V(G(A)^{\perp})\tag{11.14}$$

(ii) A 是 Hilbert 空间 H 上自共轭算子，如果 A 是一对一的，那末 A^{-1} 也是 H 上自共轭算子。

证　由定理 1 的(11.6)式可知(i)是显然的。关于(ii)可以直接用自共轭算子的谱分解定理加以证明。这里将用图象方法来证明。

显然 $G(A^{-1})=UG(A)(=VG(-A))$，由(11.14)、(11.3)有

$$G(A^{-1})=UG(A)=UV(G(A)^{\perp})=-VU(G(A))^{\perp}$$
$$=-V(UG(A))^{\perp}=-V(G(A^{-1}))^{\perp}$$
$$=V(G(A^{-1})^{\perp})$$

由本系的(i)可知 A^{-1} 是自共轭算子. 证毕.

利用上面一些事实,就得到稠定闭算子的一个重要性质.

定理 2 设 H、G 是 Hilbert 空间,T 是 H 到 G 的稠定闭线性算子,那末 T^*T、TT^* 分别是 H、G 上的自共轭算子.

证 证 T^*T 是自共轭算子: 因为 T 是稠定闭算子, 所以由(11.11)、(11.12)得到

$$H\times G=G(T)\oplus V^{-1}G(T^*) \tag{11.15}$$

从而对任何 $h\in H$, $g\in G$ (因而 $\{h, g\}\in H\times G$) 必有唯一的 $x\in\mathscr{D}(T^*T)$, $y\in\mathscr{D}(T^*)$, 使得

$$\begin{cases}x+T^*y=h,\\ Tx-y=g.\end{cases} \tag{11.16}$$

特取 $g=0$, 由(11.16)得到

$$(I+T^*T)x=h \tag{11.17}$$

即 $I+T^*T$ 将 $\mathscr{D}(T^*T)$ 映射成整个 H. 由于对任何 $x\in\mathscr{D}(T^*T)$,

$$\|x\|^2\leqslant\|x\|^2+(Tx, Tx)=((I+T^*T)x, x)$$
$$\leqslant\|(I+T^*T)x\|\|x\|$$

由此可知 $(I+T^*T)^{-1}$ 是全空间 H 上有定义的有界线性算子 (其实, 还有 $\|(I+T^*T)^{-1}\|\leqslant 1$). 下面证明 $(I+T^*T)^{-1}$ 是自共轭算子. 对任何 $h_i\in H$, 记 $x_i=(I+T^*T)^{-1}h_i$, $i=1, 2$. 注意到 $x_i\in\mathscr{D}(T^*T)$, 因而

$$((I+T^*T)^{-1}h_1, h_2)=(x_1, (I+T^*T)x_2)$$
$$=(x_1, x_2)+(x_1, T^*Tx_2)$$
$$=(x_1, x_2)+(Tx_1, Tx_2)$$
$$=(x_1, x_2)+(T^*Tx_1, x_2)$$

$$=((I+T^*T)x_1, x_2)=(h_1, (I+T^*T)^{-1}h_2)$$

即$(I+T^*T)^{-1}$是自共轭算子．再由定理 1 的系得到$(I+T^*T)$是自共轭的．

完全类似地可以证明TT^*是G上自共轭算子．证毕．

2. 半有界算子的自共轭扩张　§9中曾用 Cayley 变换从原则上解决了对称算子的自共轭扩张问题（即归结为相应的保范算子能否有酉扩张），那里主要的判断依据是对称算子的亏指数．这里提供的扩张定理（在微分方程中更为常用，有兴趣的读者可参见米赫林的书[18]）的证明方法的本质是在于改变内积．先给出如下引理：

引理 3　设$(H, (\cdot,\cdot))$①是复 Hilbert 空间，G是$(H, (\cdot,\cdot))$的稠密的线性子空间．又设在G上又有一个复内积$[\cdot,\cdot]$，相应的范数为$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$，并且在G上，$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$强于$\|\cdot\|$，即存在$\alpha>0$，使得

$$\alpha\|x\|\leqslant|\!|\!|x|\!|\!|,\ x\in G \tag{11.18}$$

那末G按$[\cdot,\cdot]$成为 Hilbert 空间的充要条件是存在$(H, (\cdot,\cdot))$上稠定闭线性算子$B: \mathscr{D}(B)=G, G\to\mathscr{R}(B)$上可逆，$\|B^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\alpha}$，并且对任何$x$、$y\in G$，

$$[x, y]=(Bx, By)\ (\text{即}|\!|\!|x|\!|\!|=\|Bx\|,\ x\in G) \tag{11.19}$$

证　充分性：设满足条件的B存在，易知按（11.19）定义的$[\cdot,\cdot]$是G上的双线性、Hermite 泛函．特别在(11.19)中令$y=x$，由假设$\|B^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\alpha}$得到

$$|\!|\!|x|\!|\!|^2=\|Bx\|^2\geqslant\alpha^2\|x\|^2 \tag{11.20}$$

即在G上，范数$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$强于$\|\cdot\|$．

---

① 因为在这里会出现在同一个线性空间上同时赋有不同的内积，因而“有界”、“稠密”等都要标明按什么拓扑，因此这里需要标明内积空间中的内积．

今证 G 按 $[\cdot,\cdot]$ 成为 Hilbert 空间：设 $\{x_n\}\subset G$，并且是按 $\|\cdot\|$ 的基本序列，由(11.20)知道 $\{x_n\}$、$\{Bx_n\}$ 都必是 $(H,(\cdot,\cdot))$ 上基本序列，由于 $(H,(\cdot,\cdot))$ 完备，所以存在 $x_0, y_0\in H$ 使得 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$y_0=\lim\limits_{n\to\infty}Bx_n$. 由假设 B 是 $(H,(\cdot,\cdot))$ 上闭算子，所以

$$x_0\in\mathscr{D}(B)=G,\quad Bx_0=y. \tag{11.21}$$

又由(11.20)，有

$$\|x_n-x_0\|=\|B(x_n-x_0)\|=\|Bx_n-y_0\|\to 0(n\to\infty)$$

这说明 x_0 按 $\|\cdot\|$ 是 $\{x_n\}$ 的极限点，所以 $(G,[\cdot,\cdot])$ 是 Hilbert 空间.

必要性：任取 $y\in H$，作 $(H,(\cdot,\cdot))$ 上连续线性泛函

$$f(x)=(x,y) \tag{11.22}$$

特別，将 f 视为空间 $(G,[\cdot,\cdot])$ 上线性泛函，由于

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\|\\&\leqslant\frac{1}{\alpha}\|y\|\|x\|,\quad x\in G\end{aligned} \tag{11.23}$$

由此可知 f 是 $(G,[\cdot,\cdot])$ 上连续泛函. 因 G 按 $[\cdot,\cdot]$ 是 Hilbert 空间，由 Riesz 的表示定理，必存在 G 中唯一的 y_1，使得

$$f(x)=[x,y_1] \tag{11.24}$$

令 $y\longmapsto y_1$ 的映照为 T，易知 T 是 $H\to G$ 的线性算子，当然将 T 仅限在 G 上时，T 便是 $G\to G$ 的线性算子.

由于 G 在 $(H,(\cdot,\cdot))$ 中稠密，当 $y\neq 0$ 时，f 便是非零泛函，从(11.24)易知 $y_1\neq 0$，即 T 是一对一的.

在(11.22)中分别取 $x=Ty(\in G)$ 和 $y=x$，利用(11.24)就得到

$$(Ty,y)=[Ty,y_1]=[Ty,Ty],y\in H \tag{11.25}$$

$$(x,x)=[x,Tx],x\in G \tag{11.26}$$

由(11.25)、(11.26)知道 T 既是全空间 $(H,(\cdot,\cdot))$ 上对称算子，又

是全空间$(G,[\cdot,\cdot])$上对称算子，从而T既是$(H,(\cdot,\cdot))$上有界自共轭算子，又是$(G,[\cdot,\cdot])$上有界自共轭算子．并且同时是两个空间上的半正算子(即$T\geqslant 0$)．

记$T^{\frac{1}{2}}$是T在$(G,[\cdot,\cdot])$上的一个半正平方根(见§9定理6的系5)，对任何$x\in G$，由(11.26)和假设$|\!|\!|x|\!|\!|\geqslant\alpha\|x\|$得到

$$\|T^{\frac{1}{2}}x\|^2\leqslant\frac{1}{\alpha^2}|\!|\!|T^{\frac{1}{2}}x|\!|\!|^2=\frac{1}{\alpha^2}[x,Tx]=\frac{1}{\alpha^2}\|x\|^2 \tag{11.27}$$

即$T^{\frac{1}{2}}$作为$(H,(\cdot,\cdot))$上线性算子时，是定义在稠密集G上的有界线性算子，且

$$\|T^{\frac{1}{2}}\|\leqslant\frac{1}{\alpha} \tag{11.28}$$

由此可知，$T^{\frac{1}{2}}$能唯一地延拓成整个$(H,(\cdot,\cdot))$上到$(H,(\cdot,\cdot))$的有界线性算子$\tilde{T}$．

$$\|\tilde{T}\|\leqslant\frac{1}{\alpha} \tag{11.29}$$

由于T、$T^{\frac{1}{2}}$、$\tilde{T}$都是$(H,(\cdot,\cdot))$上有界线性算子，而且在稠密集G上有$T=T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}$，自然$T=\tilde{T}\tilde{T}$在$H$上成立．又由于$T$是一对一的，所以$\tilde{T}$在$H$上也是一对一的，从而$\tilde{T}^{-1}$是闭算子．由于$T^{\frac{1}{2}}G$在$(G,[\cdot,\cdot])$上稠密，$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$强于$\|\cdot\|$，立即推知$T^{\frac{1}{2}}G$在$(H,(\cdot,\cdot))$上稠密．由此可知$\tilde{T}^{-1}$是$(H,(\cdot,\cdot))$上稠定闭线性算子．

令B是$T^{-\frac{1}{2}}$在$(H,(\cdot,\cdot))$上的最小闭扩张，显然

$$T^{-\frac{1}{2}}\subset B\subset\tilde{T}^{-1},\text{ 且图象}G(B)=\overline{G(T^{-\frac{1}{2}})}$$

对任何$x\in G$，记$z=T^{\frac{1}{2}}x$，$z\in T^{\frac{1}{2}}G\subset G$，由(11.26)

$$\|Bz\|^2=(T^{-\frac{1}{2}}z,T^{-\frac{1}{2}}z)=(x,x)$$

$$=[x, Tx]=[T^{-\frac{1}{2}}z, TT^{-\frac{1}{2}}z]$$

$$=[T^{-\frac{1}{2}}z, T^{\frac{1}{2}}z]=[z, z]=\|z\|^2 \qquad (11.30)$$

但$T^{\frac{1}{2}}G$在$(G, [\cdot, \cdot])$上稠密，B是$(H, (\cdot, \cdot))$上稠定闭算子，由此易知(11.30)对$(G, [\cdot, \cdot])$中一切z都成立，即$\mathscr{D}(B)\supset G$. 反之，因为 $G(B)=\overline{G(T^{-\frac{1}{2}})}$，所以对任何 $z_0\in\mathscr{D}(B)$，必有 $z_n\in\mathscr{D}(T^{-\frac{1}{2}})$，使得

$$\|z_n-z_0\|\to 0, \|T^{-\frac{1}{2}}z_n-Bz_0\|\to 0 \quad (n\to\infty)$$

从而

$$\|z_n-z_m\|=\|B(z_n-z_m)\|\to 0 \quad (n, m\to\infty)$$

因此存在 $z_0'\in(G, [\cdot, \cdot])$，使得$\|z_n-z_0'\|\to 0(n\to\infty)$，即$\|T^{-\frac{1}{2}}z_n-T^{-\frac{1}{2}}z_0'\|\to 0(n\to\infty)$，由极限的唯一性得到$Bz_0=T^{-\frac{1}{2}}z_0'=Bz_0'$，再由$B$是一对一的，便得到$z_0=z_0'\in G$，因此$\mathscr{D}(B)\subset G$. 这样就得到$\mathscr{D}(B)=G$. 证毕.

为了讨论空间不一定完备情况，我们引入

定义 设G是线性空间，$(\cdot, \cdot)$、$[\cdot, \cdot]$是定义在G上的两个内积，由它们所导出的范数分别是$\|\cdot\|$、$|\cdot|$，如果任何既按$|\cdot|$，也按$\|\cdot\|$为基本的点列$\{x_n\}$，都能由按一个范数收敛于零推出按另一个范数收敛于零，那末称$|\cdot|$与$\|\cdot\|$符合①.

这里的符合性主要是用来保证按$|\cdot|$和$\|\cdot\|$都是基本的点列，如果按$|\cdot|$有极限x(可能不一定有)，按$\|\cdot\|$有极限x'(可能不一定有)，那末x和x'之间的对应是一对一的. 它是研究同一空间上引入不同范数(拓扑)之间关系或不同空间的嵌入时常用的概念.

特別，当$|\cdot|$在G上强于$\|\cdot\|$时，按$|\cdot|$基本的点列必按$\|\cdot\|$基本. 但$|\cdot|$与$\|\cdot\|$可以不符合.

① 这里的"符合"概念比第五章§4习题16中的"符合"概念要求弱.

例1　取$(H,(\cdot,\cdot))$为复 l^2. $a\in l^2$ 时，有表示式 $a=(a_1,a_2,\cdots)$，且$\sum|a_i|^2<\infty$. 令 l_0 为 l^2中有限个坐标不为零的向量全体，又令$f=(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots)\in l^2$. 取

$$G=\{\alpha f+\beta\varphi\mid\varphi\in l_0,\alpha、\beta\text{是复数}\}\tag{11.31}$$

在G上引入新内积$[\cdot,\cdot]$(读者不难验证是内积):

$$[\alpha f+\beta\varphi,\gamma f+\delta\varphi']=\alpha\bar{\gamma}(f,f)+\beta\bar{\delta}(\varphi,\varphi')\tag{11.32}$$

因此

$$|\!|\!|\alpha f+\beta\varphi|\!|\!|^2=|\alpha|^2\|f\|^2+|\beta|^2\|\varphi\|^2\tag{11.33}$$

由于

$$\begin{aligned}&(\alpha f+\beta\varphi,\alpha f+\beta\varphi)\\&=|\alpha|^2\|f\|^2+|\beta|^2\|\varphi\|^2+(\alpha f,\beta\varphi)+(\beta\varphi,\alpha f)\\&\leqslant2(|\alpha|^2\|f\|^2+|\beta|^2\|\varphi\|^2)=2|\!|\!|\alpha f+\beta\varphi|\!|\!|^2\end{aligned}\tag{11.34}$$

由(11.34)可知$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$强于$\|\cdot\|$，并且对任何$x\in G$,

$$|\!|\!|x|\!|\!|\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|$$

取 $\varphi_n=(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},0,0,\cdots)$, $n=1,2,\cdots$, 易知G中点列$\{f-\varphi_n\}$按$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$是基本的，并且$\|f-\varphi_n\|\to0$, 然而

$$|\!|\!|f-\varphi_n|\!|\!|^2=\|f\|^2+\|\varphi_n\|^2\to2\|f\|^2\neq0$$

所以$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$与$\|\cdot\|$并不符合

引理4　设G_0是 Hilbert 空间$(H,(\cdot,\cdot))$的线性子空间，在G_0上又有一个新内积$[\cdot,\cdot]$，由它导出的范数$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$在G_0上强于$\|\cdot\|$. 如果$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$与$\|\cdot\|$是符合的，那末必存在H的线性子空间 $G\supset G_0$，使得$[\cdot,\cdot]$可以延拓到G上，并且$(G,[\cdot,\cdot])$是 Hilbert 空间.

证　设$\{x_n\}$是内积空间$(G_0,[\cdot,\cdot])$上的基本点列，由于$|\!|\!|\cdot|\!|\!|$强于$\|\cdot\|$，所以$\{x_n\}$按$\|\cdot\|$是基本的，因而存在唯一的$z\in H$，使得

$\|x_n-z\|\to 0(n\to\infty)$. 规定

$$|z|'=\lim_{n\to\infty}|x_n| \tag{11.35}$$

如果另有$(G_0,[\cdot,\cdot])$上基本点列$\{x'_n\}$，并且按$\|\cdot\|$也收敛于 z 时，那末$(G_0,[\cdot,\cdot])$上基本点列$\{x_n-x'_n\}$将按$\|\cdot\|$收敛于零. 由于假设$|\cdot|$与$\|\cdot\|$是符合的，所以$\|x_n-x'_n\|\to 0$，即

$$|z|'=\lim_{n\to\infty}|x_n|=\lim_{n\to\infty}|x'_n| \tag{11.36}$$

这就是说 z 的函数$|z|'$不依赖于$(G_0,[\cdot,\cdot])$上基本点列的选取. 令

$$G=\{z\,|\,存在(G_0,[\cdot,\cdot])中基本点列\{x_n\},\ 使得\|x_n-z\|\to 0\}$$

显然，对任何 $z\in G_0$，$|z|'=|z|$，而$|\cdot|'$是定义在 G 上的泛函，因而$|\cdot|'$是$|\cdot|$在 G 上的延拓.

由于$|\cdot|'$是由$|\cdot|$按极限(11.35)方式定义的，而$|\cdot|$是G_0上由内积$[\cdot,\cdot]$产生的，并且强于$\|\cdot\|$，因此下列事实成立：

(i) G是线性空间；

(ii) $|\cdot|'$是 G 上的范数；

(iii) $|\cdot|'$在 G 上满足平行四边形公式，从而由$|\cdot|'$可以产生 G 上唯一的内积$[\cdot,\cdot]'$，由$[\cdot,\cdot]'$导出的范数是$|\cdot|'$；

(iv) $|x|'\geqslant\alpha\|x\|$在 G 上成立.

显然，剩下的只要证明$(G,[\cdot,\cdot]')$是完备空间就可以了.

先证 G_0 在$(G,[\cdot,\cdot]')$中稠密：对任何 $z\in G$，按定义存在$(G_0,[\cdot,\cdot])$中基本点列$\{x_n\}$，并且有$\|x_n-z\|\to 0$. 由此可知对任何固定的自然数 k，点列$\{x_n-x_k\}$是$(G_0,[\cdot,\cdot])$中的基本点列，并且$\|(x_n-x_k)-(z-x_k)\|\to 0(n\to\infty)$，按定义(11.35)有

$$|z-x_k|'=\lim_{n\to\infty}|x_n-x_k| \tag{11.37}$$

由于$\{x_n\}$是$(G_0,[\cdot,\cdot])$中基本点列，因此对任何 $\varepsilon>0$，必存在k_0，

当 $k\geqslant k_0$ 时，$\|x_n-x_k\|<\varepsilon$. 再由(11.37)可知存在 $x_k\in G_0$, 使得

$$\|z-x_k\|'\leqslant\varepsilon \tag{11.38}$$

这就是说 G_0 在$(G,[\cdot,\cdot]')$上稠密.

再证$(G,[\cdot,\cdot]')$的完备性：设$\{z_n\}$是$(G,[\cdot,\cdot]')$中的基本点列，对每个n，取 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$, $z=z_n$, $n=1,2,\cdots$, 由(11.38)存在$y_n\in G_0$, 使得

$$\|z_n-y_n\|'\leqslant\frac{1}{n}, \tag{11.39}$$

由于

$$\begin{aligned}\|y_n-y_m\|&=\|y_n-y_m\|'\\&\leqslant\|y_n-z_n\|'+\|z_n-z_m\|'+\|z_m-y_m\|'\\&\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\|z_n-z_m\|'\end{aligned}$$

立即知道$\{y_n\}$是$(G_0,[\cdot,\cdot])$上基本点列，记$\{y_n\}$按$\|\cdot\|$的极限为z, 由(11.38)(x_k被这里的y_k代替)就得到

$$\lim_{k\to\infty}\|z-y_k\|'=0 \tag{11.40}$$

再用(11.39)立即就有

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n-z\|'=0$$

这就是说$(G,[\cdot,\cdot]')$是完备的，证毕.

显然，引理 4 的实质不过是将内积空间$(G_0,[\cdot,\cdot])$的完备化空间与$(G,[\cdot,\cdot])$同构.

利用引理3、4，不难证明“半有界”算子必有自共轭扩张.

定义　设A是 Hilbert 空间H上稠定算子，如果存在实数α, 使对一切$x\in\mathscr{D}(A)$,

$$(Ax,x)\geqslant\alpha(x,x)\quad(\text{或}(Ax,x)\leqslant\alpha(x,x))$$

称A是**下半(或上半)有界**。如果$\alpha>0$，称A为**正定算子**(或如果

$\alpha<0$，称为**负定算子**），并称 α 为 A 的**下界**（或**上界**）。

定理 3 (K. Friedrichs) 复 Hilbert空间 $(H,(\cdot,\cdot))$ 上任何下（上）半有界算子必有自共轭扩张，并且可以做到保持下（上）界不变。

证 当 A 是上半有界时，$-A$ 便是下半有界，又显然 A 有自共轭扩张的充要条件是 $-A$ 有自共轭扩张，因此，只要在 A 为下半有界的假设下证明定理成立即可。又如果 α 是 A 的一个下界，任取 γ，使得 $\gamma+\alpha>0$，那末 $A+\gamma I$ 便是正定算子。又因为 A 有自共轭扩张的充要条件是 $A+\gamma I$ 有自共轭扩张，所以我们又不妨假设 A 的下界 α 是正数。

记 $G_0=\mathscr{D}(A)$，在 G_0 上引入新内积 $[\cdot,\cdot]$：

$$[x,y]=(Ax,y),\quad x、y\in G_0 \tag{11.41}$$

由于 $\alpha>0$，易知 $[\cdot,\cdot]$ 是内积，而且由它产生的范数 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ 在 G_0 上强于 $\|\cdot\|$，并且

$$|\!|\!|x|\!|\!|\geqslant\sqrt{\alpha}\,\|x\|,\quad x\in G_0 \tag{11.42}$$

现证 $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ 与 $\|\cdot\|$ 符合：设 $\{x_n\}$ 是 $(G_0,[\cdot,\cdot])$ 上的基本点列，如果 $\|x_n\|\to0$，那末，对一切 $x\in G_0$，

$$[x,x_n]=(Ax,x_n)\to0\quad(n\to\infty) \tag{11.43}$$

并且对任何 $\varepsilon>0$，存在 n_0，当 $n,m\geqslant n_0$ 时，

$$|[x_n,x_n-x_m]|\leqslant M|\!|\!|x_n-x_m|\!|\!|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{11.44}$$

其中 $M=\sup\limits_n|\!|\!|x_n|\!|\!|<\infty$。就对上述 $\varepsilon>0$，并且对每个固定的自然数 $n(\geqslant n_0)$，由(11.43)知道必存在 $m(n)$，当 $m\geqslant m(n)$ 时，

$$|[x_n,x_m]|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{11.45}$$

因此当 $n\geqslant n_0$ 时，

$$|\!|\!|x_n|\!|\!|^2=[x_n,x_n]\leqslant|[x_n,x_n-x_m]|+|[x_n,x_m]|<\varepsilon \tag{11.46}$$

即$\lim_{n\to\infty}|x_n|^2=0$.

而由$|x_n|\to 0$推出$\|x_n\|\to 0$是显然的. 所以$|\cdot|$与$\|\cdot\|$符合.

证A有自共轭扩张: 根据引理4, $[\cdot,\cdot]$可以延拓到G上,并使$(G,[\cdot,\cdot])$成为 Hilbert 空间, 在G上仍成立$|x|\geqslant\sqrt{\alpha}\|x\|$. 再由引理3, 存在以$G$为定义域的闭算子$B$, B^{-1}是全空间$(H,(\cdot,\cdot))$定义的有界线性算子, 并且

$$[x,y]=(Bx,By),\quad x、y\in G$$

$$\|B^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tag{11.47}$$

由于对任何x、$y\in G_0(=\mathscr{D}(A))$, $(Ax,y)=[x,y]$, 而G_0在$(G,[\cdot,\cdot])$中是稠密的, 所以对任何$y\in G$, 总有$\{y_n\}\subset G_0$, 使得$|y_n-y|\to 0$, 自然更有$\|y_n-y\|\to 0$. 利用连续性, 便得到

$$(Ax,y)=\lim_{n\to\infty}(Ax,y_n)=\lim_{n\to\infty}[x,y_n]=[x,y],$$

$$x\in G_0,\qquad y\in G$$

从而对一切$x\in G_0$, $y\in G$,

$$(Ax,y)=(Bx,By) \tag{11.48}$$

特别取$y\in\mathscr{D}(B^*B)$, 由(11.48)得到

$$(Ax,y)=(x,B^*By),\ x\in\mathscr{D}(A),\ y\in\mathscr{D}(B^*B)$$

这说明$x\in\mathscr{D}(B^*B)$, 并且$Ax=(B^*B)^*x=B^*Bx$, 所以$A\subset B^*B$, 即A有自共轭扩张.

再证下界不变: 由于$\|B^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, 所以对任何$y\in\mathscr{D}(B^*B)$,

$$(B^*By,y)=\|By\|^2\geqslant\alpha\|y\|^2=\alpha(y,y)$$

即α仍是B^*B的下界. 证毕.

3. 广义谱系的扩张谱系　现在考察另外的一种扩张.

设S是复 Hilbert 空间H上的对称算子, (m,n)是S的亏指数(可以是无限的), 并且$m\neq n$, 这时, S在H上不可能有自共轭扩

张. 但是如果允许空间H可以扩大成H', 即$H'\supset H$(为简单起见, H'上内积仍用$(\cdot,\cdot)$), S在H'上就可能有自共轭的扩张. 例如取$H'=H\oplus H$, 在H'上作算子

$$S': \{x, y\}\longmapsto\{Sx, -Sy\}, \{x, y\}\in H'=H\oplus H^{①}$$

易知S'是H'上的稠定线性算子, 并且是对称的, 而亏指数是$(m+n, m+n)$, 所以S'在H'上必有自共轭扩张A, 因此$S\subset S'\subset A$.

如果令

$$A=\int\lambda dE_\lambda$$

是A在H'上的谱分解, P是H'到H的投影算子. 那末, 对任何$x\in\mathscr{D}(S)$, $\eta\in H$, 我们有

$$(Sx, y)=(Ax, Py)=\int\lambda d(E_\lambda x, Py)$$

$$=\int\lambda d(PE_\lambda x, y),$$

$$\|Sx\|^2=\|Ax\|^2=\int\lambda^2 d(E_\lambda x, x)=\int\lambda^2 d(PE_\lambda x, x)$$

如记$B_\lambda=PE_\lambda(\lambda\in(-\infty, \infty))$, 并把$B_\lambda$仅限制定义在$H$上, 那末$\{B_\lambda|\lambda\in(-\infty, \infty)\}$便是$H$上一族有界自共轭算子($B_\lambda$的自共轭性可以直接验证), 并且还满足

(i) $B_\lambda\leqslant B_\mu$, $\lambda\leqslant\mu$;

(ii) $B_{\lambda+0}=B_\lambda$;

(iii) (强) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}B_\lambda=0$, (强) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}B_\lambda=I$.

通常称 Hilbert 空间H上具有性质(i)—(iii)的一族范数不超过 1 的自共轭算子$\{B_\lambda|\lambda\in(-\infty, \infty)\}$为$H$上的广义谱系.

这样, 复 Hilbert 空间H上的任何对称算子S, 总存在H上的广义谱系$\{B_\lambda|\lambda\in(-\infty, \infty)\}$使得

---

① 这里把直交和$x+y(x\in H, y\in H)$写成二维形式$\{x, y\}$是为了叙述上的方便

$$(Sx, y)=\int\lambda d(B_\lambda x, y),\quad \|Sx\|^2=\int\lambda^2 d(B_\lambda x, x),$$
$$x\in\mathscr{D}(S),\ y\in H \tag{11.49}$$

现在要问：是否任何满足(11.49)的广义谱系 $\{B_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$ 必是 S 的某个自共轭扩张(允许空间扩大) A 的(投影算子)谱系在 H 上投影所得到的？这个问题已被 M. A. Наймарк 解决了，并且这一事实也被推广成所谓 *-半群的表示定理，它是更具有普遍意义的定理(下面我们将能看到这一点)。

定义　设 Γ 是一集合，在 Γ 上有两个运算：

乘法：$(\xi, \eta)\longmapsto\xi\eta,\quad \xi、\eta\in\Gamma$

*运算：$\xi\longmapsto\xi^*,\quad \xi\in\Gamma$

其中乘法满足结合律，*运算满足

$$\xi^{**}=\xi,\quad (\xi\eta)^*=\eta^*\xi^*,\quad \xi、\eta\in\Gamma$$

称 Γ 是 ***-半群**.

此外，我们总假定所讨论的*-半群是具有幺元(也称单位元) e 的：

$$e^*=e,\quad e\xi=\xi e=\xi,\quad \xi\in\Gamma$$

例如 Γ 是一个群，规定 $\xi^*=\xi^{-1}$ 时，Γ 就是具有幺元的*-半群. 又如 $\Gamma=\mathfrak{B}(H\to H)$，其中 H 是 Hilbert 空间，规定 Γ 上乘法、*运算就是普通算子的乘法和*运算，这时 Γ 也是具有幺元的*-半群.

定义　设 Γ 是具有幺元的*-半群，$\{D_\xi|\xi\in\Gamma\}$ 是 Hilbert 空间 H' 上一族有界线性算子，如果对任何 $\xi、\eta\in\Gamma$，满足

$$D_e=I,\quad D_{\xi\eta}=D_\xi D_\eta,\quad D_{\xi^*}=D_\xi^*,$$

称 $\{D_\xi|\xi\in\Gamma\}$ (简记为 D_ξ) 是*-半群 Γ 在 H' 上的一个**表示**.

显然，一个*-半群的表示 D_ξ 具有如下性质：

(i) 当 $\xi^*\xi=\xi\xi^*$ 时，D_ξ 是 H' 上的正常算子；

(ii) 当$\xi=\xi^*$时，D_ξ是H'上的自共轭算子；

(iii) 当$\xi=\xi^*=\xi^2$时，D_ξ是H'上的投影算子；

(iv) 当$\xi^*\xi=\xi\xi^*=e$时，D_ξ是H'上的酉算子.

如果H是H'的闭子空间，D_ξ是*-半群Γ在H'上的表示，P是H'到H的投影，对每个$\xi\in\Gamma$，作$H'\to H$的算子T_ξ:

$$T_\xi=PD_\xi$$

易知T_ξ满足

(i)′ $T_e=I$, $T_{\xi^*}=T_\xi^*$;

(ii)′ (正定性)对任一族$\{x_\xi|\xi\in\Gamma$，但最多只有有限个ξ_1、…、ξ_n，使得$x_{\xi_i}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)\}$，必有

$$\sum_{\xi,\eta}(T_{\xi^*\eta}x_\eta, x_\xi)①\geqslant 0$$

事实上，如记$x=\sum\limits_\xi D_\xi x_\xi$，那末

$$\sum_{\xi,\eta}(T_{\xi^*\eta}x_\eta, x_\xi)=\sum_{\xi,\eta}(D_{\xi^*\eta}x_\eta, x_\xi)$$

$$=\sum_{\xi,\eta}(D_\xi^*D_\eta x_\eta, x_\xi)=(x,x)\geqslant 0$$

(iii)′ 对任何一族$\{x_\xi|\xi\in\Gamma\}$，但除去有限个$\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$外，$x_\xi=0$，以及任何$\alpha\in\Gamma$，必有仅依赖于α的常数C_α，使得

$$\sum_{\xi,\eta}(T_{\xi^*\alpha^*\alpha\eta}x_\eta, x_\xi)\leqslant C_\alpha^2\sum_{\xi,\eta}(T_{\xi^*\eta}x_\eta, x_\xi)$$

事实上，用(ii)′中记号，易于算得

$$\sum_{\xi,\eta}(T_{\xi^*\alpha^*\alpha\eta}x_\eta, x_\xi)=(D_\alpha x\quad D_\alpha x)\leqslant\|D_\alpha\|^2(x,x)$$

取$C_\alpha=\|D_\alpha\|$就可以了.

下面证明上述事实的逆也成立，即有如下的*-半群表示定

① 因为除有限个ξ_1、…、ξ_n，$x_{\xi_i}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，所以和式实质上是有限项和.

理.

定理 5 设Γ是具有幺元的$*$-半群，$\{T_\xi \mid \xi\in\Gamma\}$是 Hilbert 空间$H$上一族有界线性算子，并满足条件[①](i)′—(iii)′，那末必存在 Hilbert 空间 $H'\supset H$，以及在 H' 上的表示 D_ξ，使得在H上成立

$$T_\xi = PD_\xi \tag{11.50}$$

如果 H'还是极小的扩张空间（即$\overline{\mathrm{Span}}\{D_\xi f \mid \xi\in\Gamma,\ f\in H\}=H'$），$H'$、$D_\xi$ 在除去一个酉同构外完全由$\{T_\xi \mid \xi\in\Gamma\}$唯一确定，并且还成立下列结论

(1°) $\|D_\alpha\|\leqslant C_\alpha$, $\alpha\in\Gamma$;

(2°) 如果 $T_{\xi\alpha\eta}=T_{\xi\beta\eta}+T_{\xi\gamma\eta}$ 对固定的 α、β、γ 和一切 ξ、$\eta\in\Gamma$ 成立时，那末就有

$$D_\alpha = D_\beta + D_\gamma$$

(3°) 如果（弱）$\lim\limits_{n\to\infty} T_{\xi\alpha_n\eta}=T_{\xi\alpha\eta}$ 对一切 ξ、$\eta\in\Gamma$ 成立，并且$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} C_{\alpha_n}<\infty$，那末就有

$$(\text{弱})\lim_{n\to\infty} D_{\alpha_n} = D_\alpha$$

证 将分成几步来证明.

(I) 作空间 H' X表示H上向量族$f=\{x_\xi \mid \xi\in\Gamma\}$的全体，$x_\xi$称为$f$ 的第 ξ 坐标，又常记为 f_ξ. 在X中规定两个元f、$g\in X$的线性组合 $\alpha f+\beta g$（α、β 是任意的两个数）为

$$(\alpha f+\beta g)_\xi = \alpha f_\xi + \beta g_\xi$$

易知X成为线性空间. X_0表示X中除有限个坐标不是零外，其余都是零向量族全体，显然 X_0 是X的线性子空间.

---

① 在H是复空间情况下，(i)′中条件 $T_{\xi^*}=T_\xi^*$ 可由(ii)′推得. 事实上，对任何$\xi\in\Gamma$，取 x_η：当$\eta=e$ 时，$x_\eta=x$；当 $\eta=\xi$ 时，$x_\eta=\lambda y$；其余的η，$x_\eta=0$. 由 (ii)′得到

$$(x,x)+\bar\lambda(T_{\xi^*}x,y)+\lambda(T_\xi y,x)+\lambda\bar\lambda(T_{\xi^*\xi}y,y)\geqslant 0$$

特别取 $x=0$，就得到对任何 $y\in H$，$(T_{\xi^*\xi}y,y)\geqslant 0$. 再令 $\lambda=1$、i，分别得到 $\mathrm{Im}(T_{\xi^*}x,y)=-\mathrm{Im}(T_\xi y,x)$，$\mathrm{Re}(T_{\xi^*}x,y)=\mathrm{Re}(T_\xi y,x)$. 从而$(T_{\xi^*}x,y)=(x,T_\xi y)$，即$T_{\xi^*}=T_\xi^*$.

对于 $x\in H$，我们把 x 和 X 中向量族

$$\{x_\eta \mid x_e=x,\ x_\eta=0(\eta\neq e)\}$$

相对应，易知这种对应是 H 到 X_0 的一对一的线性映照．在这种线性同构下，H 可以视为 X 的线性子空间．

X 中一切下列 $f=\{f_\xi \mid \xi\in\Gamma\}$ 的全体记为 $\widehat{X}_0$，

$$f_\xi=\sum_\eta T_{\xi^*,\eta}x_\eta,\quad \{x_\eta \mid \eta\in\Gamma\}\in X_0$$

显然 $\widehat{X}_0$ 是 X 的线性子空间．又记 $f=\widehat{\{x_\eta\}}$．在 $\widehat{X}_0$ 中引入泛函 $[\cdot,\cdot]$：当 $f=\widehat{\{x_\eta\}}$，$g=\widehat{\{y_\eta\}}$ 时，规定

$$[f,g]=\sum_\xi(f_\xi,y_\xi)=\sum_{\xi,\eta}(T_{\xi^*\eta}x_\eta,y_\xi)$$

$$=\sum_{\xi,\eta}(x_\eta,T_{\eta^*\xi}y_\xi)=\sum_\eta(x_\eta,g_\eta)\tag{11.51}$$

由(11.51)易知 $[\cdot,\cdot]$ 不依赖于 $f=\widehat{\{x_\eta\}}$，$g=\widehat{\{y_\eta\}}$ 中 $\{x_\eta\}$，$\{y_\eta\}$ 的选取，即 $[f,g]$ 的值由 f、g 完全确定．显然 $[\cdot,\cdot]$ 是双线性泛函．但由于条件(2°)，对一切 $f\in\widehat{X}_0$ 有

$$[f,f]=\sum_{\xi,\eta}(T_{\xi^*\eta}x_\eta,x_\xi)\geqslant 0\tag{11.52}$$

因而在 $\widehat{X}_0$ 上可用 Schwartz 不等式，得到

$$|[f,g]|^2\leqslant[f,f][g,g],\quad f、g\in\widehat{X}_0\tag{11.53}$$

如果 $[f,f]=0$，那末对一切 $g\in\widehat{X}_0$，$[f,g]=0$，从(11.51)便知道只有 $f=0$，即 $[\cdot,\cdot]$ 是 $\widehat{X}_0$ 上的内积．

记 $\widehat{X}_0$ 的完备化空间为 H'，H' 上内积仍记为 $[\cdot,\cdot]$，相应的范数记为 $\|\cdot\|$．

(II) 视 H' 为 H 的扩张空间 对任何 $x\in H(\subset X_0)$，作 H' 中元 f_x：

$$f_x=\{f_\xi \mid f_\xi=T_{\xi^*}x,\ \xi\in\Gamma\}$$

显然 $f_x\in\widehat{X}_0$，并且

$$x \longmapsto f_x \tag{11.54}$$

是 $H \to H'$ 的一对一的线性映照，而且对任何 $x、y \in H(\subset X_0)$

$$[f_x, f_y] = \sum_{\xi,\eta} (T_{\xi^*\eta} x_\eta, y_\xi) = (x, y)$$

即 $x \to f_x$ 是 H 到 $\widehat{X}_0$ 的子集保范同构，今后不再区分 x 和 f_x，这样便有

$$H \subset \widehat{X}_0 \subset H' \tag{11.55}$$

(III) 算出 H' 在 H 上的投影　令 P 表示 H' 在 H 上投影. 对任何 $g \in \widehat{X}_0$, $g = \{\widehat{y_\eta}\}$, $x \in H$,

$$[Pg, x] = [g, x] = \sum_{\xi,\eta} (T_{\xi^*\eta} y_\eta x_\xi)$$

$$= \sum_{\eta} (T_{e\eta} y_\eta, x) = (g_e, x) = [g_e, x]$$

因此，对任何 $g \in \widehat{X}_0$,

$$Pg = g_e \tag{11.56}$$

(IV) 作 D_ξ　设 $f \in \widehat{X}_0$, $f = \{\widehat{x_\eta}\}$, 即

$$f = \{f_\xi \mid f_\xi = \sum_{\eta} T_{\xi^*\eta} x_\eta, \xi \in P\}$$

因而对任何 $\alpha \in \Gamma$,

$$f_{\alpha^*\xi} = \sum_{\eta} T_{\xi^*\alpha\eta} x_\eta = \sum_{\zeta} T_{\xi^*\zeta} x_\zeta^\alpha, \quad x_\zeta^\alpha = \sum_{\alpha\eta=\zeta} x_\eta$$

如果不存在 η，使得 $\alpha\eta = \zeta$，那末对这个 ζ，规定 $x_\zeta^\alpha = 0$. 由于 $\{x_\eta\} \in X_0$，易知 $\{x_\zeta^\alpha\} \in X_0$，从而 $\{f_{\alpha^*\xi} \mid \xi \in \Gamma\} \in \widehat{X}_0$. 这就是说 $\widehat{X}_0$ 关于"移动 $\alpha(\alpha \in \Gamma)$"是不变的. 在 $\widehat{X}_0$ 中定义"移动"算子

$$D_\alpha: \{f_\xi \mid \xi \in \Gamma\} \longmapsto \{f_{\alpha^*\xi} \mid \xi \in \Gamma\}, \alpha \in \Gamma$$

显然，对每个 α, D_α 是 $\widehat{X}_0$ 上的线性算子，并且满足

a) $D_e\{f_\xi \mid \xi \in \Gamma\} = \{f_{e^*\xi} \mid \xi \in \Gamma\} = \{f_\xi \mid \xi \in \Gamma\}$;

b) $D_\alpha D_\beta \{f_\xi \mid \xi \in \Gamma\} = D_\alpha \{f_{\beta^*\xi} \mid \xi \in \Gamma\} = \{f_{\beta^*\alpha^*\xi} \mid \xi \in \Gamma\}$

$$=D_{\alpha\beta}\{f_\xi\mid\xi\in\Gamma\}$$

c) 当 $f=\widehat{\{x_\eta\}}$, $g=\widehat{\{y_\eta\}}$时,

$$[D_\alpha f, g]=\sum_\xi (f_{\alpha^*\xi}, y_\xi)=\sum_{\xi,\eta}(T_{\xi^*\alpha\eta}x_\eta, y_\xi)$$

$$=\sum_{\xi,\eta}(x_\eta, T_{\eta^*\alpha^*\xi}y_\xi)=[f, D_{\alpha^*}g]$$

d) 利用条件(iii)′, 有

$$[D_\alpha f, D_\alpha f]=[D_{\alpha^*}D_\alpha f, f]=[D_{\alpha^*\alpha}f, f]$$

$$=\sum_{\xi,\eta}(T_{\xi^*\alpha^*\alpha\eta}x_\eta, x_\xi)\leqslant C_\alpha^2\sum_{\xi,\eta}(T_{\xi^*\eta}x_\eta, x_\xi)$$

$$=C_\alpha^2[f, f]$$

性质d, 说明D_α是$\widehat{X}_0$上有界算子, 并且

$$\|D_\alpha\|\leqslant C_\alpha$$

利用$\widehat{X}_0$在H'中的稠密性, D_α可唯一地延拓(并且保持范数不变)到H'上, 并且在H'上仍具有 a)—d)四个性质, 这就是说 D_α是Γ在H'上的一个表示.

(V) 证明 $PD_\alpha=T_\alpha$. 对任何 $x\in H$, 作为H'中元, x 就是$f_x=\{T_{\xi^*}x\mid\xi\in\Gamma\}$, 因而

$$PD_\alpha f_x=PD_\alpha\{T_{\xi^*}x\mid\xi\in\Gamma\}=P\{T_{(\alpha^*\xi)^*}x\mid\xi\in\Gamma\}$$

$$=P\{T_{\xi^*\alpha}x\mid\xi\in\Gamma\}$$

$$=T_\alpha x$$

所以在H上, $PD_\alpha=T_\alpha$.

(VI) 证明H'的极小性. 对一切 $f=\widehat{\{x_\eta\}}\in\widehat{X}_0$, 由于

$$f_\xi=\sum_\eta T_{\xi^*\eta}x_\eta=\sum_\eta(D_\eta f_{x_\eta})_\xi=(\sum_\eta D_\eta f_{x_\eta})_\xi,$$

即$f=\{f_\xi\mid\xi\in\Gamma\}=\sum_\eta D_\eta f_{x_\eta}$, 换句话说, f 是集$\{D_\eta f_{x_\eta}\mid\eta\in\Gamma, f_{x_\eta}\in H\}$中有限个元的线性组合, 从而$H'=\overline{\text{span}}\{D_\eta f_{x_\eta}\mid\eta\in\Gamma, f_{x_\eta}\in H\}$,

即 H' 是极小的扩张空间.

(VII) 证明(1°)—(3°)成立　由d)可直接得到(1°). 设 $T_{\xi\alpha\eta} = T_{\xi\beta\eta} + T_{\xi\gamma\eta}$ 成立,因此对任何 $f = \widehat{\{x_\eta\}}$, $g = \widehat{\{y_\eta\}}$, $\alpha \in \Gamma$,

$$[D_\alpha f, g] = \sum_{\xi,\eta} (T_{\xi^*\alpha\eta} x_\eta, y_\xi)$$

$$= \sum_{\xi,\eta} ((T_{\xi^*\beta\eta} + T_{\xi^*\gamma\eta}) x_\eta, y_\xi) = [D_\beta f, g] + [D_\gamma f, g]$$

利用 $\widehat{X}_0$ 在 H' 中的稠密性以及(1°)成立,由上式立即知道(2°)成立.

假设(弱) $\lim\limits_{n\to\infty} T_{\xi\alpha_n\eta} = T_{\xi\alpha\eta}$ (ξ、$\eta \in \Gamma$),并且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} C_{\alpha_n} < \infty$, 因此对任何 $f = \widehat{\{x_\eta\}}$, $g = \widehat{\{y_\eta\}}$,

$$\lim_{n\to\infty} (D_{\alpha_n} f, g) = (D_\alpha, f, g)$$

再由 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|D_{\alpha_n}\| < \infty$ 立即推知上式对一切 f、$g \in H'$ 成立, 即(3°)成立.

(VIII) 证明极小扩张必酉同构　假设 $H \subset H'$, $H \subset H''$, Γ 在 H'、H'' 上分别有表示 D'_α、D''_α ($\alpha \in \Gamma$),并且 H' 对 (H, D'_α) 是极小的,H'' 对 (H, D''_α) 也是极小的,并且 $P'D'_\alpha = T_\alpha = P''D''_\alpha$ 在 H 上成立,此地 P'、P'' 分别是 H'、H'' 在 H 上的投影. 对任何 $\{x_\eta | \eta \in \Gamma\}$、$\{y_\eta | \eta \in \Gamma\} \in X_0$, 分别记

$$f' = \sum_\eta D'_\eta x_\eta, \quad f'' = \sum_\eta D''_\eta x_\eta$$

$$g' = \sum_\eta D'_\eta y_\eta, \quad g'' = \sum_\eta D''_\eta y_\eta$$

$[\cdot,\cdot]'$、$[\cdot,\cdot]''$ 分别表示 H'、H'' 上内积, 那末

$$[f', g']' = \sum_{\xi,\eta} [D'_\eta x_\eta, D'_\xi y_\xi]' = \sum_{\xi,\eta} [D'_\xi{}^* D'_\eta x_\eta, y_\xi]'$$

$$= \sum_{\xi,\eta} [D'_{\xi^*\eta} x_\eta, y_\xi]' = \sum_{\xi,\eta} [P'D'_{\xi^*\eta} x_\eta, y_\xi]'.$$

$$=\sum_{\xi,\eta}(T_{\xi^*\eta}x_\eta, y_\xi) \tag{11.57}$$

同样可证

$$[f'', g'']'' = \sum_{\xi,\eta}(T_{\xi^*\eta}x_\eta, y_\xi) \tag{11.58}$$

如果令H'中f'与H''中f''相对应，显然从(11.57)、(11.58)知道这是单值映照并且是保范的，从而是一对一的．再由于

$$\overline{\text{span}}\{f' \mid f' = \sum_\eta D'_\eta x_\eta, \{x_\eta \mid \eta\in\Gamma\}\in X_0\} = H'$$

$$\overline{\text{span}}\{f'' \mid f'' = \sum_\eta D''_\eta x_\eta, \{x_\eta \mid \eta\in\Gamma\}\in X_0\} = H''$$

因此$f' \longmapsto f''$可以延拓成$H'\to H''$上的酉算子，记它为U．因此对任何$f' = \sum_\eta D'_\eta x_\eta$, $\alpha\in\Gamma$,

$$U^{-1}D''_\alpha Uf' = U^{-1}D''_\alpha\left(\sum_\eta D''_\eta x_\eta\right) = U^{-1}\sum_\eta D''_{\alpha\eta}x_\eta$$

$$= U^{-1}\sum_\zeta D''_\zeta x^\alpha_\zeta = \sum_\zeta D'_\zeta x^\alpha_\zeta$$

$$= \sum_\eta D'_{\alpha\eta}x_\eta = D'_\alpha f'$$

$$\left(\text{其中} x^\alpha_\zeta = \sum_{\alpha\eta=\zeta} x_\eta\right)$$

即$U^{-1}D''_\alpha U = D'_\alpha$在$H'$的稠密集上成立，再由$D'_\alpha$、$D''_\alpha(\alpha\in\Gamma)$的连续性便得到

$$U^{-1}D''_\alpha U = D'_\alpha, \quad \alpha\in\Gamma$$

在H'上成立，即(D'_α, H')与(D''_α, H'')是酉等价．证毕．

下面是一个重要的特例．

系 1　设Γ是一个群，$*$运算是：$\xi^* = \xi^{-1}(\xi\in\Gamma)$．当$T_\xi(\xi\in\Gamma)$

满足(i)′、(ii)′条件时，必存在扩张空间 $H'\supset H$，以及Γ在H'上的酉表示D_ξ(即D_ξ是H'上酉算子)，使得定理 5 的结论成立.

证 当Γ是群，并取$\xi^*=\xi^{-1}$时，(iii)′将自动地被满足(其实，取$C_a=1$，此时 (iii)′变成等式). 由定理 5 立即就得到本系. 证毕.

假设Γ是拓扑群(即Γ既是群，又是Hansdorff拓扑空间，并且群运算关于拓扑是连续的). $p(\xi)$是定义在Γ上的函数，如果对任意有限个复数z_1、…、z_n和Γ中的元ξ_1、…、ξ_n，都有

$$\sum_{i,j}p(\xi_i^{-1}\xi_j)z_i\bar{z}_j\geqslant 0 \tag{11.59}$$

称$p(\cdot)$是Γ上的**正定函数**.

系 2 对于拓扑群Γ上任何一个非零正定连续函数$p(\cdot)$，必存在复Hilbert空间H，使得

$$p(\xi)=(U_\xi f_0,f_0)$$

其中f_0是某个复 Hilbert 空间H中的向量，U_ξ是Γ在H上的酉表示，并且$\overline{\text{span}}\{U_\xi f_0|\xi\in\Gamma\}=H$. 除去一个酉等价的差别外，$(U_\xi,H)$是由$p(\cdot)$唯一确定的.

证 取$n=2; z_1=1, z_2=\lambda; \xi_1=e, \xi_2=\xi$. 由(11.59)得到

$$p(e)+p(\xi)\bar{\lambda}+p(\xi^{-1})\lambda+\lambda\bar{\lambda}p(e)\geqslant 0 \tag{11.60}$$

再在(11.60)中取λ 分别为1, i, 就得到

$$\overline{p(\xi)}=p(\xi^{-1}),\ \xi\in\Gamma \tag{11.61}$$

当取$\lambda=0$时，由(11.60)得到$p(e)\geqslant 0$. 其实，

$$p(e)>0 \tag{11.62}$$

事实上，如果$p(e)=0$，那末当在(11.60)中取$\bar{\lambda}=-\overline{p(\xi)}$时，便得到$-2|p(\xi)|^2\geqslant 0$. 从而对一切$\xi\in\Gamma$, $p(\xi)=0$，这与$p(\cdot)$是非零的假设相矛盾，所以(11.62)成立.

可用正定函数$p(\cdot)/p(e)$代替$p(\cdot)$，所以下面不妨设正定函数$p(\cdot)$满足$p(e)=1$. 令H_0是一维复欧几里得空间. 对每个$\xi\in\Gamma$，视$T_\xi=p(\xi)$ 为H_0上线性算子，易知$\{T_\xi|\xi\in\Gamma\}$在H_0上满足(i)′—(iii)′. 按定理5，存在Hilbert空间H(即定理5中H')和U_ξ，使本系所有结论成立. 证毕.

特别，当Γ是实直线R^1(视为加法群，拓扑取为通常的拓扑)，利用单参数酉算子群的一般形式(例如参见[16])，存在直线上谱系$\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$，使得

$$U_\xi=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi\lambda}dE_\lambda,\quad \xi\in(-\infty,\infty) \tag{11.63}$$

由此立即又可得到经典调和分析中下面极为重要的结果(也是随机过程理论的重要基础之一)——Bochner定理

系 3 (Bochner) $p(\cdot)$是直线R^1上正定连续函数的充要条件是存在$(-\infty,\infty)$上全有限的勒贝格-斯蒂阶测度g，使得

$$p(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi\lambda}dg(\lambda) \tag{11.64}$$

且使(11.64)成立的测度g是唯一的

证 充分性 直接验证$p(\cdot)$是正定、连续的是很容易的，又显然还有$p(0)=g(+\infty)-g(-\infty)$①

必要性 当$p(\xi)\equiv0$时，取$g(x)\equiv0$即可. 而当$p(\cdot)$不是零函数时，由系2和(11.63)式得到

$$\frac{p(\xi)}{p(0)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi\lambda}d(E_\lambda f_0,f_0)$$

取$g(\lambda)=p(0)(E_\lambda f_0,f_0)$即可.

测度g的唯一性(当然作为点函数的$g(\lambda)$可以相差一个常数)

---

① 这里$g(\pm\infty)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)$. 在$g(x)$是$R^1$上单调增加，并且由$g$产生的勒贝格-斯蒂阶测度是全有限的条件下，易知$\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)$是存在的.

由系 2 中的唯一性容易得到. 证毕.

在历史上, 是先有系3, 然后有系2, 最后才有Nagy所证明的定理5.

现在再利用定理 5 给出 Наймарк 的广义谱系的扩张定理.

定理 6 (Наймарк)　设 $\{B_\lambda | \lambda\in(-\infty, \infty)\}$是 Hilbert 空间 H上广义谱系. 那末必存在 Hilbert 空间$H'(\supset H)$上的谱系$\{E_\lambda | \lambda\in(-\infty, \infty)\}$, 使得

$$B_\lambda = PE_\lambda, \quad \lambda\in(-\infty, \infty)$$

其中P是 H' 在H上的投影. 如果 H' 是极小扩张空间, 即 $H'=\overline{\text{span}}\{E_\lambda f | \lambda\in(-\infty, \infty), f\in H\}$, 那末除去一个酉等价之外, $(H', \{E_\lambda | \lambda\in(-\infty, \infty)\})$是由$\{B_\lambda | \lambda\in(-\infty, \infty)\}$唯一确定的.

证　令$B_\infty = I, B_{-\infty}=0$, $\hat{\mathbf{R}}_0$是$E^1=(-\infty, \infty)$上有限个互不相交区间$(a, b]$$(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$的和所生成的$E^1$上代数.

对任何 $E\in\hat{\mathbf{R}}_0$, 假设$E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Delta_i$, $\Delta_i\cap\Delta_j=\varnothing (i\neq j)$, $\Delta_i=(a_i, b_i]$$(i, j=1, 2, \cdots, n)$, 规定

$$B_E=\sum_i B_{\Delta i}, \quad B_{\Delta i}=B_{b_i}-B_{a_i}\geqslant 0$$

又规定$B_\varnothing=0, B_{E^1}=I$. 这样$B_E$ 是$\hat{\mathbf{R}}_0$上有限可加的算子值集函数, 并且

$$0\leqslant B_E\leqslant I, \quad B_\varnothing=0, \quad B_{E^1}=I$$

$$\text{当}E\cap F=\varnothing\text{时}, B_{E\cup F}=B_E+B_F \tag{11.65}$$

视$\hat{\mathbf{R}}_0$为*-半群　在$\hat{\mathbf{R}}_0$上规定乘法、*运算如下:

$$EF=E\cap F, \qquad E^*=E$$

容易验证它们分别成为$\hat{\mathbf{R}}_0$中乘法和*运算, 显然$\hat{\mathbf{R}}_0$中元E^1是乘法的幺元.

取$T_E=B_E (E\in\hat{\mathbf{R}}_0)$. 现来验证满足条件(i)'—(iii)'. 条件(i)'

是显然满足的，因此只要验证$B_E(E\in\hat{\boldsymbol{R}}_0)$满足(ii)′、(iii)′.

对任意E_1、…、$E_n\in\hat{\boldsymbol{R}}_0$, x_1、…、$x_n\in H$，作集

$$\prod = E_1^{\pm}\cap E_2^{\pm}\cap\cdots\cap E_n^{\pm} \tag{11.66}$$

其中$E^+=E$, $E^-=E^1-E$. 对每个i ($i=1, 2, \cdots, n$)，取定E^+、E^-中的一个，由(11.66)就产生一个集，称为$\prod$型集. 显然，任何两个不同$\prod$型集必互不相交，并且每个$E_i\cap E_j$都可分解成E_i、E_j都取+号的$\prod$型集的和. 固定某个$\prod$型集，记适合$E_i\supset\prod$的i为i_1、…、i_r，那末

$$S_\pi=\sum_{k,h}(B_\pi x_{i_k}, x_{i_h})=(B_\pi x, x),\ x=\sum_k x_{i_k}$$

从而$S_\pi\geqslant 0$. 因此

$$\sum_{i,j}(B_{E_i\cap E_j}x_i,\ x_j)=\sum_\pi S_\pi\geqslant 0$$

即满足(ii)′.

任取$E\in\hat{\boldsymbol{R}}_0$，令

$$E_i'=E_i\cap E,\ E_i''=E_i\cap(E^1-E),\quad i=1, 2, \cdots, n$$

由于$B_{E_i\cap E_j}=B_{E'_i\cap E'_j}+B_{E''_i\cap E''_j}$以及

$$S'=\sum_{i,j}(B_{E'_i\cap E'_j}x_i, x_j)\geqslant 0,$$

$$S''=\sum_{i,j}(B_{E''_i\cap E''_j}x_i, x_j)\geqslant 0$$

立即得到$0\leqslant S'\leqslant S'+S''$，即

$$0\leqslant\sum_{i,j}(B_{E_i\cap E\cap E\cap E_j}x_i, x_j)$$

$$\leqslant\sum_{i,j}(B_{E_i\cap E_j}x_i, x_j)$$

即(iii)′被满足，而且可取$C_E=1$.

根据定理5，存在$H'\supset H$，以及$\hat{\boldsymbol{R}}_0$在H'上的表示$D_E(E\in\hat{\boldsymbol{R}}_0)$，使得对任何$E\in\hat{\boldsymbol{R}}_0$，

$$B_E=PD_E$$

并且$H'=\overline{\text{span}}\{D_Ex\mid E\in\hat{\boldsymbol{R}}_0,\ x\in H\}$.

证$\{D_E\mid E\in\hat{\boldsymbol{R}}_0\}$是$H'$上投影算子族：由于

$$D_E=D_E^*=D_{E\cap E}=D_E^2$$

所以D_E是H'上的投影算子.

作出谱系$\{E_\lambda\mid\lambda\in(-\infty,\infty)\}$：由于

$$D_E=D_{E\cap E^1}=D_{E^1}D_E$$

从而对任何$x\in H$，$D_Ex=D_{E^1}D_Ex$，再从H'的极小性可知$D_{E^1}=I$. 当E、$F\in\hat{\boldsymbol{R}}_0$，并且$E\cap F=\varnothing$时，对任何$K\in\hat{\boldsymbol{R}}_0$，

$$B_{(E\cup F)\cap K}=B_{E\cap K}+B_{F\cap K}$$

利用定理5的(2°)($\alpha=(E\cup F)\cap K,\beta=E\cap K;\gamma=F\cap K$)得到

$$D_{(E\cup F)\cap K}=D_{E\cap K}+D_{F\cap K}$$

$$(\text{或}D_{E\cup F}D_K=D_ED_K+D_FD_K)\tag{11.67}$$

又根据H'的极小性，从(11.67)得到

$$D_{E\cup F}=D_E+D_F\quad(E\cap F=\varnothing)\tag{11.68}$$

特别，当$E=F=\varnothing$时，$D_\phi=D_\phi+D_\phi$，从而$D_\phi=0$. 令

$$E_\lambda=D_{(-\infty,\lambda]},\quad -\infty<\lambda<\infty$$

由(11.68)得到$E_\lambda\leqslant E_\mu(\lambda<\mu)$. 因为$B_{(-\infty,\lambda]}=B_\lambda-B_{-\infty}=B_\lambda$，所以在$H$上

$$B_\lambda=PE_\lambda,\quad -\infty<\lambda<\infty$$

剩下仅需证明

$$\lim_{\lambda\to\mu+0}E_\lambda=E_\mu,\ \lim_{\lambda\to-\infty}E_\lambda=0,\ \lim_{\lambda\to\infty}E_\lambda=I\tag{11.69}$$

为此，我们只要注意到：对任何$F\in\hat{\boldsymbol{R}}_0$，

(弱) $\lim\limits_{\lambda\to\mu+0}B_{(-\infty,\lambda]\cap F}=B_{(-\infty,\mu]\cap F}$

$$(\text{弱})\ \lim_{\lambda\to-\infty} B_{(-\infty,\lambda]\cap F}=0=B_{\varnothing\cap F}$$

$$(\text{弱})\ \lim_{\lambda\to\infty} B_{(-\infty,\lambda]\cap F}=B_{E^1\cap F}$$

应用定理5的(3°)以及H'的极小性，易知(11.69)成立，这样就完成了$\{E_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$是谱系的证明.

除去一个酉等价外，显然(H', E_λ)是由$\{B_\lambda|\lambda\in(-\infty,\infty)\}$唯一确定的. 证毕.

4. 压缩算子的酉膨胀 设T是Hilbert空间H上有界线性算子，如果$\|T\|\leqslant 1$，称T是H上的**压缩算子**①. 显然，压缩算子就是把每个向量x，照出的象Tx的“长度”不变长. P. R. Halmos曾提出并解决了如下的问题：是否存在空间$H'\supset H$，以及H'上的酉算子U，使得

$$T=PU|_H \tag{11.70}$$

这里P是H'在H上的投影.

如果上述H'、U存在，通常称(H', U)是H上压缩算子T的**酉膨胀**. 这种酉膨胀，后来也被Nagy推广，并在此基础上建立了一般压缩算子的理论.

定理7 (Halmos) 复Hilbert空间上压缩算子必存在酉膨胀.

证 取$H'=H\oplus H$. 将H'上算子表示成2×2阵的形式，取

$$U=\begin{pmatrix} T & (I-TT^*)^{\frac{1}{2}} \\ (I-T^*T)^{\frac{1}{2}} & -T^* \end{pmatrix}$$

由于$I-T^*T\geqslant 0$，$I-TT^*\geqslant 0$，所以正平方根$(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}$、$(I-TT^*)^{\frac{1}{2}}$都存在，易知

---

① 在Hilbert空间理论中，“压缩算子”通常指$\|T\|\leqslant 1$，而不是指$\|T\|\leqslant\alpha<1$(见第四章§8的压缩映照).

$$U^*=\begin{pmatrix} T^* & (I-T^*T)^{\frac{1}{2}} \\ (I-TT^*)^{\frac{1}{2}}, & -T \end{pmatrix}$$

经直接计算后立即可得

$$U^*U=I,\quad UU^*=I$$

从而 U 是 H' 上酉算子，并且(11.70)成立．证毕．

习　题

1．设 A 是 Hilbert 空间 H 上闭对称算子，证明：如果 $\mathscr{R}(A)=H$，那末 A^{-1} 必是 H 上有界的自共轭算子(从而 A 是自共轭算子)

2．设 A 是 Hilbert 空间 H 上自共轭算子，并满足 $0\leqslant A\leqslant I$．证明必存在 Hilbert 空间 $H'\supset H$，以及 H' 上投影算子 E，使得

$$A=PE|_H$$

其中 P 是 H' 在 H 上投影．

(提示：取 $H'=H\oplus H$，$E=\begin{pmatrix} A & B \\ B & I-A\end{pmatrix}$，$B=[A(I-A)]^{\frac{1}{2}}$)

3．设 $\{A_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 上自共轭算子序列，如果 $A_n\geqslant 0$，$n=1,2,\cdots$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n=I$，那末必存在 Hilbert 空间 $H'\supset H$，以及 H' 上一列彼此可交换的投影算子 $\{E_n\}$，使得

$$A_n=PE_n|_H,\ n=1,2,\cdots,\ \sum_{n=1}^{\infty}E_n=I$$

此地 P 是 H' 在 H 上的投影(提示：本题可用习题 2 来证，也可直接作为 Наймарк 定理推论)．

4．设 $\{A_n\}$ 是复 Hilbert 空间 H 上一列有界线性算子，那末必存在 Hilbert 空间 $H'\supset H$，以及 H' 上一列有界的正常算子 $\{N_n\}$，使得

$$A_n=PN_n|_H,\ n=1,2,\cdots$$

并且 $\{N_n, N_m^*|n,m=1,2,\cdots\}$ 彼此可交换，P 是 H' 在 H 上投影．如果 $\{A_n\}$ 是自共轭的，那末 $\{N_n\}$ 也是一列自共轭的(提示：对于 $\{A_n\}$ 是自共轭的序列时，作 $A_n'=\dfrac{A_n-m_nI}{2^n(M_n-m_n+1)}$ $(n=1,2,\cdots)$，其中 $M_n=\sup\limits_{\|x\|=1}(A_nx,x)$，$m_n=\inf\limits_{\|x\|=1}(A_nx$

x)，对$\{A_n'\}$可用习题3. 对于一般的$\{A_n\}$可化为序列$\{\mathrm{Re}A_n, \mathrm{Im}A_n\}$考虑).

定义　设T是复 Hilbert 空间H上有界线性算子，如果存在复 Hilbert 空间 $H'\supset H$, 以及 H' 上正常算子 N, 使得

$$T=N|_H$$

称T是H上**次正常算子**.

显然，在分解 $H'=H\oplus(H'\ominus H)$下，$N=\begin{pmatrix} T & T_1 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$.

5. 设T是复 Hilbert 空间H上次正常算子，那末T必是H上亚正常算子，即对任何 $x\in H$, $\|Tx\|\geqslant\|T^*x\|$(提示：用 $N=\begin{pmatrix} T & T_1 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ 的形式直接算出 $NN^*=N^*N$ 成立的条件).

6. 设T、$\widetilde{T}$ 分别是 Hilbert 空间 H、$H'(\supset H)$上有界线性算子. P是H'在H上投影. 证明下面三个命题等价.

(i) $T\subset\widetilde{T}$.

(ii) $T=P\widetilde{T}|_H$, $T^*T=P\widetilde{T}^*\widetilde{T}|_H$ 同时成立.

(iii) 对一切 $i, k=0, 1, 2, \cdots$, $T^{*i}T^k=P\widetilde{T}^{*i}\widetilde{T}^k|_H$ 成立.

7. (Halmos)　设T是复 Hilbert 空间H上有界线性算子. 证明存在 Hilbert 空间 $H'\supset H$, 以及 H' 上正常算子 N, 使得 $T=N|_H$ 成立(即T是次正常)的充要条件是

(i) 对任何有限个向量 x_0、$\cdots$、$x_n\in H$,

$$\sum_{i,j=0}^{n}(T^ix_j, T^jx_i)\geqslant 0$$

(ii) 存在正数 c, 对任何有限个向量 x_0、$\cdots$、$x_n\in H$,

$$\sum_{i,j=0}^{n}(T^{i+1}x_j, T^{j+1}x_i)\leqslant c^2\sum_{i,j=0}^{n}(T^ix_j, T^jx_i)$$

(必要性是显然的, 充分性证明的提示：考察*-半群 $\Gamma=\{\{i, j\}|i, j$ 是非负整数$\}$; $\{i, j\}\cdot\{i', j'\}=\{i+i', j+j'\}$, $\{i, j\}^*=\{j, i\}$. 利用定理5及习题6).

8. (Nagy)　设T是复Hilbert 空间H上压缩算子，那末必存在Hilbert 空间 $H'\supset H$, 以及 Hilbert 空间 H' 上酉算子 U, 使得

$$T^n=PU^n|_H,\quad T^{*n}=PU^{*n}|_H,\quad n=0, 1, 2, \cdots$$

其中P是H'在H上投影，(这种膨胀定理在滤波理论中有应用．证明的提示：令$H=\bigoplus_{i=-\infty}^{\infty}H_i$，$H_i=H$，$i=0,\pm1,\pm2,\cdots$，作出如下算子$U$，

$$U=\left(\begin{array}{ccccccccc}
\ddots & & & & & & & & \\
 & 0 & & & & & & & \\
 & 1 & 0 & & & & & & \\
 & 0 & 1 & 0 & & & & & \\
 & & 0 & (T-TT^*)^{\frac{1}{2}} & T & & & & \\
 & & & -T & (I-T^*T)^{\frac{1}{2}} & 0 & & & \\
 & & & & & 1 & 0 & & \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 & \ddots
\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ H_{-2} \\ H_{-1} \\ H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ \\ \end{array}$$

直接验证U满足要求)．

9．T是 Hilbert 空间H上压缩算子，如果$Tx=x$，那末必有$T^*x=x$．

10．(遍历定理)设T是复 Hilbert 空间H上压缩算子，那末对一切$x\in H$，下面的极限

$$(\text{强})\lim_{\substack{n>m\geq 0\\ n-m\to\infty}}\frac{1}{n-m}\sum_{k=m}^{n-1}T^kx$$

存在(用习题 8 以及酉算子的谱分解定理)

注：习题 8 可以推广成连续参数形式，从而习题 10 也可推广成连续参数形式．

11．(Von-Neumann 和 Heinz)　设$u(z)=\sum_{i=0}^{\infty}c_iz^i$是绝对收敛级数$\sum_{i=0}^{\infty}c_i$产生的解析函数，$T$是复 Hilbert 空间上压缩算子．记$u(T)=\sum_{i=0}^{\infty}c_iT^i$．如果$u(z)$在$|z|\leq1$上满足$|u(z)|\leq1$(或$\mathrm{Re}\,u(z)\geq0$)，那末$\|u(T)\|\leq1$ (或$\mathrm{Re}\,u(T)\geq0$，这里$\mathrm{Re}\,u(T)$是$u(T)$的实部)．

(提示：用习题 8 和酉算子谱分解定理)

12. (Nagy)　设$\{A_n\}$是 Hilbert 空间H上有界自共轭算子序列，满足

(i) 对每个实系数，而在$[-M, M]$上非负的多项式$p(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i t^i$，$\sum_{i=0}^{n} a_i A_i \geqslant 0$；

(ii) $A_0=I$。

那末必存在 Hilbert 空间$H'(\supset H)$以及H'上有界自共轭算子A，使得

$$A_n=PA^n|_H, \quad n=0, 1, 2, \cdots$$

此地P是H'在H上的投影. 如果要求H'是极小的，即$H'=\overline{\text{span}}\,\{A^n f \mid f\in H, n=0, 1, 2, \cdots\}$，那末除去一个酉等价外，$(H', A)$是由$\{A_n\}$唯一确定的，并且$\|A\|\leqslant M$。(提示：取$N=\{0, 1, 2, \cdots\}$为$\Gamma$，普通加法作为$\Gamma$上的乘法，并取$n^*=n$)。

第七章 广义函数

§1 基本函数与广义函数

1. 引言 在经典数学分析和通常的应用中，实变数的实函数是这样来定义的：它是实数集到实数集的映照. 这样定义函数在某种程度上确是反映了现实世界中两个变量之间的关系. 然而在许多场合，这种把函数理解为实数对应于实数的概念已经不够用了. 例如，对给定的质量分布，它的密度函数就不能完全容纳在通常的函数概念中，我们详述如下.

设在实数直线上给定了一个质量分布（它的总质量是有限的）. 我们用$F(x)$表示区间$(-\infty,x]$中的质量，它是直线上单调增加右方连续的函数. 由于$F(x_0+h)-F(x_0-h)$是长度为$2h$的区间$(x_0-h,\ x_0+h]$中的质量，当函数$F(x)$在点x_0的导数存在时，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0-h)}{2h}=F'(x_0)$表示这个质量分布在$x_0$点的密度. 这样，质量分布的密度函数$\rho(x)$只是在$F'(x)$存在的点有定义. 如果在整个直线上只是在原点有一单位质量，别处无质量，那末

$$F(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\geqslant 0\\ 0, & \text{当}x<0\end{cases} \tag{1.1}$$

显然，在$x\neq 0$处密度$\rho(x)$为 0 而在$x=0$处密度$\rho(x)$为∞，这样的密度函数$\rho(x)$就不能容纳在经典数学分析的函数概念中. 简单地认为$\rho(x)$几乎处处等于 0 是不行的，对这种函数进行通常的微积分运算将导致错误. 例如它的积分$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)dx$按通常勒贝格

积分的意义当然是零，但是从直观上来说这个积分明明应该等于总质量1. 矛盾的产生说明函数概念必须推广，$\rho(x)$不是几乎处处等于 0 的函数，而是一种新的意义下的“函数”.

其次，在经典数学分析中许多分析运算受到较大的限制. 例如对求导函数的运算，我们知道连续函数不一定能求导，即使存在一次导函数也不一定存在高阶导函数. 又如对于函数列，求导函数的运算与求极限的运算一般不一定能交换，就是说，当在某区间上$\lim\limits_{m\to\infty}F_m(x)$存在而且$F'_m(x)$存在时，$(\lim\limits_{m\to\infty}F_m(x))'$与$\lim\limits_{m\to\infty}F'_m(x)$这两个函数不一定都存在，即使它们都存在时也不一定相等，除非加上相当强的条件，如一致收敛之类. 还有积分运算的限制也很大，例如常数函数 1 的Fourier 变换是发散的反常积分$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}dx$，它一般是无意义的. 因此Fourier 变换等一些有力的分析工具在应用时受到较大的限制. 总之，经典分析中分析运算的灵活性不能显示出来. 因此需要冲破经典分析数学中函数概念的框架.

本世纪四十年代左右建立起来的广义函数论就是为了解决上述一些问题. 它起源于量子力学中的 Dirac δ-函数. 而现在广义函数论已经在理论物理、工程技术、微分方程论、随机过程论、群表示论与泛函分析中有了广泛的应用.

另外，广义函数的概念也有进一步的扩充，如超函数、微函数等，这些在本书中将不进行讨论.

广义函数的概念可以粗略地阐述如下. 例如，设$T(x)$表示某个一维的温度分布. 由于温度是经过在一个小范围中平均而得的数量概念，讲在某点x处的温度是没有直观意义的，而且也难以实际测量到它的精确值. 如果我们要通过测量确定这个温度分布的情况，那末在每一次测量时仪器所“接触”的部位不是一点而是在该点周围某个范围内的各点，而测得的数值是一定范围内各点温

度值的"加权平均". 如果我们用$T(x)$表示x点温度分布的状况, 用$\varphi(x)$表示在一次测量中x点的温度对这次测量所得的数值影响程度的一个"权", 那末用这个仪器进行一次测量所得的数值并不是在某点处的$T(x)$值, 而是与分布$T(x)$有关的一个数值, 例如是

$$(T, \varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} T(x)\varphi(x)dx \tag{1.2}$$

进行各式各样的测量相当于让$\varphi(x)$经历某个函数类$\mathscr{F}$. 相应于这个函数类$\mathscr{F}$中每个φ, 测得的温度值是(T, φ)(见(1.2)). 再设法由(T, φ)的值定出T的分布情况.

总之, 要确定函数$T(x)$, 不一定能直接确定它在每点x的函数值, 而是使函数$T(x)$和某个函数集$\mathscr{F}$中函数φ发生"关联". 对$\mathscr{F}$中每个φ按某种方式(不一定就是(1.2))定出一个值(T, φ)与φ对应. 就是说用泛函$\varphi\longmapsto(T, \varphi)$来确定$T$. 最简单的泛函是连续线性泛函, 它类似于(1.2). 这样得到的函数概念就是广义函数. 为了避免求导等分析运算受到限制, 我们选取$\mathscr{F}$是"足够好"的函数所成的函数类, 使对其中每个函数能无限制地进行求导等分析运算, 而后利用类似于"分部积分"的技巧(见§2第一段)使得对广义函数也能无限次求导以及进行各种分析运算.

2. 基本函数空间 首先我们引进一些记号与概念. 我们对n维欧几里得空间E^n中的点$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 记$|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$.

设$\varphi(x)$是定义在n维欧几里得空间E^n上的函数, $x=(x_1, \cdots, x_n)$. 我们用S_φ表示集$\{x|\varphi(x)\neq 0\}$的闭包, 把它称做函数$\varphi(x)$的**支集**. 设$p=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$, p_j为非负整数, 记$N(p)=p_1+\cdots+p_n$, 记偏微分运算$\dfrac{\partial^{N(p)}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}$为$D^p$. 当$p_j=0$时就表示不对变数$x_j$求偏导数. 特别记$(0, 0, \cdots, 0)$为0, $D^0\varphi$就是函数φ本身, 它又称

做 φ 的零阶导函数.

基本函数空间 K 下面我们选择一类性质"足够好"的函数，使得广义函数能够作为这类函数组成的函数空间上的泛函.

定义 设 K 是 E^n 上无限次可微而且支集有界的复函数的全体. 函数集 K 按照通常函数的线性运算成为复线性空间. 在 K 中引进如下的极限概念. 设 $\{\varphi_m\}\subset K$, $m=1,2,\cdots$, $\varphi\in K$. 如果(i)存在一个有界集 A 使得 $S_{\varphi_m}\subset A$, $m=1,2,\cdots$(这时说函数列 $\{\varphi_m\}$ 的支集是**一致有界**的), 而且(ii)函数列 $\{\varphi_m\}$ 的各阶(包括零阶)导函数列 $\{D^p\varphi_m\}$ 都(在 E^n 上)一致收敛于 $D^p\varphi$, 那末称函数列 $\{\varphi_m\}$ **在 K 中收敛**于 φ, 记为 $\varphi_m \xrightarrow{K} \varphi$. 按上述线性运算与极限运算，称空间 K 是一个**基本函数空间**, 其中的函数 φ 称做(K 中的)**基本函数**.

K 中的极限概念有下面的基本性质：显然，当 $\varphi_m\xrightarrow{K}\varphi$, $\psi_m \xrightarrow{K}\psi$, α 和 β 是数时, $\alpha\varphi_m+\beta\psi_m\xrightarrow{K}\alpha\varphi+\beta\psi$. 也就是说线性运算是连续的.

首先我们来说明 K 中有不恒等于零的函数.

例 1 对任何固定的正数 a, 作函数

$$\varphi(x,a)=\begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-|x|^2}}, & \text{当 } |x|<a \\ 0, & \text{当 } |x|\geqslant a \end{cases} \tag{1.3}$$

它是无限次可微的函数，它的支集就是闭球 $\{x\,|\,|x|\leqslant a\}$. 所以 $\varphi(\cdot,a)$[①] $\in K$.

其次我们再举例来说明 K 中的极限概念.

例 2 设 $\{b_m\}\subset E^n$, $b_m\to 0$. 那末 $\varphi(\cdot-b_m,a)$[②] $\xrightarrow{K}\varphi(\cdot,a)$.

---

① $\varphi(\cdot,a)$ 表示 E^n 上的函数 $x\longmapsto\varphi(x,a)$.

② $\varphi(\cdot-b_m,a)$ 表示函数 $x\longmapsto\varphi(x-b_m,a)$.

但是如果$b_m\to\infty$，作$\varphi_m(\cdot)=\frac{1}{m}\varphi(\cdot-b_m,\ a)$．这时尽管对一切$p$，$\{D^p\varphi_m\}$在$E^n$上一致收敛于0，但是它不满足$K$中函数列收敛定义中的条件(i)．因为这时$S_{\varphi_m}$是以$b_m$做中心$a$做半径的闭球，由于$b_m\to\infty$，这些闭球当然不能容纳在一个有界集中，所以$\{\varphi_m\}$在$K$中不收敛于任何函数．

为了更细致地刻划K中的极限概念，我们考察K的子空间．设Ω是E^n中以原点做中心，有限正数r做半径的闭球．我们把K中支集含在Ω内的函数全体记做$K(\Omega)$．它是K的线性子空间．我们按第四章§1的办法在$K(\Omega)$中引进距离，例如

$$\rho(f,g)=\sum_p\frac{1}{N(p)!\,2^{N(p)}}\frac{\max\limits_x|D^p(f(x)-g(x))|}{1+\max\limits_x|D^p(f(x)-g(x))|},$$

$$f、g\in K(\Omega)\tag{1.4}$$

那末当$\{\varphi_m\}\subset K(\Omega)$，$\varphi\in K(\Omega)$时，$\rho(\varphi_m,\varphi)\to0$的充要条件是对一切$p$，$\{D^p\varphi_m\}$在$E^n$上(实际只要在$\Omega$上)一致收敛于$D^p\varphi$．设$\{\varphi_m\}\subset K$，显然$\{\varphi_m\}$的支集一致有界的充要条件是存在前述闭球$\Omega$使$S_{\varphi_m}\subset\Omega$，$m=1,2,\cdots$．因此，当$\{\varphi_m\}\subset K$，$\varphi\in K$时，$\varphi_m\xrightarrow{K}\varphi$的充要条件是：(i)存在有限闭球$\Omega$，使$\{\varphi_m\}\subset K(\Omega)$，$\varphi\in K(\Omega)$；(ii)在$K(\Omega)$中$\{\varphi_m\}$按距离收敛于$\varphi$．但是由于有条件(i)，$\varphi_m\xrightarrow{K}\varphi$不能简单地归结为按上述距离收敛．事实上可以证明：不可能在K中定义距离，使$\varphi_m\xrightarrow{K}\varphi$等价于按距离收敛．但是可以在$K$中引进拓扑，使$K$成为拓扑线性空间，从而使上述收敛为按拓扑收敛．参见[15]．

由于在K中要进行各种分析运算，我们类似于第四章§5引进K中算子或泛函的连续性概念．

定义　设A是$K\to K$的算子(或$K\to$复数全体的泛函)，又设

$\varphi\in K$，如果对一切$\{\varphi_m\}\subset K$，$\varphi_m\xrightarrow{K}\varphi$都有$A\varphi_m\xrightarrow{K}A\varphi$（或数列$A\varphi_m\to A\varphi$），就称算子（或泛函）$A$在$\varphi$点**连续**．如果$A$在$K$中每点都连续，就称$A$是**连续算子**（泛函）．显然，当$A$是线性算子（泛函）时，$A$成为连续算子（泛函）的充要条件是$A$在0点连续．

例如，对任意一个p，求导运算

$$D^p:\ \varphi\longmapsto\frac{\partial^{N(p)}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}\varphi$$

是$K\to K$的连续线性算子．

3．局部可积函数空间 我们再来考察普通的函数．

定义 设$f(\cdot)$是E^n上的函数，如果对于任何有界可测集M，$f(\cdot)$在M上是勒贝格可积的（见第三章§3），那末称$f(\cdot)$是**局部**（勒贝格）**可积函数**．我们用L^*表示E^n上的局部勒贝格可积函数全体，在L^*中把几乎处处相等的两个函数看成同一个向量或者就简直看成同一函数，L^*按通常的线性运算成为线性空间．这是“普通函数”空间．显然E^n上函数$f(\cdot)$成为局部可积函数的充要条件是$f(\cdot)$在E^n上是勒贝格可测而且对每个正数$a<\infty$，$\int_{|x|\le a}|f(x)|dx<\infty$①．

定义 当$f\in L^*$时，我们可以利用f在K上定义一个泛函：

$$T(f):\ \varphi\longmapsto(f,\varphi)=\int f(x)\varphi(x)dx,\ \varphi\in K \tag{1.5}$$

称$T(f)$为相应于f的泛函．

由于f是局部可积的而且φ的支集是有界的，所以上述积分(1.5)是有限数．$T(f)$显然是K上的线性泛函．由于当$\varphi_m\xrightarrow{K}\varphi$时，一切$\varphi_m$的支集必含在一有限球$\Omega$中且在$\Omega$中$\{\varphi_m\}$一致收敛

① 局部勒贝格可积函数在整个E^n上未必可积，例如非零的常数函数就是如此．

于φ，所以$(f,\varphi_m)\to(f,\varphi)$. 因此泛函$T(f)$又是连续的. 故对每个$f\in L^*$相应于$f$的泛函$T(f)$是一个线性连续泛函. 下面我们要证明映照$T$: $f\longmapsto T(f)$是可逆的. 为此先考察下述事实.

引理 1 设$f\in L^*$，而且对一切$\varphi\in K$

$$\int f(x)\varphi(x)dx=0 \tag{1.6}$$

那末$f(x)\doteq 0$.

证 (1) 首先证明K中的函数有"足够多"；就是说对于任何一个支集有界的连续函数φ(不一定属于K)，必有K中一列$\{\varphi_m\}$，它们的支集是一致有界的而且$\{\varphi_m\}$在E^n上一致收敛于φ. 事实上，利用(1.3)中函数$\varphi(\cdot,a)$，我们作函数（**Weierstrass 奇异积分的核**）

$$K_m(x)=\frac{\varphi\left(x,\frac{1}{m}\right)}{\int\varphi\left(x,\frac{1}{m}\right)dx},\quad(m=1,2,\cdots) \tag{1.7}$$

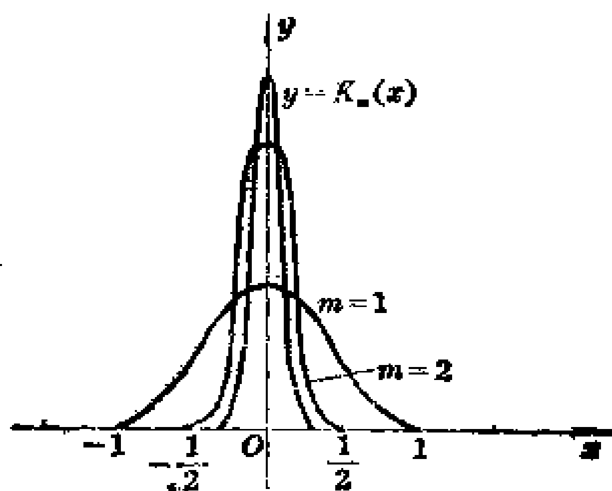


图 7.1

又作函数

$$\varphi_m(x)=\int_{E^n}\varphi(x-y)K_m(y)dy$$

$$=\int_{E^n}\varphi(z)K_m(x-z)dz\text{①} \quad (1.8)$$

如果 $\varphi(\cdot)$ 的支集在 $\{x\,|\,|x|\leqslant a\}$ 中，那末，由于 $K_m(\cdot)$ 的支集是 $\left\{X\,\middle|\,|x|\leqslant\frac{1}{m}\right\}$，可以断定 $S_{\varphi_m}\subset\{x\,|\,|x|\leqslant a+1\}$，所以 $\{\varphi_m\}$ 的支集是一致有界的. 另一方面，由于 $\int K_m(x)dx=1$，$K_m(x)\geqslant 0$，从

$$\varphi_m(x)-\varphi(x)=\int_{|y|\leqslant\frac{1}{m}}(\varphi(x-y)-\varphi(x))K_m(y)dy$$

我们得到

$$|\varphi_m(x)-\varphi(x)|\leqslant\int_{|y|\leqslant\frac{1}{m}}|\varphi(x-y)-\varphi(x)|K_m(y)dy$$

$$\leqslant\max_{|y|\leqslant\frac{1}{m}}|\varphi(x-y)-\varphi(x)|$$

因为函数 $\varphi(\cdot)$ 的支集有界而且 $\varphi(\cdot)$ 是连续的，所以 $\varphi(\cdot)$ 在 E^n 上是一致连续的，因此由上式 $\{\varphi_m\}$ 在 E^n 上一致收敛于 φ，这就满足我们的要求.

(2) 对任一支集有界的连续函数 $\varphi(\cdot)$，作上述 $\{\varphi_m\}\subset K$，由于定理中的假设 $\int f(x)\varphi_m(x)dx=0$，令 $m\to\infty$ 就知道(1.6)对于任一支集有界的连续函数 φ 也成立.

(3) 对任一支集有界的有界可测函数 $\varphi(\cdot)$，利用第三章§2 中类似于证明鲁津定理的方法就知道，必可作一列支集一致有界的而且本身也是一致有界的连续函数列 $\{\varphi_m(\cdot)\}$，使得它概收敛于 $\varphi(\cdot)$. 由于对 φ_m，(1.6)成立，即 $\int f(x)\varphi_m(x)dx=0$，所以，令 $m\to\infty$，利用勒贝格积分的控制收敛定理就知道(1.6)对一切支集有界

① 这时 $\varphi*K_m=K_m*\varphi$，这里"*"表示卷积，参看第三章§5 习题或本章§3. 下面证明了 $\varphi*K_m=K_m*\varphi\to\varphi$，因此 $\{K_m\}$ 可以看成卷积的近似单位元.

的有界可测函数$\varphi(\cdot)$也成立.

(4) 对任一有限闭球Ω，作有界可测函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\operatorname{sign} f(x), & \text{当} x\in\Omega \text{时}\\ 0, & \text{当} x\overline{\in}\Omega \text{时}\end{cases}$$

那末$\varphi(x)$的支集含在Ω中，由(3)可知，对这个φ(1.6)成立，即

$$\int_{\Omega}|f(x)|dx=0$$

这就证明了$f(x)$几乎处处等于零. 证毕.

现在来证明映照T的可逆性: 设f_1、$f_2\in L^*$且$T(f_1)=T(f_2)$. 那末$T(f_1-f_2)=0$, 由引理1, 可知$f_1-f_2=0$, 即$f_1=f_2$. 这样来, 连续线性泛函$T(f)$就完全地刻划出f. 因而以后我们就可以用$T(f)$来代替f了.

4. 广义函数空间

定义　设F是基本函数空间K上的连续线性泛函, 称F是(K空间上的)**广义函数**.

有些著作中称这里的广义函数为**分布**.

利用上一段对$T(f)$的讨论, 我们得到

定理1　当$f\in L^*$时, 相应于f的泛函

$$T(f)=\int f\varphi dx,\quad \varphi\in K$$

是广义函数. 而且映照$T: f\longmapsto T(f)$ $(f\in L^*)$是可逆的线性映照.

定义　我们把函数$f\in L^*$与广义函数$T(f)$一致化, 也称f为广义函数. 但是这是一种特别的广义函数, 称它们是"正则"①的**广义函数**.

对于一般的广义函数$F:\varphi\longmapsto(F,\varphi)$, 我们也形式地把$(F,$

---

① 这里术语"正则"是借用的, 它和解析函数论中的术语"正则"在意义上并没有关系.

φ)写成

$$(F,\varphi)=\int F(x)\varphi(x)dx \tag{1.9}$$

但是这里的 $F(x)$实际上可能并不是局部可积函数，即可能不是通常的"实数与实数对应"的函数，这里的函数 $F(x)$及(1.9)中的积分完全是形式而已。

下面给出常用到的不是正则的广义函数。

例 3 设 $a\in E^n$，作K空间上的泛函 δ_a: $\varphi\longmapsto(\delta_a,\varphi)$如下:

$$(\delta_a,\varphi)=\varphi(a),\qquad \varphi\in K \tag{1.10}$$

它显然是广义函数。称 δ_a 为 Dirac 的 **δ-函数**. 特别当 $a=0$ 时又记 $\delta_0=\delta$. 我们把(1.10)形式地写成

$$(\delta(\cdot-a),\varphi)=\int\delta(x-a)\varphi(x)dx=\varphi(a) \tag{1.11}$$

因此 Dirac 的 δ-函数 δ_a 又可以形式地写为 $\delta(x-a)$，特别当$a=0$时为 $\delta(x)$.

现在我们来证明 L^* 中不存在满足等式(1.11)的函数 $\delta(\cdot-a)$. 用反证法. 如果有函数 $\delta(\cdot-a)\in L^*$ 使得(1.11)满足，那末对一切 $\varphi\in K$，当 $\varphi(a)=0$ 时

$$\int\delta(x-a)\varphi(x)dx=0 \tag{1.12}$$

仿照引理 1 的证法可以证明：这时函数 $\delta(x-a)$除去 $x=a$点外几乎处处为零，这样一来 $\delta(x-a)\doteq0$. 所以，等式(1.12)对一切 $\varphi\in K$ 都成立，这和(1.11)矛盾. 因此 $\delta(\cdot-a)\overline{\in}L^*$. 它是一个非正则的广义函数.

我们知道通常函数列的各种收敛概念中最简单的是处处收敛. 现在广义函数作为连续线性泛函，对于广义函数，类似于上述处处收敛概念的应该是泛函序列在基本空间上的处处收敛.

定义 我们用 K' 表示K上的连续线性泛函全体. 它就是 K

的共轭(伴随)空间. 它按照通常线性泛函间的线性运算成为线性空间. 在 K' 中引进极限概念如下：设$\{F_m\}\subset K'$, $F\in K'$, 如果对一切 $\varphi\in K$ 有①

$$\lim_{m\to\infty}(F_m,\varphi)=(F,\varphi) \tag{1.13}$$

就称$\{F_m\}$在 K' 中收敛于 F, 记为$F_m\xrightarrow{K'}F$. 称空间 K' (按上述线性运算和极限运算)是一个**广义函数空间**.

K' 空间中的这种收敛概念类似于第五章 § 3 中的弱* 收敛，事实上它也称为**弱*收敛**.

容易知道，当$\{F_m\}$、$\{G_m\}\subset K'$, F、$G\in K'$, α、β为数且$F_m\xrightarrow{K'}F$, $G_m\xrightarrow{K'}G$ 时, $\alpha F_m+\beta G_m\xrightarrow{K'}\alpha F+\beta G$. 这就是说在广义函数空间 K' 中线性运算是连续的.

和K的情况相仿地可以在 K' 上定义算子或泛函的连续性.

定义　设A是K' 到 K' 的算子, 如果对一切$\{F_m\}\subset K'$, $F\in K'$ 当 $F_m\xrightarrow{K'}F$ 时始终有 $AF_m\xrightarrow{K'}AF$, 那末称算子 A 是**连续的**.

设 A 是K空间到K空间中的连续线性算子. A' 是 K' 到 K' 的连续线性算子, 满足如下条件：对一切 $\varphi\in K$, $F\in K'$ 有$(A'F,\varphi)=(F,A\varphi)$, 那末称 A' 是 A 的**共轭(伴随)算子**. 这里的共轭算子的概念完全类似于第五章 § 3 中相应的概念. (但与第六章 § 4 的共轭算子是有区别的, 这里我们没有取复共轭.) 当 A 是 $K\to K$ 的连续线性算子时, 必然存在 A的共轭算子 A'. 事实上, 任取$F\in K'$, 作K上泛函 F_1 如下：

$$F_1:\ \varphi\longmapsto(F,A\varphi),\ \varphi\in K$$

由于 A 是连续线性算子, F 是连续线性泛函. 容易知道, 这时 F_1 也

① 我们这里用(F,φ)表示泛函 F 在 φ 处的值, 它就是第五章的记号 $F(\varphi)$的另一种表达形式.

是K上的连续线性泛函，我们记F_1为$A'F$. 那末我们又得到K'到K'的一个线性算子A': $F\longmapsto F_1=A'F$. 容易验证A'是$K'\to K'$的连续线性算子而且是算子A的共轭(伴随)算子①. A'是由A唯一确定的.

我们附带地说一下，虽然我们这里引进的广义函数的概念从某一方面来说是“足够广”的，但是还是有限制的. 例如通常的“点与点对应”的函数，如果它不是局部可积的，甚至是不可测的话，它仍不能纳入这里的广义函数概念中. 换句话说，广义函数概念并没有全部包括通常的函数. 事实上，这里引进的广义函数空间是从局部勒贝格可积函数出发通过求各阶广义导函数以及广义函数列的极限运算所能得到的一切广义函数(参看后面§2的有关定理). 换句话说，K'是包含L^*而且对求导函数运算以及求函数列的极限运算封闭的最小子空间.

习　题

1. 设m是一正整数, $f(x)$是E^n上的函数，它本身及其直到m阶的一切偏导函数都存在而且连续. 证明存在一列$\{\varphi_k\}\subset K$对一切非负整数组$p=(p_1,\cdots,p_n)$当$p_1+\cdots+p_n\leqslant m$时，$\{D^p\varphi_k\}$在$E^n$的任一有界域上一致收敛于$D^pf$.

2. 设$\{f_m\}\subset L^*$, $f\in L^*$, 举出$f_m\xrightarrow{K'}f$的一些充分条件.

3. 如果K空间中的极限概念改为$\varphi_m\to\varphi$的充要条件是对一切p, $\{D^p\varphi_m\}$一致收敛于$D^p\varphi$(即取消对$\{\varphi_m\}$的支集一致有界的要求)，这时，是否任一局部可积函数仍为K上的连续线性泛函?

---

① 在广义函数论中，A的共轭算子常用A'表示，这与K上连续线性泛函全体用K'表示相对应.

§2 广义函数的性质与运算

1. 广义函数的导函数和广义函数列的极限 引进广义函数的概念可以使求导运算畅通无阻. 这个想法的来源在于分部积分. 为简单起见, 我们先考察一元函数. 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都是一个自变数 x 的连续可微分函数, 而且 $\varphi(x)$ 的支集是有界的. 利用分部积分——由于积出的项为零——立即可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

这个公式就是利用积分把对一个函数求导的运算转嫁到另外一个上去——这是广义函数论中的一个基本技巧. 因此当 $\varphi\in K$ 而且 f 具有连续导函数时, f 作为正则的广义函数成立着

$$\left(\frac{d}{dx}f,\ \varphi\right) = -\left(f, \frac{d}{dx}\varphi\right), \qquad \varphi\in K \tag{2.1}$$

换句话说, 当把 $\frac{d}{dx}$ 看成 K 空间上的线性算子时, 它的共轭算子是 $\left(\frac{d}{dx}\right)' = -\frac{d}{dx}$. 这个公式启发我们给出广义函数的导函数的定义:

定义 设 F 是 K 空间上的广义函数. 称泛函

$$\varphi \longmapsto -\left(F, \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right) \tag{2.2}$$

是广义函数 F 的(对 x_j 的)**偏导函数**, 记为 $\frac{\partial}{\partial x_j}F$, 即

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}F,\ \varphi\right) = -\left(F, \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right), \qquad \varphi\in K \tag{2.3}$$

由 §1 第二段, $\frac{\partial}{\partial x_j}$ 是连续线性算子. 由此容易知道泛函 $\frac{\partial}{\partial x_j}F$ (即(2.2))确实是连续线性泛函, 就是说 $\frac{\partial}{\partial x_j}F$ 也是广义函数. 这样, 求导运算就可以继续进行下去, 因此有

定理 1. (广义函数基本性质 I) 广义函数的各阶偏导函数都存在,而且都是广义函数.

反复利用(2.3),又可得到一般偏导函数的定义公式:

$$(D^p F, \varphi) = (-1)^{N(p)}(F, D^p \varphi), \quad \varphi \in K \tag{2.4}$$

利用类似于(2.1)式的证明,我们可以得到这样的结论:如果 F 是局部勒贝格可积函数,而且当 $k=(k_1, \cdots, k_n)$, $0 \leqslant k_j \leqslant p_j$ 时 F 的通常偏导函数 $D^k F$ 存在并且是连续函数,那末(2.4)式确实成立.这就是说,这里定义的广义函数的偏导函数确和通常的偏导函数意义一致。这说明了广义函数的偏导函数定义的合理性.

例 1 我们考察一元局部可积函数(Heaviside 函数)$\theta(x)$(参看第三章 §62).照通常的求导函数的概念,它在 $x=0$ 点的导数不存在,而在别的 x 点有 $\theta'(x)=0$.但是当 $\varphi \in K$ 时

$$(\theta, \varphi') = \int_0^\infty \varphi'(x)dx = -\varphi(0) = -(\delta, \varphi)$$

所以,按照(2.3),θ 作为广义函数,它的导函数是

$$\theta' = \delta \tag{2.5}$$

在广义函数论未出现以前,一些数学家曾经用 Stieltjes 积分来解释 Dirac 提出的 δ-函数,就是把 $\int \delta(x)\varphi(x)dx$ 用 $\int \varphi(x)d\theta(x)$ 来解释,这样,遇到有关积分问题是能够解决了,然而对于 $\delta'(x)$、$\delta''(x)$、…等就没有办法解释,这促使了广义函数理论的出现.

例 2 函数 $\ln|x|$ 是局部可积的.当 $\varphi \in K$ 时,利用分部积分我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)\ln|x|dx = \lim_{\varepsilon \to 0+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\varphi'(x)\ln|x|dx$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{1}{x}\varphi(x)dx$$

我们用 $P \cdot \int$ 表示柯西主值积分 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)$,那末由(2.3)可知

$\ln|\cdot|$的导函数(广义函数)存在而且

$$((\ln|x|)', \varphi) = \mathrm{P}\cdot\int \frac{1}{x}\varphi(x)dx$$

因为函数$\frac{1}{x}$在$x=0$附近不是勒贝格可积的，所以$\frac{1}{x}$不是局部勒贝格可积函数．但是如果我们定义

$$\left(\frac{1}{x}, \varphi\right) = \mathrm{P}\cdot\int \frac{1}{x}\varphi(x)dx$$

容易证明$\varphi \longmapsto \mathrm{P}\cdot\int \frac{1}{x}\varphi(x)dx$是$K$上的广义函数，我们把这个广义函数看成是$\frac{1}{x}$，那末有求导公式

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \tag{2.6}$$

这里自然也是把(2.6)式两边的函数都看成广义函数．

我们还可以用另一种方式来定义广义函数的导函数．但是为了方便起见，只叙述一元函数的情况．我们知道，当$F\in L^*$，而且通常的导函数存在时，

$$F'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{F(x+t)-F(x)}{t} \tag{2.7}$$

我们现在对广义函数的导函数也要证明它也有类似于(2.7)的公式．为此我们在一元函数的K空间里定义平移变换τ_t(t是任一给定的实数)如下

$$\tau_t:\ \varphi(\cdot)\longmapsto\varphi(\cdot+t),\qquad \varphi\in K$$

显然τ_t是K空间的连续线性算子，按照共轭算子的定义，τ_t的共轭算子τ'_t满足

$$(\tau'_t F, \varphi) = (F, \tau_t\varphi),\quad F\in K',\qquad \varphi\in K$$

由于当$t_n\neq 0$, $t_n\to 0$时$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tau_{t_n}\varphi-\varphi}{t_n}\xrightarrow{K}\varphi'$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\tau'_{-t_n}F-F}{t_n},\varphi\right)=\lim_{n\to\infty}\left(F,\frac{\tau_{-t_n}\varphi-\varphi}{t_n}\right)=-(F,\varphi')=(F',\varphi)$$

$F\in K'$, $\varphi\in K$. 因此，由(2.2)式定义的广义函数 F 的导函数 F' 有这样的性质：对任何数列 $\{t_n\}$, $t_n\to 0$, $t_n\neq 0$ 有 $F'=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tau'_{-t_n}F-F}{t_n}$.

我们把这件事简写成

$$F'=\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}\frac{\tau'_{-t}F-F}{t},\quad F\in K' \tag{2.8}$$

另一方面，因为当 $F\in L^*$, $\varphi\in K$ 时，显然

$$\int F(x+t)\varphi(x)dx=\int F(x)\varphi(x-t)dx$$

因此当 $F\in L^*$ 时 $(\tau'_{-t}F)(\cdot)=F(\cdot+t)$. 这启发我们，对一切 $F\in K'$, 可以把 $\tau'_{-t}F$ 形式地理解为 $F(x+t)$. 所以(2.8)就是(2.7)在广义函数方面的推广. 当然(2.8)也可以作为广义函数导函数的另一种定义.

定理 2(广义函数的基本性质 II) 设 $\{F_m\}\subset K'$, $F\in K'$ 而且 $F_m\xrightarrow{K'}F$. 那末对任一求导运算 D^p 有 $D^pF_m\xrightarrow{K'}D^pF$.

简单地说：广义函数列的求导运算和求极限运算是可以交换的.

证 当 $\varphi\in K$ 时，$D^p\varphi\in K$. 因此由(1.12)和(2.4)得到

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}(D^pF_m,\varphi)&=(-1)^{N(p)}\lim_{m\to\infty}(F_m,D^p\varphi)\\&=(-1)^{N(p)}(F,D^p\varphi)\\&=(D^pF,\varphi)\end{aligned}$$

证毕.

定理 1 和 2 很重要，它说明广义函数的出现解除了经典数学分析中对求导运算和求函数列极限运算的种种限制.

δ-式函数列 设函数列 $\{f_n\}\subset L^*$, 而且 $f_n\xrightarrow{K'}\delta\,(n\to\infty)$, 那

来称$\{f_n\}$是δ-式函数列.

下面给出L^*中函数列$\{f_n\}$成为δ-式函数列的一个充分条件.

例 3 设$\{f_\nu(\cdot)\}$是一列一元的局部可积函数，满足条件：(i)对任何正数m，存在常数c_m，使得对一切a、b、ν，当$|a|\leqslant m$，$|b|\leqslant m$时

$$\left|\int_a^b f_\nu(x)\,dx\right|\leqslant c_m$$

(ii)对任何两个固定的a、$b(a<0<b)$都有

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b f_\nu(x)dx=1$$

那末$\{f_\nu(\cdot)\}$是δ-式函数列.

证 我们作函数$F_\nu(x)=\int_{-1}^x f_\nu(\xi)d\xi$. 显然$F_\nu(\cdot)$作为广义函数也有$F'_\nu=f_\nu$. 由条件(ii)，对一切$x\neq 0$有$\lim\limits_{\nu\to\infty}F_\nu(x)=\theta(x)$. 再由条件(i)和勒贝格积分的控制收敛定理有

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F_\nu(x)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x)\varphi(x)dx,\ \varphi\in K$$

即$F_\nu\xrightarrow{K'}\theta$. 由广义函数的基本性质II就知道，当$\nu\to\infty$时

$$f_\nu=F'_\nu\xrightarrow{K'}\theta'=\delta$$

证毕.

下面考察更加具体的情况：例如，当$\varepsilon>0$, $\varepsilon\to 0$时，

$$f_\varepsilon(x)\equiv\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\xrightarrow{K'}\delta(x)\qquad(2.9)$$

这就是说，对于任意一列$\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to 0$，$f_{\varepsilon_n}(\cdot)$是δ-式函数列. 事实上，由于

$$\int_a^b f_\varepsilon(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{\varepsilon}-\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{\varepsilon}\right]$$

立刻知道$\{f_\varepsilon(\cdot)\}$满足条件(i)和(ii).

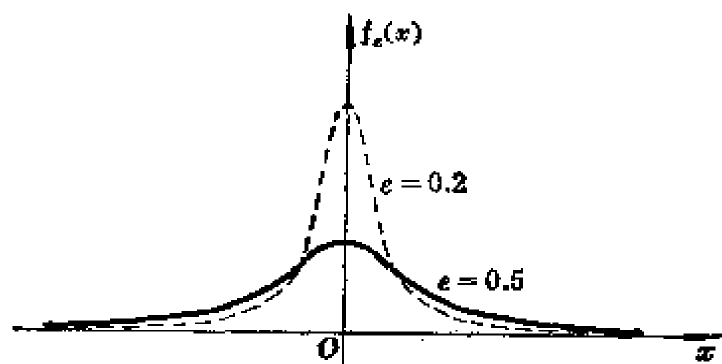


图 7.2

利用(2.9)我们得到一个重要的公式如下.

柯西(Cauchy)-泼莱迈涅(Plemelj)公式：当$\varepsilon>0$，$\varepsilon\to 0$时，

$$\frac{1}{x\pm i\varepsilon}\xrightarrow{K'}\frac{1}{x\pm i0}=\frac{1}{x}\mp\pi i\delta(x) \tag{2.10}$$

这里$\frac{1}{x\pm i0}$表示$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x\pm i\varepsilon}$.

证 由于$\frac{1}{x\pm i\varepsilon}=\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\mp i\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$和(2.9)，我们只需要再证明$\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\xrightarrow{K'}\frac{1}{x}$好了，但这点可以从$\frac{1}{2}\ln(x^2+\varepsilon^2)\xrightarrow{K'}\ln|x|$再取导函数得到.

又如§1引理1中函数列$\{K_m(\cdot)\}$也是δ-式函数列.

广义函数空间具有完备性.

定理3(广义函数的基本性质III) 设$\{F_m\}\subset K'$而且对每个$\varphi\in K$，$\lim\limits_{m\to\infty}(F_m,\varphi)$存在而且是有限的，那末必有$F\in K'$使得$F_m\xrightarrow{K'}F$.

这个定理的证明要用到一些拓扑线性空间理论，我们将它略去(参看[15]，第一章§1,8). 但是定理1—3说明，广义函数空间关于求导运算和极限运算是封闭的，因此由这两种运算不能产生出新的广义函数.

2. 广义函数的原函数 为简单起见，我们这里只讨论一元函数. 设 F、$G\in K'$，如果 $G'=F$，就称 G 是 F 的原函数. 一个广义函数 F 的原函数的一般形式就称为 F 的不定积分.

定理 4(广义函数的基本性质IV) 一元的广义函数 F 必存在原函数 G，它的不定积分必然形如 $G+C$(C 为常数).

证 分两步. (1) 先证明原函数的存在性. 我们只要在 K 上找一个连续线性算子 J，使得 $J\frac{d}{dx}=I$(I 为恒等算子). 再利用 J 作 K 上的连续线性泛函

$$G:\varphi\longmapsto -(F,J\varphi)$$

(换句话说，$(G,\varphi)=-(F,J\varphi)$)显然就有

$$(G',\varphi)=-(G,\varphi')=\left(F,J\frac{d}{dx}\varphi\right)=(F,\varphi)$$

那末 G 就是原函数了.

J 的作法如下：任意取定 K 中满足条件 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(x)dx=1$ 的函数 φ_0. 当 $\varphi\in K$ 时记

$$(J\varphi)(x)=\int_{-\infty}^{x}\left[\varphi(t)-\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)d\tau\right)\varphi_0(t)\right]dt$$

今证 $J\varphi\in K$. 显然 $J\varphi$ 是无限次可微分的. 由于有正数 c 使当 $|t|\geqslant c$ 时 $\varphi(t)=\varphi_0(t)=0$，所以当 $x\leqslant -c$ 时，$(J\varphi)(x)=0$，而 $x\geqslant c$ 时，$(J\varphi)(x)=$ 常数 c_1，然而

$$\lim_{x\to\infty}(J\varphi)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\varphi(t)-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)d\tau\varphi_0(t)\right)dt=0,$$

所以 $c_1=0$，这就是说 $J\varphi\in K$. 又算子 J：$\varphi\longmapsto J\varphi$ 显然是线性的，而且也容易证明它是连续的. 另一方面，由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(\tau)d\tau=0$，可知 $J\frac{d}{dx}\varphi=\varphi$. 所以这个 J 满足我们的要求.

(2) 再来研究不定积分，我们还需要下面的引理.

引理 1 设 $u\in K'$, $u'=0$, 那末 $u=$常数.

证 对于上述 J, 当 $\varphi\in K$ 时, 显然有

$$\frac{d}{dx}J\varphi=\varphi-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)d\tau\varphi_0$$

因此

$$(u,\ \varphi)=\left(u,\frac{d}{dx}J\varphi+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx\varphi_0\right)$$

$$=-(u',\ J\varphi)+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt(u,\varphi_0)$$

由于 $u'=0$, 所以

$$(u,\ \varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}(u,\varphi_0)\varphi(t)dt$$

这就表明 u 是常数 (u,φ_0). 引理证毕.

设 H 是 F 的另一原函数, 作 $u=H-G$, 那末 $u'=0$. 由引理 1 得到 $u=C$, 也就是 $H=G+C$. 定理 4 证毕.

对于一般的广义函数, "函数在一点的值"是没有意义的. 例如 $\delta(x)$ 在 $x=0$ 的值或 $\delta'(x)$ 在 $x=0$ 的值等都是没有意义的, 因此对一般的广义函数没有定积分理论.

3. 广义函数的乘法运算 对于一般的广义函数, 我们可以定义它和无限次可微函数的乘积. 设 E 是 n 个变元的无限次可微分函数全体. 由于 $E\subset L^*\subset K'$, E 中的函数可以看成 K' 中的广义函数. 显然, 当 $\psi\in E$ 时, 对一切 $\varphi\in K$, 仍然有 $\psi\varphi\in K$. 称 ψ 为 K 上的一个**乘子**, E 称做 K 的一个**乘子空间**.

定义 设 $\psi\in E$, $F\in K'$. 规定 ψ 和 F 的乘积 ψF 是满足条件

$$(\psi F,\varphi)=(F,\psi\varphi),\ \varphi\in K \tag{2.11}$$

的广义函数. ψF 也可以写成 $F\psi$.

容易看出, 当 $F\in L^*$ 时, 这里的乘积定义与通常的乘积一致,

因而我们这里的定义是合理的. 但是我们这里只定义了一般广义函数F与特殊的广义函数$\psi\in E$的乘积. 对于任何两个广义函数之间就难以规定它的积. 例如, 我们就不能有效地定义δ同它自身的乘积$\delta\delta$. 关于如何定义两个广义函数之间的乘法问题是广义函数论中还在继续研究的问题之一.

例 4　对于一元广义函数$\delta^{(n)}$, 当$\psi\in E$时,

$$\psi\delta^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{n-k}\psi^{(n-k)}(0)\delta^{(k)} \qquad (2.12)$$

4. 广义函数的支集　我们先来引进广义函数在某个"开集上等于零"的概念. 设F是n个变元的局部可积函数, O是E^n中的一个开集. 类似于§1引理1, 可以证明函数F在O上等于零的充要条件是对于K中一切支集含在O中的函数φ成立着$(F,\varphi)=0$. 因此, 我们引进如下概念.

定义　设$F\in K'$, O是E^n中的开集, 如果对K中一切支集含在O中的函数φ始终有$(F,\varphi)=0$, 那末我们就说**广义函数F在O中等于零**. 如果广义函数F_1同F_2的差F_1-F_2在O中等于零, 我们就说F_1同F_2**在O中相等**. 如果广义函数F在开集O中等于零, 而且不存在另一个更大的开集$G\supset O$, $G\neq O$使F在G中等于零(即O为使F在其中等于零的最大开集), 那末就称闭集E^n-O是广义函数F的**支集**, 记为S_F.

显然当F是连续函数时, 这里的支集概念和通常的一致. 又如广义函数δ_a的支集为单元素集$\{a\}$. 还可以证明, 当$F\in K'$, D为任一微分运算时, DF的支集含在F的支集中.

定理 5　任何一个广义函数F必是一列支集有界的广义函数$\{F_m\}$的极限.

证　任取一列函数$\{\varphi_m(\cdot)\}\subset K$, 使得$\varphi_m(\cdot)$的支集在球$S_{m+1}=\{x\,|\,x\in E^n, |x|\leqslant m+1\}$中, 而且$\varphi_m(x)$在球$S_m$上恒为1. 这样

的 $\varphi_m(\cdot)$ 确实存在. 事实上，只要取

$$\varphi_m(x)=\int_{|y|\leqslant m+\frac{1}{2}}\varphi\left(x-y,\frac{1}{2}\right)dy\Big/\int_{|y|\leqslant\frac{1}{2}}\varphi\left(y,\frac{1}{2}\right)dy$$

其中 $\varphi\left(\cdot,\frac{1}{2}\right)$ 是(1.3)中的函数. 作广义函数 $F_m=\varphi_m F$，显然 F_m 的支集是有界的. 由于对任一个 $\varphi\in K$，它的支集是有界的，总有 $\varphi_m\varphi\xrightarrow{K}\varphi$，因此，$(F_m,\varphi)=(F,\varphi_m\varphi)\longrightarrow(F,\varphi)$. 所以 $F_m\xrightarrow{K'}F$. 证毕.

5. 有限级广义函数的构造 我们首先在基本函数空间 K 中引进一列内积如下：当 $p=0,1,2,\cdots$ 时

$$(\varphi,\ \psi)_p=\sum_{N(q)\leqslant p}\int(D^q\varphi(x))\overline{(D^q\psi(x))}\,dx,\quad \varphi、\psi\in K$$

又记

$$\|\varphi\|_p=\sqrt{(\varphi,\ \varphi)_p},\quad \varphi\in K$$

显然，当 $\{\varphi_m\}\subset K$，$\varphi\in K$ 而且 $\varphi_m\xrightarrow{K}\varphi$ 时，对每个 p 都有

$$\lim_{m\to\infty}\|\varphi_m-\varphi\|_p=0$$

记 K 按内积 $(\cdot,\cdot)_p$ 所成的内积空间为 K_p.

定义 设 $F:\varphi\longmapsto(F,\varphi)$ 是 K 上线性泛函，而且关于 $\|\cdot\|_p$ 为连续的，就是说，当 $\{\varphi_m\}\subset K$，$\varphi\in K$，而且 $\|\varphi_m-\varphi\|_p\to 0$ 时恒有 $(F,\varphi_m)\to(F,\varphi)$（这时，显然 $F\in K'$）. 那末称 F 是 p **级的广义函数**.

例如，当 f 是平方可积函数时，f 是零级广义函数. 如果 F 是 m 级广义函数，那末 D^qF 是 $m+N(q)$ 级的广义函数.

定理 6 设 $F\in K'$，那末 F 成为 p 级的广义函数的充要条件是对每个满足条件 $N(q)\leqslant p$ 的整数组 q 有相应的（按勒贝格测度）平方可积的函数 F_q，使 $F=\sum_{N(q)\leqslant p}D^qF_q$.

证 条件的充分性由

$$\left(\sum_{N(q)\leq p} D^q F_q,\ \varphi\right) = \sum_{N(q)\leq p} (-1)^{N(q)}(F_q, D^q\varphi)$$

立即可以得到. 今证必要性. 为了叙述简单一些起见, 我们只考察实函数空间. 作 Hilbert 空间 H_p 如下: 令

$$\Omega_p = \{q \mid q = (q_1, \cdots, q_n), q_j \geqslant 0, q_j \text{为整数}, q_1 + \cdots + q_n \leqslant p\}$$

我们把函数组$\{\varphi_q(\cdot) \mid \varphi_q \in L^2(E^n),\ q \in \Omega_p\}$(简记为$\{\varphi_q\}$)看成 H_p 中的一个向量. 当$\{\varphi_q(\cdot)\}$、$\{\psi_q(\cdot)\} \in H_p$ 时, 我们作

$$\xi_q(\cdot) = \alpha\varphi_q(\cdot) + \beta\psi_q(\cdot)$$

并定义$\{\xi_q(\cdot)\} = \alpha\{\varphi_q(\cdot)\} + \beta\{\psi_q(\cdot)\}$. 又规定 H_p 中的内积是

$$(\{\varphi_q(\cdot)\}, \{\psi_q(\cdot)\})_p = \sum_{q \in \Omega_p} \int \varphi_q(x)\psi_q(x)dx$$

那末这时 H_p 成为 Hilbert 空间. 记$\|\{\varphi_q\}\|_p = \sqrt{(\{\varphi_q\}, \{\varphi_q\})_p}$. 我们把 K_p 空间线性地嵌入 H_p, 就是说作 $K_p \to H_p$ 的线性算子

$$U: \varphi \to U\varphi = \{D^q\varphi\}$$

那末$\|\varphi\|_p = \|U\varphi\|_p$, 所以 U 是 K_p 到 H_p 中的保范算子. 设 F 是 K 上的 p 级广义函数, 那末必有常数 c 使得

$$|(F, \varphi)| \leqslant c\|\varphi\|_p \leqslant c\|U\varphi\|_p$$

作 UK_p 上的线性泛函 G: $\psi \longmapsto (F, U^{-1}\psi)$, $\psi \in UK_p$. 那末

$$|G(\psi)| \leqslant c\|\psi\|_p, \qquad \psi \in UK_p \tag{2.13}$$

记 $\tilde{H}_p$ 为 UK_p 在 H_p 中的闭包, 这时 $\tilde{H}_p$ 也成为 Hilbert 空间, 由于 UK_p 在 $\tilde{H}_p$ 中稠密, 由(2.13), 我们把 G 唯一地延拓成 $\tilde{H}_p$ 上的连续线性泛函, 我们把延拓后的泛函仍然记做 G. 对 $\tilde{H}_p$ 及 G 应用泛函表示定理(见第六章 § 4 定理 1), 立即可知有$\{G_p(\cdot)\} \in \tilde{H}_p$ 使得

$$G(\psi) = (\psi, \{G_p(\cdot)\})_p = \sum_{q \in \Omega_p} \int G_q(x)\psi dx, \qquad \psi \in \tilde{H}_p$$

特别当 $\psi = U\varphi$, $\varphi \in K$ 时, 上式化成

$$(F,\ \varphi)=\sum_{q\in\Omega_p}\int G_q(x)D^q\varphi(x)dx$$

只要取 $F_q=(-1)^{N(q)}G_q$，就得到 $F=\sum\limits_{N(q)\leq p}D^qF_q$ 了．证毕．

记 $\tilde{D}=\dfrac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}$，那末当 F 为局部可积时显然

$$F(x)=\tilde{D}\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\cdots\int_0^{x_n}F(y)dy_1\cdots dy_n$$

因此对每个 $F_q\in L^2(E)$ 必有连续函数 G_q 使得 $F_q=\tilde{D}G_q$．这样立即得到

系 设 F 是 p 级广义函数，那末必有连续函数族 G_q 使得

$$F=\sum_{N(q)\leq p+n}D^qG_q$$

例 5 我们来考察一元广义函数 $\delta^{(n)}(x)$，任意取定 K 中满足条件 $\psi(0)=1$ 的函数 ψ，容易看出，

$$\delta(x)=\psi(x)\delta(x)=\frac{d}{dx}(\theta(x)\psi(x))-\theta(x)\psi'(x)$$

由于 $\theta(x)\psi(x)\in L^2(-\infty,\infty)$，$\theta(x)\psi'(x)\in L^2(-\infty,\infty)$，所以 $\delta(x)$ 是一级广义函数．因此

$$\delta^{(n)}(x)=\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[\theta(x)\psi(x)]-\frac{d^n}{dx^n}[\theta(x)\psi'(x)]$$

是 $n+1$ 级的．由于

$$\delta(x)=\frac{d}{dx}\theta(x),\ \delta^{(n)}(x)=\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\theta(x)$$

我们作

$$x_+=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

它是连续函数，那末 $\delta^{(n)}(x)=\dfrac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}x_+$．它是连续函数 x_+ 的

$n+2$ 次广义导函数.

定理 7　任一具有有界支集的广义函数必是有限级的.

这个定理的证明要用到拓扑线性空间理论, 因此把它略去. 参看[15].

根据定理 5、6、7, 可以知道, 任何一个广义函数可以表示成一列连续函数的广义导函数的极限.

例 6　设 F 是一元的广义函数, 它的支集为 $\{a\}$, 那末必有正整数 p, 及常数组 $c_q, q=0,1,2,\cdots,p$ 使得

$$F=\sum_{q=0}^{p-1}c_q\delta_a^{(q)}\tag{2.14}$$

证　为书写简单起见, 不妨设 $a=0$. 根据定理 7, 必有自然数 p 使 F 是 p 级的. 由定理 6 的系, 必有 $p+2$ 个连续函数 G_q, $q=0,\cdots,p+1$ 使 $F=\sum\limits_{q=0}^{p+1}\left(\frac{d}{dx}\right)^q G_q$. 因此, 这时有连续函数 f 使

$$F=\left(\frac{d}{dx}\right)^{p+1}f$$

(事实上, $f=\sum\limits_{q=0}^{p+1}H_q$, 这里 H_q 为 G_q 的 $p+1-q$ 次不定积分). 由于在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 中 F 等于零, 根据本节习题 4,

$$f(x)=\begin{cases}\sum\limits_{q=0}^{p}a_q x^q, & x>0\\ \sum\limits_{q=0}^{p}b_q x^q, & x<0\end{cases}$$

(由 $f(x)$ 的连续性 $a_0=b_0$) 这样 $f(x)$ 又可以写成

$$f(x)=\sum_{q=0}^{p}x^q[b_q+(a_q-b_q)\theta(x)]$$

再根据本节习题 7 可知 F 形如(2.14).

6. 自共轭算子的广义特征展开 现在我们要用广义函数论来叙述自共轭算子的广义特征展开的概念. 当然这里的讨论全部可以推广到正常算子上去.

我们首先注意, 设 A 是复 Hilbert 空间 H 中的自共轭全连续算子, 根据第六章 §9 定理 8, 必有 H 中由 A 的特征向量组成的完备就范直交系 $\{e_n\}$, 以及相应的特征值 $\{\lambda_n\}$, 使得对一切 $\varphi\in H$, 有展开式

$$\varphi=\sum(\varphi, e_n)e_n \tag{2.15}$$

$$A\varphi=\sum\lambda_n(\varphi, e_n)e_n \tag{2.16}$$

(2.15—16)是相应于算子 A 的特征展开. 对于一般的自共轭算子可能不存在特征展开. 事实上, 第六章 §7 中已经举出过不存在任何特征向量的非零自共轭算子, 这样的算子当然不存在特征展开. 虽然对一般的自共轭算子, 有相当于特征展开式的谱分解式

$$I=\int dE(\lambda), \quad A=\int \lambda dE(\lambda)$$

然而在量子力学及微分方程理论中, 特征展开式将比谱分解式更为简单而方便. 因此就希望有类似于(2.15—16)的广义特征展开式.

我们这里不准备讨论一般情况, 而是去考察在量子力学和微分方程理论中常见的一种微分算子的情况.

设 $L^2(E^n)$ 是 n 维复欧几里得空间上关于勒贝格测度平方可积的复函数全体所成的 Hilbert 空间. 设 A 是 $L^2(E^n)$ 中的一个自共轭算子, 其定义域 $\mathscr{D}(A)$ 包含基本函数空间 K, 而且 A 是 K 到 K 中连续算子. 同时又设 A 是实算子, 即当 $\varphi\in\mathscr{D}(A)$ 时的一个 $\varphi\in\mathscr{D}(A)$ 而且 $A\varphi=\overline{(A\varphi)}$(例如 $A=\sum\limits_{N(q)\leq m}\alpha_q D^q$, 其中 α_q 为实数, 而且

当 $N(q)$ 为奇数时 $\alpha_q=0$)，这时我们考察 §1 中所说的由 A 产生的 K' 中的共轭算子 A'，即当 $F\in K'$ 时令 $A'F$ 为如下的泛函：

$$(A'F, \varphi)=(F, A\varphi)①, \varphi\in K$$

特别，当 $F\in\mathscr{D}(A)$ 时，F 作为正则的广义函数应有

$$(A'F, \varphi)=(F, A\varphi)=\int F(x)(A\varphi)(x)dx \quad \varphi\in K$$

由于 A 是实的自共轭算子，上式又等于

$$\int (AF)(x)\varphi(x)dx=(AF, \varphi)$$

所以，当 $F\in\mathscr{D}(A)$ 时 $A'F=AF$，因此共轭算子 A' 是 A 在 K' 上的延拓：$A\subset A'$

如果对于数 λ，有 $F\in K'$，$F\neq 0$ 使

$$A'F=\lambda F$$

就称 F 是 A 的（相应于特征值 λ 的）广义特征向量，当 F 又属于 $\mathscr{D}(A)$ 时，广义特征向量（广义特征值）就相应地还原为通常特征向量（特征值）.

如果存在有限个或可列个特征值 $\{\lambda_n\}$，和相应的就范直交特征向量系 $\{f_{\lambda_n}\}\subset\mathscr{D}(A)$，又对每个自然数 n，有直线上的 Borel 集 B_n，这些 B_n 中有些或全部可以是空集，而且可以彼此相交，使得对每个 $\lambda\in B_n$，有 A 的相应于广义特征值 λ 的广义特征向量 f_λ，使得对每个 $\varphi\in K$，(f_λ, φ) 是 $\lambda\in B_n$ 上的 Borel 可测函数，而且对一切 φ、$\psi\in K$ 成立着

$$\int\varphi(x)\overline{\psi(x)}dx=\sum_n(f_{\lambda_n}, \varphi)\overline{(f_{\lambda_n}, \psi)}+\sum_n\int_{B_n}(f_\lambda, \varphi)\overline{(f_\lambda, \psi)}d\lambda \qquad (2.17)$$

① 这里 (F, φ) 表示泛函 F 在 φ 处的值而不是 F 与 φ 的内积.

那末就称$\{f_{\lambda_n}\}\cup\{f_\lambda \mid \lambda\in B_n, n=1,2,\cdots\}$组成$A$的完备的就范直交广义特征向量系，这时有如下的广义特征展开式①：当$\varphi\in K$时，

$$\varphi=\sum_n (f_{\lambda_n},\varphi)f_{\lambda_n}+\sum_n\int_{B_n}(f_\lambda,\varphi)f_\lambda d\lambda \qquad (2.18)$$

$$A\varphi=\sum_n (f_{\lambda_n},\varphi)\lambda_n f_{\lambda_n}+\sum_n\int_{B_n}(f_\lambda,\varphi)\lambda f_\lambda d\lambda \qquad (2.19)$$

(2.19)显然是可以由(2.18)立即推出来的。

我们这里不准备给出关于$L^2(E^n)$上实的自共轭算子存在完备就范直交广义特征向量系的条件，对于具体的微分算子要具体地判断，我们只给出如下的简单的例来说明广义特征展开的概念。

例7　设A是$L^2(E^1)$中如下的乘法算子：当$f\in L^2(E^1)$时

$$(Af)(x)=xf(x) \qquad x\in E^1$$

这时容易验证$\{\delta(\cdot,-\lambda)\mid\lambda\in(-\infty,\infty)\}$是$A$的完备就范直交广义特征向量系。

习　题

1. 设e_ν是E^n中的向量，$e_\nu=(\delta_{1\nu},\delta_{2\nu},\cdots,\delta_{n\nu})$，$\nu=1,2,\cdots,n$（当$\mu\neq\nu$时$\delta_{\mu\nu}=0$，$\delta_{\nu\nu}=1$）。设$\tau_t^{(\nu)}$是$E^n$中平移变换

$$\tau_t^{(\nu)}: x\longmapsto x+te_\nu,\quad x\in E^n$$

证明：当F是n元的广义函数时，$\dfrac{\partial F}{\partial x_\nu}=\lim\limits_{n\to\infty} n(\tau_{-\frac{1}{n}}^{(\nu)}F-F)$。

2. 设$t>0$是参数，考察E^1上的函数

$$f_t(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

证明：当$t\to 0$时$f_t(\cdot)\xrightarrow{K'}\delta(\cdot)$。

---

① 这里(2.18)应理解为(2.17)，而(2.19)即理解为对任何$\psi\in K$，$A\varphi$与ψ的内积为

$$(A\varphi,\psi)=\sum_n (f_{\lambda_n},\varphi)\lambda_n\overline{(f_{\lambda_n},\psi)}+\sum_n\int_{B_n}\overline{(f_\lambda,\varphi)}\lambda(f_\lambda,\psi)d\lambda$$

3. 证明函数列$\left\{\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x}\middle| n=1,2,\cdots\right\}$是$\delta$-式函数列.

4. 设F是一元广义函数，m是一个非负整数，而且在一个开区间(a, b)中$\frac{d^m}{dx^m}F=0$. 证明F在(a, b)上等于一个次数小于m的多项式.

5. 设$f\in L^*$是一元函数，$F\in K'$是一元广义函数，而且存在一组常数c_1、$\cdots$、c_p使

$$\frac{d^p}{dx^p}F+c_1\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}F+\cdots+c_pF=f$$

证明：$F\in L^*$，而且F就是上述常微分方程的普通解.

6. 证明(2.12)式.

7. 设u_q、$v_q(q=0, 1, 2, \cdots, p)$是常数，将

$$\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}\sum_{q=0}^{p}x^q(u_q+v_q\theta(x))$$

表示成δ函数及其导数的线性组合的表达式.

§3 广义函数的 Fourier 变换

在本节中关于概念和结果的陈述都是对于多元函数来进行的. 但是证明只限于一元函数的情况，读者可自行推广到多元函数.

1. 基本函数的 Fourier 变换 我们先来考察K空间中函数的 Fourier 变换. 为了书写简单起见，当$x=(x_1, \cdots, x_n)$时，记$dx=dx_1\cdots dx_n$；如果$\sigma=(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$，那末记$x\cdot\sigma=\sum_{j=1}^{n}x_j\sigma_j$； 当$q=(q_1, \cdots, q_n)$时，记$\sigma^q=\sigma_1^{q_1}\cdots\sigma_n^{q_n}$.

定义 设$\varphi(\cdot)\in K$，作

$$\psi(\sigma)=\int_{E^n}\varphi(x)e^{i\sigma\cdot x}dx \tag{3.1}$$

称它是 $\varphi(\cdot)$ 的 Fourier 变换①，记为 $\widetilde{\varphi}(\cdot)$ 或 $F(\varphi)$. 也称映照 F: $\varphi\longmapsto\widetilde{\varphi}$ 为 Fourier 变换. 又称它的逆映照 F^{-1} 为 Fourier 逆变换. 我们把 K 中函数的 Fourier 变换全体所成的线性空间记为 $Z=FK$. 又在 Z 中引进极限概念如下：设 $F(\varphi_n)\in Z, F(\varphi)\in Z$; 那末当 $\varphi_n\xrightarrow{K}\varphi$ 时，称函数列 $\{F(\varphi_n)\}$ 在 Z 中收敛于 $F(\varphi)$，记为 $F(\varphi_n)\xrightarrow{Z}F(\varphi)$.

定理 1 （基本函数的 Fourier 变换的基本性质）

(1) 对任一多项式 p 和 $\varphi\in K$，有②

$$p(D)F(\varphi)=F(p(i(\cdot))\varphi) \tag{3.2}$$

$$p(\cdot)F(\varphi)=F(p(iD)\varphi) \tag{3.3}$$

(2) 当 φ、$\psi\in K$ 时，记 $(\varphi,\psi)_K=\int\varphi\overline{\psi}dx$，当 f、$g\in Z$ 时，记 $(f,g)_Z=\int f\overline{g}d\sigma$，那末

$$(2\pi)^n(\varphi,\psi)_K=(F(\varphi),F(\psi))_Z \tag{3.4}$$

(3) F 的逆映照 $F^{-1}:Z\to K$ 有表达式

$$F^{-1}(f)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int f(\sigma)e^{-i\sigma\cdot x}d\sigma \tag{3.5}$$

(4) 设 $t=(t_1,\cdots,t_n)$，算子 τ_t: $\varphi(\cdot)\longmapsto\varphi((\cdot)+t)$ 既可以看成是 $K\to K$ 的算子，又可以看成 $Z\to Z$ 的算子，而且

$$F(\tau_t\varphi)=e^{-i(\cdot)\cdot t}F(\varphi),\quad \tau_tF(\varphi)=F(e^{it\cdot(\cdot)}\varphi) \tag{3.6}$$

证 (3.2)、(3.6) 可以通过直接计算而得，(3.3) 可以通过分部积分得到（参见第三章 §8），(3.4) 是第六章 §8 中的推论. 证毕.

现在我们来研究基本函数空间 Z.

---

① 我们这里定义的 Fourier 变换是 L^1-Fourier变换（参见第三章§4）.

② 如果 $p(s)=\sum_{N(q)\leq p}C_qs^q$，那末 $p(D)$ 表示求导运算 $\sum_{N(q)\leq p}C_qD^q$.

定理 2　函数 $\psi(\cdot)\in Z$ 的充要条件是 ψ 可以解析开拓为 n 维复空间上的整函数①，而且有正数 a，使得对一切非负整数组 $q=(q_1, \cdots, q_n)$，

$$|s^q\psi(s)|\leqslant c_q e^{a|\tau|} \tag{3.7}$$

其中 c_q 为与 q 和 ψ 有关的常数，$s=\sigma+i\tau$②. 又 $\psi_m \xrightarrow{z} 0$ 的充要条件是存在正数 a，使得对每个非负整数组 $q=(q_1, \cdots, q_n)$，存在常数 c_q 满足不等式

$$|s^q\psi_m(s)|\leqslant c_q e^{a|\tau|},\quad m=1,2,\cdots,\quad s=\sigma+i\tau \tag{3.8}$$

同时函数列 $\{\psi_m(\sigma)\}$ 在 E^n 的任一有界区域中一致收敛于零.

证　只讨论一元函数情况. 设 $\psi\in Z$，就是说有 $\varphi\in K$ 使得 $\psi=F(\varphi)$. 又设 φ 的支集在 $|x|\leqslant a$ 中. 由于 $\psi(\sigma)=\int_{-a}^{a}\varphi(x)e^{i\sigma x}dx$，而 $\psi(s)=\int_{-a}^{a}\varphi(x)e^{isx}dx$ 显然是复变数 $s=\sigma+i\tau$ 的整函数，因此 $\psi(\sigma)$ 可以解析开拓为整函数 $\psi(s)$. 由(3.3)容易知道，对任何非负整数 q，有

$$\begin{aligned}|s^q\psi(s)|&=\left|\int_{-a}^{a} i^q\varphi^{(q)}(x)e^{ixs}dx\right|\leqslant\int_{-a}^{a}|\varphi^{(q)}(x)|e^{-x\tau}d\tau\\&\leqslant\int_{-a}^{a}|\varphi^{(q)}(x)|dx e^{a|\tau|}\end{aligned}$$

因此(3.7)成立，其中 $c_q=\int_{-a}^{a}|\varphi^{(q)}(x)|dx$.

---

① 对于多元复变函数 $\psi(s_1, \cdots, s_n)$，如果

$$\lim_{h\to 0}\frac{\psi(s_1,\cdots,s_k+h,\cdots,s_n)-\psi(s_1,\cdots,s_n)}{h}$$

存在，则称 $\frac{\partial\psi}{\partial s_k}$ 存在，如果在一个 n 维的复区域 D 中函数 ψ 是连续的，而且 $\frac{\partial\psi}{\partial s_k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 存在，则称 ψ 在此区域中是解析的. 这时整函数、解析开拓等概念和单复变情况相仿.

② $s=(s_1,\cdots,s_n)$ 是复数组，$\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ 和 $\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 是实数组.

反过来，如果整函数 $\psi(s)$满足(3.7)，记 $c=c_0+c_2$，那末由(3.7)可知

$$|\psi(s)|\leqslant\frac{c}{1+|s|^2}e^{a|\tau|},\quad s=\sigma+i\tau \tag{3.9}$$

我们作函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

利用围道积分和(3.9)，容易证明对任何 τ

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma+i\tau)e^{-i(\sigma+i\tau)x}d\sigma \tag{3.10}$$

取 τ 使 $\tau x=-|\tau x|$，再利用(3.9)就得到估计式

$$|\varphi(x)|\leqslant\frac{ce^{\tau x+a|\tau|}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma}{1+|\sigma+i\tau|^2}\leqslant c'e^{-|\tau|(|x|-a)}$$

此地 $c'=\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma}{1+\sigma^2}$是和 τ、x 都无关的常数．令$|\tau|\to+\infty$，就知道当 $|x|>a$ 时 $\varphi(x)=0$．因此 $\varphi(x)$的支集是有界的．利用(3.7)和(3.10)可证明

$$\varphi^{(q)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-is)^q\psi(s)e^{-isx}d\sigma$$

因此函数 $\varphi(\cdot)$是无限次可微的，这样便有 $\varphi\in K$．容易证明这时 $F(\varphi)=\psi$，因此 $\psi\in Z$．

由以上证明过程可以看出，如果$\{\psi_m\}\subset Z$，$\psi_m=F(\varphi_m)$而且(3.8)成立，那末$\{\varphi_m\}$的支集都含在$|x|\leqslant a$中．因为

$$\begin{aligned}|\varphi_m^{(q)}(x)|&=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^q\psi_m(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma\right|\\&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{|\sigma|\geqslant R}c_{q+2}\frac{d\sigma}{\sigma^2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\sigma^q|\psi_m(\sigma)|d\sigma\end{aligned}$$

对任何 $\varepsilon>0$，取 R 使$\frac{1}{2\pi}c_{q+2}\frac{2}{R}<\frac{\varepsilon}{2}$，如果$\{\psi_m(\sigma)\}$又在有界区间

中一致收敛于零，再取 m 充分大，使 $\int_{-B}^{B}\sigma^q|\psi_m(\sigma)|d\sigma<\frac{\varepsilon}{2}2\pi$，就知道 $\{\varphi_m^{(q)}(x)\}$ 一致收敛于零．即 $\varphi_m\xrightarrow{K}0$．反过来，当 $\varphi_m\xrightarrow{K}0$ 时记 $\psi_m=F(\varphi_m)$ 也容易证明 ψ_m 应当满足定理中的条件．证毕．

2. Z 空间上的连续线性泛函 由于 Z 空间也是一个线性空间，其中有极限运算而且线性运算是连续的，因此我们可以象对 K 空间那样考察 Z 空间上的连续线性泛函——广义函数．

定义 称 Z 空间上的连续线性泛函是 Z 空间上的广义函数，其全体也称为广义函数空间，记为 Z'．

在 Z' 中可以仿照 K' 中一样地定义线性运算、求导运算和极限运算．这些我们不详细叙述，由读者自行补充．我们仿照空间 K' 中的情况，设 $g\in Z'$，如果存在局部勒贝格可积函数 $g(\sigma)$，使得对每个 $\psi\in Z$，函数 $\psi(\cdot)g(\cdot)$ 在 E^n 上是勒贝格可积的，而且

$$(g,\psi)=\int g(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma,\quad \psi\in Z$$

那末称 g 是正则泛函．

Z 空间有与 K 不同的地方．对于 $\psi\in Z$，由定理2，可以视 ψ 是定义域为复空间的整函数，我们可以把广义函数表示成复空间上解析函数的积分．

例1 考察 n 元函数：设 s_0 是任意一组复数 $(s_{01},s_{02},\cdots,s_{0n})$，记 $\delta(\cdot-s_0)$ 为泛函

$$(\delta(\cdot-s_0),\psi)=\psi(s_0),\quad \psi\in Z$$

这个泛函显然属于 Z'．也称它是 δ- 函数．当 s_0 是一组实数时，$\delta(\cdot-s_0)$ 显然不是正则泛函．但一般说来，对任何 s_0，$\delta(\cdot-s_0)$ 可以用复空间中函数的积分来表达．我们只就一元函数来说明这点．设 s_0 是一个复数．任取一个以 s_0 为中心的正向的圆周形围道，由柯西积分公式就得到

$$(\delta(\cdot-s_0),\psi)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\psi(s)}{s-s_0}ds$$

现在我们考虑更一般的用复空间上积分表示的广义函数.

设L是n维复空间中的一个光滑的n维曲面，这曲面以$u=(u_1,\cdots,u_n)$为参数，设$s=s(u)$为曲面的参数方程，记$\det\left(\frac{\partial s_i}{\partial u_j}\right)(i,j=1,2,\cdots,n)$是变换$(u_1,\cdots,u_n)\longmapsto(s_1,\cdots,s_n)$的Jacobian. 令$ds=\det\left(\frac{\partial s_i}{\partial u_j}\right)du_1\cdots du_n$. 设$g$是$L$上的一个函数，它使得函数$u\longmapsto g(s(u))$是勒贝格可测的，而且对每个$\psi\in Z$, $\psi(s(\cdot))g(s(\cdot))$是$E^n$上的勒贝格可积函数，那末当

$$(g,\psi)=\int_L g(s)\psi(s)ds,\qquad \psi\in Z$$

是Z上的连续线性泛函时就称这个泛函是**解析泛函**. 如例1中所述$\delta(\cdot-s_0)$是解析泛函，正则泛函也是解析泛函. 下面我们将看出解析泛函可以用来表达微分方程的解.

例2 现在讨论一元函数组的一类解析函数，设$p(s)$是一个复变数s的m次多项式，设α_1、$\cdots$、α_m是它的m个零点(为简单起见，设$\alpha_i\neq\alpha_j$ $(i\neq j)$)，记$r_k=\mathrm{Im}\alpha_k$, $k=1,2,\cdots,m$. 任取实数τ, $\tau\neq r_k$, $k=1,2,\cdots,m$, 我们作一元基本函数空间Z上的解析泛函g_τ如下:

$$(g_\tau,\psi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(\sigma+i\tau)}{p(\sigma+i\tau)}d\sigma$$

我们注意这个解析泛函和τ的位置有关. 如果$r_1<r_2<\cdots<r_m$, 利用围道积分可知，当$r_k<\tau<r_{k+1}$时，g_τ与τ无关，把这个泛函记为$g_{(k)}$, $g_{(0)}$表示当$\tau<r_1$时的g_τ, $g_{(m)}$表示当$\tau>r_m$时的g_τ, 这时

$$(g_{(k+1)},\psi)-(g_{(k)},\psi)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\sigma+i\tau_{k+1})}{p(\sigma+i\tau_{k+1})}d\sigma-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\sigma+i\tau_k)}{p(\sigma+i\tau_k)}d\sigma$$

其中 $r_k<\tau_k<r_{k+1}<\tau_{k+1}<r_{k+2}$. 由于在直线 $\tau=\tau_k$ 与 $\tau=\tau_{k+1}$ 之间，函数 $\frac{\psi(s)}{p(s)}$, $(s=\sigma+i\tau)$ 只可能有一次极点 α_{k+1}. 利用留数定理可知

$$(g_{(k+1)},\psi)-(g_{(k)},\psi)=-2\pi i\frac{\psi(\alpha_{k+1})}{p'(\alpha_{k+1})}$$

$$g_{(k+1)}-g_{(k)}=-2\pi i\frac{1}{p'(\alpha_{k+1})}\delta(\cdot-\alpha_{k+1})$$

也就是说，它不为零. 因此，尽管相应于同一函数 $\frac{1}{p(s)}$, 由于积分路径不一样，所得的解析泛函一般也不一样. 这个例暂时讨论到这里.

现在来讨论 Z' 空间上的乘法运算. 我们令 $\xi(s)$ 为 n 维复空间上的整函数，而且存在正数 a、b 和 c, 使得

$$|\xi(s)|\leqslant c(|s|^b+1)e^{a|\tau|},\qquad s=\sigma+i\tau$$

其中 $|s|=\sqrt{|s_1|^2+\cdots+|s_n|^2}$. 这种函数全体记为 Y. 显然当 $\xi\in Y$, $\psi\in Z$ 时，$\xi\psi\in Z$, 即 ξ 是 Z 的一个乘子，Y 是 Z 空间的乘子空间. 完全类似于 K' 与 E 的乘法运算，可以定义 Z' 与 Y 的乘法运算. 显然任一多项式都在 Y 中，因此多项式是 Z' 的乘子.

例 2(续) 容易看出，对任何 k,

$$(pg_{(k)},\psi)=(g_{(k)},p\psi)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma+i\tau_k)d\sigma=\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot\psi(\sigma)d\sigma$$

因此

$$pg_{(k)}=1,\quad k=0,1,2,\cdots,m \tag{3.11}$$

所以对给定的 p, 代数方程 $pg=1$ 在 Z' 中至少有 m 个线性无关的解

$$g=g_{(0)}+\sum_{k=1}^{m}c_k(g_{(k)}-g_{(0)}) \tag{3.12}$$

事实上，可以证明这就是方程 $pg=1$ 在 Z' 中的通解.

3. 广义函数的 Fourier 变换的概念 在这一段中，当 f、$g\in L^2(E^n)$（复空间）时，不管 f、g 是实的还是复的，我们用 (f,g) 表示积分

$$\int f(x)g(x)dx$$

我们又作 $L^2(E^n)$ 中的算子

$$J:\varphi(\cdot)\longrightarrow\varphi(-(\cdot))$$

我们首先注意当 $f\in K$ 时，f 可以看成 K' 中的广义函数，这时由(3.4)得到

$$\begin{aligned}(2\pi)^n(f,J\varphi)&=(2\pi)^n\int f(x)J\varphi(x)dx=(2\pi)^n(f,\overline{\overline{J\varphi}})_2\\&=(F(f),F(\overline{J\varphi}))_2=(F(f),\overline{F(J\varphi)})\\&=(F(f),F(\varphi))\end{aligned}$$

因此，如果把 $F(f)$ 看成 Z 空间上的连续线性泛函，那末有公式

$$(2\pi)^n(f,J\varphi)=(F(f),F(\varphi)),\quad \varphi\in K \tag{3.13}$$

事实上，这个公式对一切 $f\in L^2(E^n)$ 也成立. 利用这个公式我们定义广义函数的 Fourier 变换如下：

定义 设 $f\in K'$，作 Z 上的连续线性泛函

$$F(f):\ \psi\longmapsto(2\pi)^n(f,JF^{-1}(\psi)),\qquad \psi\in Z \tag{3.14}$$

称它是广义函数 f 的 Fourier 变换，有时也记为 $\tilde{f}$. 我们也把映照 F: $f\longmapsto F(f)$, $f\in K'$ 称做（广义函数空间 K' 上的）Fourier 变换，它的逆映照 F^{-1} 称做（广义函数空间 Z' 上的）Fourier 逆变换.

显然(3.14)等价于(3.13). 因此，我们也可以把(3.13)看成广义函数 Fourier 变换的定义公式. 另外，对于任何 $g\in Z'$，我们可以作 K' 中的广义函数

$$f:\varphi\longmapsto(2\pi)^{-n}(g,F(J\varphi))$$

这时$(f, J\varphi)=(g, F(\varphi))$, $\varphi\in K$, 因此 $g=F(f)$. 所以有

定理 3 (广义函数的 Fourier 变换的基本性质) K' 中的 Fourier 变换

$$F: f\longmapsto F(f),\quad f\in K'$$

是 K' 到 Z' 上的一对一的连续线性算子. 它有如下的性质:

(1) 对任一多项式 p 及 $f\in K'$ 有

$$p(D)F(f)=F(p(i(\cdot))f) \tag{3.2'}$$

$$p(\cdot)F(f)=F(p(iD)f) \tag{3.3'}$$

(2) 设 $t=(t_1, \cdots, t_n)$, 作 τ_t 的共轭算子 τ_t': $f\longmapsto\tau_t' f$, 其中

$$(\tau_t' f, \varphi)=(f, \tau_t\varphi)$$

那末 $F(\tau_t' f)=e^{+i(\cdot)\cdot t}F(f)$, $\tau_t' F(f)=F(e^{-i(\cdot)\cdot t}f)$, $f\in K'$ (3.6′)

证 我们只证 (3.2′), 其余留给读者证明. 当 $\varphi\in K$ 时, 由 (2.4)、(3.2) 和 (3.13), 我们有

$$\begin{aligned}
&(p(D)F(f), F(\varphi))=(F(f), p(-D)F(\varphi))\\
&=(F(f)F(p(-i(\cdot))\varphi)=(2\pi)^n(f, J[p(-i(\cdot))\varphi])\\
&\qquad=(2\pi)^n(f, p(+i(\cdot))J\varphi)\\
&\qquad=(2\pi)^n(p(i(\cdot))f, J\varphi)\\
&\qquad=(F(p(i(\cdot))f), F(\varphi))
\end{aligned}$$

因此 (3.2′) 成立. 证毕.

下面先来考察 n 元广义函数的 Fourier 变换的例.

例 3
$$F(\delta)=1,\qquad F(1)=(2\pi)^n\delta. \tag{3.15}$$

证 事实上, 如果记 $\psi(\cdot)=F(\varphi)$, $\varphi\in K$, 那末由 (3.13)

$$(F(\delta), \psi)=(2\pi)^n(\delta, J\varphi)=(2\pi)^n(J\varphi)(0)=(2\pi)^n\varphi(0)$$

但另一方面, 由普通函数的 Fourier 逆变换的公式有

$$\varphi(0)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)d\sigma$$

因此$(F(\delta),\psi)=(1,\psi)$，这就得到 $F(\delta)=1$. 另一方面，又有

$$(F(1),\psi)=(2\pi)^n(1,J\varphi)=(2\pi)^n\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$$

$$=(2\pi)^n\psi(0)=((2\pi)^n\delta,\psi)$$ 证毕.

利用(3.15)和(3.2′)、(3.3′)可知对于多项式$p(\cdot)$成立着

$$F(p(x))=(2\pi)^n p(-iD)\delta(\sigma),\ F(p(D)\delta(x))=p(-i\sigma). \tag{3.16}$$

我们又可以把(3.15)中的第二式推广成

$$F(e^{b\cdot x})=(2\pi)^n\delta(s-ib) \tag{3.17}$$

事实上，由于$e^{b\cdot x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b\cdot x)^n}{n!}$，这个级数是在任一有限区域上一致收敛的，因此，作为广义函数级数，它也是收敛的. 当$\psi=F(\varphi)$，$\varphi\in K$ 时，利用(3.13)、(3.16)得到

$$(F(e^{b\cdot x}),\psi)=(2\pi)^n(e^{b\cdot x},J\varphi)=(2\pi)^n\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(b\cdot x)^m}{m!},J\varphi\right)$$

$$=(2\pi)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}((b\cdot x)^m,J\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(F((b\cdot x)^m),\psi)$$

$$=(2\pi)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}((-ib\cdot D)^m\delta(\sigma),\psi(\sigma))$$

$$=(2\pi)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(ib\cdot D)^m\psi(s)|_{s=0}$$

利用多元解析函数的 Taylor 公式，上式又等于

$$(2\pi)^n\psi(ib)=(2\pi)^n(\delta(s-ib),\psi(s))$$ 证毕.

下面我们写出常用的一元广义函数的 Fourier 变换的一个简表.

编号 广义函数 $f(x)\in K'$ Fourier 变换 $\tilde{f}(\sigma)\in Z'$

0	$f(x)\in L(-\infty,\infty)$	$\tilde{f}(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ix\sigma}dx$
1	$\delta(x-a)$	$e^{ia\sigma}$
2	e^{bx}	$2\pi\delta(s-ib)$
3	$x^n,\ n=0,1,2,\cdots$	$2\pi\left(-i\frac{d}{d\sigma}\right)^n\delta(\sigma)$
4	$\frac{1}{x}$	$i\pi\ \mathrm{sign}\,\sigma$
5	$\frac{1}{x^2}$	$-\pi\lvert\sigma\rvert$
6	$\ln\lvert x\rvert$	$i\Big[(\sigma+i0)^{-1}\Big(c+i\frac{\pi}{2}-\ln(\sigma+i0)\Big)-(\sigma-i0)^{-1}\Big(c-i\frac{\pi}{2}-\ln(\sigma-i0)\Big)\Big]$①
7	$\theta(x)$	$\frac{i}{\sigma}+\pi\delta(\sigma)$
8	$\sin x$	$i\pi[\delta(\sigma-1)-\delta(\sigma+1)]$
9	$\cos x$	$\pi[\delta(\sigma+1)+\delta(\sigma-1)]$

4. 广义函数的卷积 在经典分析数学中经常用到两个函数的卷积. 设 f、$g\in L^*$, 而且 f 的支集是有界的, 那末容易知道(参看第三章 §5 习题 5)函数

$$h(x)=\int f(x-t)g(t)dt \tag{3.18}$$

也是局部勒贝格可积的. 我们称 h 为函数 f 和 g 的卷积, 记为 $h=f*g$. 我们还可以知道, 如果 f、$g\in L^*$, g 具有有界支集, 那末(3.18)中积分也存在, 而且函数 h 仍然属于 L^*; 如果 f, $g\in L^1$, 那

① 其中 $c=\int_0^{\infty}\ln x e^{-x}dx$

末 $h\in L^1$，同时 $f*g=g*f$. 当 $\varphi\in K$ 时，利用 Fubini 定理，我们又得到

$$(f*g,\varphi)=\iint f(x-t)g(t)\varphi(x)dxdt$$
$$=\int g(t)\left(\int f(x-t)\varphi(x)\,dx\right)dt$$

由勒贝格积分的平移不变性，它又等于$\int g(t)\left(\int f(x)\varphi(x+t)dx\right)dt$，因此

$$(f*g,\varphi)=(g(t),(f,\tau_t\varphi)),\ \varphi\in K \tag{3.19}$$

我们现在要利用(3.19)来定义广义函数的卷积.

设 $\varphi\in K$, $f\in K'$，而且 f 的支集有界，我们首先证明 E^n 上的函数 u: $t\longmapsto u(t)=(f,\ \tau_t\varphi)$ $(t=(t_1,\cdots,t_n)\in E^n)$ 属于 K. 我们注意函数 $\tau_t\varphi(x)=\varphi(x+t)$ 的支集 S_t 可以由 φ 的支集经过平移 $x\longmapsto x-t$ 而得到，由于广义函数 f 的支集 S_f 有界，因此当 $|t|=(t_1^2+\cdots+t_n^2)^{1/2}$ 充分大时，S_t 和 S_f 不交，$u(t)=0$. 另一方面，容易证明

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t_\nu}=\left(f,\frac{\partial}{\partial t_\nu}\tau_t\varphi\right)=\left(f,\tau_t\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\right)$$

因此函数 $u(\cdot)\in K$. 我们把函数 $u(\cdot)$ 写成 $(f,\tau_{(\cdot)}\varphi)$. 当$g\in K'$时，我们把 (g,u) 写成 $(g,(f,\tau_{(\cdot)}\varphi))$. 那末，容易证明 $\varphi\longmapsto(g,(f,\tau_{(\cdot)}\varphi))$ 是 K' 中的广义函数.

定义 设 f、$g\in K'$ 而且 f 是具有有界支集的，称广义函数

$$f*g:\ \varphi\longmapsto(g,(f,\tau_{(\cdot)}\varphi)),\ \varphi\in K \tag{3.20}$$

为广义函数 f 与 g 的卷积.

我们可以把(3.20)写成(3.19)，因此(3.19)就是广义函数的卷积的定义公式. 前面已经证明，当 f、$g\in L^*$，f 的支集有界时，(3.19)也成立. 因此这里广义函数的卷积是通常函数卷积的推广.

我们可以把卷积看成广义函数空间的某种乘法运算，那末，δ-函数是这种乘法的单位元．就是说，当 $g\in K'$ 时，

$$\delta * g = g \tag{3.21}$$

事实上，由卷积定义可知，当 $\varphi\in K$ 时

$$(\delta * g, \varphi) = (g, (\delta, \tau_{(\cdot)}\varphi)) = (g, \varphi(\cdot))$$

立即得到 (3.21)．可以证明当$\{f_\nu\}$ 是支集均匀有界的 δ-式函数列时，$f_\nu * g = g * f_\nu \to g$．所以 δ- 式函数列可以看成卷积的近似单位元．

容易证明，这种乘法服从分配律，就是当 $f、g、h\in K'$，α、β 为数，f 的支集有界时

$$f*(\alpha g+\beta h) = \alpha f*g + \beta f*h$$

定理 4 (Fourier 变换的卷积定理)　设 $f、g\in K'$，f 的支集是有界的，$F(f)$是正则广义函数而且 $F(f)(\sigma)$是 Z 的乘子，那末

$$F(f*g) = F(f)F(g) \tag{3.22}$$

证　设 $\psi = F(\varphi)$，$\varphi\in K$，那末由(3.13)、(3.20)或(3.19)有

$$\begin{aligned}(F(f*g), \psi) &= (2\pi)^n(f*g, J\varphi) = (2\pi)^n(g, (f, \tau_{(\cdot)}J\varphi))\\ &= (2\pi)^n(g, J(f, \tau_{-(\cdot)}(J\varphi)))\\ &= (F(g), F(f, \tau_{-(\cdot)}J\varphi))\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}(F(g), F(F(f), F(J\tau_{-(\cdot)}J\varphi)))\end{aligned} \tag{3.23}$$

然而

$$F(J\tau_{-t}J\varphi) = \int e^{ix\sigma}\varphi(t+x)dx = e^{-it\sigma}\psi(\sigma)$$

所以

$$(F(f), F(J\tau_{-t}J\varphi)) = \int e^{-it\sigma}F(f)(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma$$

由于 $F(f)$为 Z 的乘子，所以 $F(f)(\cdot)\psi(\cdot)\in Z$，因此

$$(F(f), F(J\tau_{-(\cdot)}J\varphi)) = (2\pi)^n F^{-1}(F(f)\psi)$$

把它代入(3.23)，我们得到

$$(F(f*g), \psi) = (F(g), F(f)\psi)$$

然而由于 $F(f)$ 也是 Z' 的乘子，所以

$$(F(f*g), \psi) = (F(g)F(f), \psi)$$

这就是(3.22). 证毕.

卷积在下述意义下服从交换律.

系 设 f、$g \in K'$，f、g 的支集都是有界的而且 $F(f)$ 和 $F(g)$ 都是正则广义函数，同时 $F(f)(\sigma)$ 和 $F(g)(\sigma)$ 都是 Z 空间中的乘子，那末

$$f*g = g*f \tag{3.24}$$

证 由(3.22)可知

$$F(f*g) = F(g)F(f) = F(f)F(g) = F(g*f)$$

即 $F(f*g-g*f)=0$，由此立即可知(3.24)成立. 证毕.

例4 设 p 是任一多项式，$g \in K'$ 那末

$$(p(D)\delta)*g = p(D)g$$

证 当 $\varphi \in K$ 时，由于 $p(D)\tau_{-t}\varphi = \tau_{-t}p(D)\varphi$，从(3.19)我们得到

$$\begin{aligned}((p(D)\delta)*g, \varphi) &= (g, (p(D)\delta, \tau_{(\cdot)}\varphi)) \\ &= (g, (\delta, p(-D)\tau_{(\cdot)}\varphi)) = (g, p(-D)\varphi(\cdot)) \\ &= (p(D)g, \varphi)\end{aligned}$$

证毕.

5. 常系数线性偏微分方程的基本解 现在我们要应用广义函数理论，特别是广义函数的 Fourier 变换理论来研究常系数偏微分方程的求解问题.

定义 设 p 是 n 个变元的多项式，$g \in K'$，如果

$$p(D)g = \delta \tag{3.25}$$

那末就称 g 是常系数偏微分方程

$$p(D)h=f \tag{3.26}$$

的基本解.

定理 5 设 g 是常系数偏微分方程 (3.26) 的基本解, 又设 $f\in K'$, f 具有有界支集, 而且 $F(f)$ 是正则广义函数又是 Z 空间中的乘子, 那末 $h=f*g$ 是 (3.26) 的解.

证 作 $h=f*g$, 我们利用 Fourier 变换来验证 (3.26). 由 (3.2′)、(3.3′)、(3.15) 和 (3.22) 立刻得到

$$\begin{aligned}F(p(D)h)&=p(-i(\cdot))F(h)=p(-i(\cdot))F(g)F(f)\\&=F(p(D)g)F(f)=F(\delta)F(f)=F(f)\end{aligned}$$

因此 $F(p(D)h-f)=0$, 由此即得 (3.26). 证毕.

例如, 当 (3.26) 的右端 $f\in K$ 时, f 满足定理 5 中的条件, 利用上述定理 5, 我们可以知道, 为了求解微分方程 (3.26), 只要求它的基本解好了.

现在利用广义函数的 Fourier 变换来作出基本解.

设 $\xi=F(g)$, 根据 (3.3) 和 (3.15) 知, (3.25) 等价于

$$p(-i\sigma)\xi=1 \tag{3.25′}$$

因此求基本解 g 化成求 Z' 中适合方程 (3.25′) 的广义函数 ξ. 这样就把求解偏微分方程的问题化成一个广义函数的除法问题. 就是要设法给出广义函数 $\dfrac{1}{p(-i\sigma)}$ 的意义.

在一些特殊情况下, 例如 $p(i\sigma)=1+\sigma^2$ 时, $\dfrac{1}{p(i\sigma)}$ 是一个正则的广义函数, 因为这时

$$(\xi,\psi)=\int\frac{1}{p(i\sigma)}\psi(\sigma)d\sigma$$

是正则的广义函数, 而且容易知道, ξ 适合方程 (3.25′), 因此作 Fourier 逆变换, $g=F^{-1}(\xi)$ 就可以求得基本解. 但一般说来

$\frac{1}{p(i\sigma)}$ 不是一个正则的广义函数；虽然如此，我们还是可以用解析泛函的概念来写出这个广义函数.

定理 6（线性偏微分方程基本解的存在定理） 设 p 为一 n 元多项式，那末必存在常系数偏微分方程

$$p(D)g=\delta \tag{3.25}$$

的基本解 $g\in K'$. 而且这时可取 g，使得 $F(g)$ 是解析泛函.

证 记 $Q(\sigma)=p(-i\sigma)$，由前所说，只要作出 Z' 中解析泛函 ξ 满足方程

$$Q\xi=1 \tag{3.25''}$$

好了，分下面几步来作.

(1) 设 $Q(s)$ 是如下的特殊形式

$$Q(s)=cs_1^m+\sum_{k=0}^{m-1}Q_k(s_2,\cdots,s_n)s_1^k,\ c\neq 0$$

我们作 n 维复空间 $C^n=\{(\sigma_1+i\tau_1,\cdots,\sigma_n+i\tau_n)\mid\sigma_j,\ \tau_k$ 是实数$\}$的实 $n+1$ 维子空间，$R^{n+1}=\{(\sigma_1+i\tau_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)\mid\sigma_1,\cdots,\sigma_n,\tau_1$ 是实数$\}$，又作 $n-1$ 维实空间 R^{n-1}，其中点的坐标形式是 $(\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$. 对于多项式 Q，这时必有一个正数 a，R^{n-1} 必可分解成最多可列个互不相交的可测集 $\Delta_1,\cdots,\Delta_m,\cdots$ 的和，$R^{n-1}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\Delta_m$，而且对每个 Δ_j 有相应的 $\tau_1^{(j)}$，$|\tau_1^{(j)}|\leqslant M$（$M$ 是常数，$j=1,2,\cdots$），这样得到 R^{n+1} 中的 n 维"面" $T_Q=\{(\sigma_1+i\tau_1^{(j)},\sigma_2,\cdots,\sigma_n)\mid(\sigma_2,\cdots,\sigma_n)\in\Delta_j,\ j=1,2,\cdots\}$，使得当 $(\sigma_1+i\tau_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)\in T_Q$ 时

$$|Q(\sigma_1+i\tau_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)|\geqslant a \tag{3.27}$$

关于"面" T_Q 的存在性以后再证明.

(2) 利用 T_Q 我们来作解析泛函

$$(\xi, \psi)=\int_{T_Q}\frac{\psi(\sigma_1+i\tau_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)}{Q(\sigma_1+i\tau_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)}d\sigma_1 d\sigma_2\cdots d\sigma_n, \ \psi\in Z \tag{3.28}$$

(3.28)式中积分详细地写出来就是

$$\sum_j\int_{\Delta_j}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\sigma_1+i\tau_1^{(j)}, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)}{Q(\sigma_1+i\tau_1^{(j)}, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)}d\sigma_1\right)d\sigma_2\cdots d\sigma_n$$

由于(3.27)，$\left|\frac{1}{Q}\right|\leqslant\frac{1}{a}$，由(3.7)可以证明

$$|\psi(s)|\leqslant\frac{c'e^{a|\tau|}}{(1+|s|^2)^n}$$

又因当 $s\in T_Q$ 时，$\mathrm{Im}s$ 必然等于某个 $|\tau_1^{(j)}|$，因此 $|\tau|\leqslant M$，所以有常数 c''，使得

$$|\psi(s)|\leqslant\frac{c''}{(1+|s|^2)^n}, \qquad s\in T_Q \tag{3.29}$$

由此容易看出，(3.28)所定义的 $\xi\in Z'$. 这时

$$\begin{aligned}(Q\xi, \psi)&=\int_{T_Q}\psi(s)d\sigma_1\cdots d\sigma_n\\&=\sum_j\int_{\Delta_j}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma_1+i\tau_1^{(j)}, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)d\sigma_1\right]d\sigma_2\cdots d\sigma_n\end{aligned} \tag{3.30}$$

但是由柯西积分定理和(3.29)，可以证明

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma_1+i\tau_1^{(j)}, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)d\sigma_1\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)d\sigma_1\end{aligned}$$

由这个等式和(3.30)得到

$$\begin{aligned}(Q\xi, \psi)&=\sum_j\int_{\Delta_j}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)d\sigma_1\right]d\sigma_2\cdots d\sigma_n\\&=\int\cdots\int\psi(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)d\sigma_1\cdots d\sigma_n=(1, \psi)\end{aligned}$$

因此，$Q\xi=1$，所以 $g=F^{-1}(\xi)$ 确是基本解.

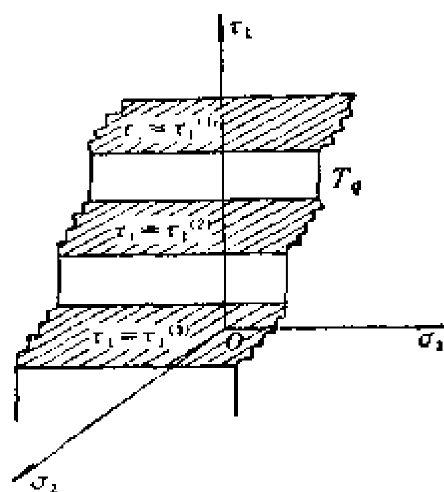


图 7.3

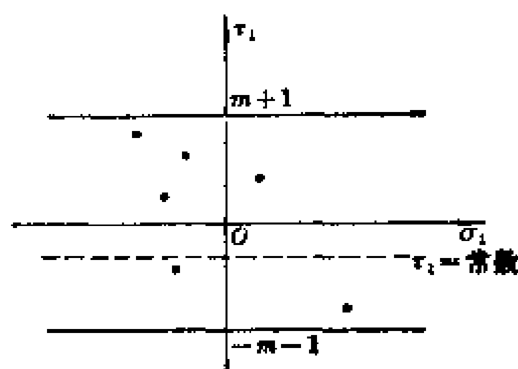


图 7.4

(3) 因此问题化为作出 T_Q, 对任何固定的 $(\sigma_2, \cdots, \sigma_n)\in R^{n-1}$, 必有 m 个根 $s_1^{(1)}, \cdots, s_1^{(m)}$ 使得

$$Q(s_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m)=c(s_1-s_1^{(1)})\cdots(s_1-s_1^{(m)})$$

在 $s_1=\sigma_1+i\tau_1$ 的复平面中必有带域 $|\tau_1|\leqslant m+1$ 中的一根直线 $\tau_1=\tau_1^{(1)}$, 使此直线与 m 个点 $s_1^{(1)}, \cdots, s_1^{(m)}$ 的距离大于1(图7.4). 因此在这根直线上

$$|Q(s)|>|c|$$

当 $(\sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ 作微小变化时, $s_1^{(1)}$、$\cdots$、$s_1^{(m)}$ 也只作微小变化, 因此存在 $(\sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ 的一个环境 Δ_1, 使得当 $(\sigma_2, \cdots, \sigma_n)\in\Delta_1$ 时

$$|Q(\sigma_1+i\tau_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)|\geqslant|c|$$

利用这个方法容易知道, 可以作出 R^{n-1} 中可列个互不相交的可测集 $\{\Delta_j\}$ 使满足前述要求.

(4) 现在设 $Q(\sigma)$ 是一般的多项式. 今证必有非退化的实系数线性变换

$$\sigma_j=\sum_{k=1}^{n} b_{jk}\eta_k \tag{3.31}$$

其中 $\det(b_{jk})\neq0$——把这个变换简记为 $\sigma=b\eta$——使得

$$Q(\sigma)=Q(b\eta)=a\eta_1^m+\sum_{k=0}^{m-1}Q_k(\eta_2,\cdots,\eta_n)\eta_1^k,\quad a\neq 0$$

事实上，设Q是m次的多项式，如果Q中的所有m次单项式的和是

$$\sum_r \alpha_r\sigma_1^{q_{1r}}\sigma_2^{q_{2r}}\cdots\sigma_n^{q_{nr}}$$

在上式中，以(3.31)代入，得到η的m次齐次多项式，它的η_1^m的系数是

$$a=\sum_r \alpha_r b_{11}^{q_{1r}}b_{21}^{q_{2r}}\cdots b_{n1}^{q_{nr}} \tag{3.32}$$

因此，我们可取b_{11}、$\cdots$、b_{n1}不恒为零，使$a\neq 0$，再挑选b_{21}、b_{22}、$\cdots$、b_{2n}、$\cdots$、b_{n1}、$\cdots$、b_{nn}使得$\det(b_{jk})\neq 0$. 这样挑选出的b_{jk}就满足要求.

对于多项式$Q_1(\eta)=Q(b\eta)$，我们作出前述的面T_{Q_1}，我们作T'_{Q_1}，它是T_{Q_1}在映照$s\longmapsto bs$下的象，又作泛函ξ如下：

$$(\xi,\psi)=\int_{T'_{Q_1}}\frac{\psi(s)}{Q(s)}d\sigma \tag{3.33}$$

在上式积分中，作变换$s=bs'$，$\sigma=b\sigma'$，那末上式积分化为

$$\int_{T_{Q_1}}\frac{\psi(bs')}{Q_1(s')}\det(b)\,d\sigma'$$

是收敛的，而且确为Z'中的连续线性泛函. 所以(3.33)定义了一个解析泛函，而且利用上述变换，容易证明

$$\int_{T'_Q}\psi(s)d\sigma=\int_{T_{Q_1}}\psi(bs')\det(b)\,d\sigma'=\int_{R^n}\psi(b\sigma')\det(b)\,d\sigma'$$
$$=\int_{R^n}\psi(\sigma')d\sigma$$

因此，$Q\xi=1$. 证毕.

我们注意，对于给定的多项式p，基本解一般不是唯一的. 例

如对于单变量的多项式 p，(3.11—12) 已经给出了具体的基本解不唯一的例．对于多变量的情况，也完全类似地可以举出例子．在定理 6 的证明中，适当地选取不同的 T_0，就得到不同的基本解．

下面我们举出具体的常系数线性偏微分方程基本解的例．

例 5 Laplace 方程 $\Delta^m u=f$.

这里，我们记 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$，$m$ 是一自然数，设 E 为基本解：

$$\Delta^m E(x)=\delta(x) \tag{3.34}$$

$E\in K'$．如果记 $V=\tilde{E}\in Z'$，那末上式经 Fourier 变换后变成

$$(-1)^m\rho^{2m}V=1 \tag{3.35}$$

其中 $\rho=|\sigma|=\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$．我们只考察当 $2m<n$ 时的情况．这时函数

$$V(\sigma)=\frac{(-1)^m}{\rho^{2m}}$$

是局部勒贝格可积的，而且我们可以作 Z 上的正则广义函数

$$(V,\psi)=\int V(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma$$

这个 V 确实满足方程 (3.35)．现在的问题是要求 K' 中 $E=F^{-1}(V)$，使得我们对局部勒贝格可积函数 $V(\sigma)$ 直接作它的 Fourier 逆变换

$$E(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int V(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma=\frac{(-1)^m}{(2\pi)^n}\int\frac{e^{-ix\cdot\sigma}}{\rho^{2m}}d\sigma$$

为此，我们要计算广义函数

$$g_\lambda(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\frac{e^{-ix\cdot\sigma}}{\rho^\lambda}d\sigma$$

我们对任何正数 t，在下面积分中作变数代换 $\sigma'=t\sigma$，并且记 $\rho'=$

$\sigma'|$, 那末

$$g_\lambda(tx)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\frac{e^{-i(tx)\cdot\sigma}}{\rho^\lambda}d\sigma=\frac{t^{\lambda-n}}{(2\pi)^n}\int\frac{e^{-ix\cdot\sigma'}}{\rho'^\lambda}d\sigma'$$
$$=t^{\lambda-n}g_\lambda(x)$$

因此, $g_\lambda(tx)$是x的$\lambda-n$次齐次函数; 另一方面, 当O是$E^n\to E^n$的正交变换时, 作$\sigma'=O^{-1}\sigma$, 就可以得到

$$g_\lambda(Ox)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\frac{e^{-i(Ox)\cdot\sigma}}{\rho^\lambda}d\sigma=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\frac{e^{-ix\cdot O^{-1}\sigma}}{\rho^\lambda}d\sigma$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\frac{e^{-ix\cdot\sigma'}}{|\sigma'|^\lambda}d\sigma'=g_\lambda(x)$$

因此$g_\lambda(x)$只和$|x|$有关. 这样一来

$$g_\lambda(x)=c_\lambda|x|^{\lambda-n}$$

其中c_λ是常数. 为了计算c_λ, 我们注意取适当的φ, 就应有$(\rho^{-\lambda},\tilde{\varphi})=(2\pi)^n(g_\lambda,J\varphi)$. 取$\varphi=e^{-\frac{r^2}{2}}=\prod\limits_{j=1}^{n}e^{-\frac{x_j^2}{2}}$, 那末

$$\tilde{\varphi}=(2\pi)^{n/2}\prod_{j=1}^{n}e^{-\frac{1}{2}\sigma_j^2}=(2\pi)^{n/2}e^{-\frac{\rho^2}{2}}$$

因此
$$(2\pi)^{n/2}\int\rho^{-\lambda}e^{-\frac{\rho^2}{2}}d\sigma=c_\lambda\int r^{\lambda-n}e^{-\frac{r^2}{2}}dx$$

经过计算可得

$$c_\lambda=2^{n-\lambda}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$$

因此

$$E(x)=c_{2m}|x|^{2m-n}\tag{3.36}$$

是局部勒贝格可积函数, 这是(3.34)的基本解. 以上的推导过程虽然是不严格的, 但是我们"猜出"基本解后, 自然容易直接验证它.

6. 基本函数空间 S 前面我们挑选 K 为基本函数空间后显示出一个好处，就是广义函数相当多。因为 K 中函数的支集是有界的，所以对广义函数在自变数趋向于无限大时函数增长情况没有任何限制。但是从 Fourier 变换的角度来看，K 空间就有一个不足之处，其中函数的 Fourier 变换不在 K 中而在另一空间 Z 中。此外在研究偏微分方程理论时也需要用到别的基本函数空间和广义函数空间。在本节中我们将介绍另一种常用的基本函数空间 S 和广义函数空间 S'。

定义 设 $\varphi(x)$ 是 E^n 上的无限次可微分函数，而且对任何非负整数组 $k=(k_1, \cdots, k_n)$ 以及非负整数组 $q=(q_1, \cdots, q_n)$，

$$\|\varphi\|_{k,q}=\sup_x |x^k D^q \varphi(x)|①$$

是有限数，这种函数 φ 的全体记为 S。

在 S 中规定极限概念如下：当函数列 $\{\varphi_\nu\}\subset S$，$\varphi\in S$，而且(i) 对每个非负整数组 k 和 q

$$\sup_\nu \|\varphi_\nu\|_{k,q}<\infty \tag{3.37}$$

(ii) 在 E^n 上 φ_ν 及其各阶偏导数都一致收敛于 φ 及其相应的偏导数，那末就称 $\{\varphi_\nu\}$ 在 S 中收敛于 φ，记为 $\varphi_\nu\xrightarrow{S}\varphi$，$(\nu\to\infty)$。$S$ 按通常的线性运算以及这个极限概念成为**基本函数空间**。

容易看出，每个微分算子 D^q 是 $S\to S$ 的连续线性算子，即当 $\varphi_\nu\xrightarrow{S}\varphi$ 时，$D^q\varphi_\nu\xrightarrow{S}D^q\varphi$。

现在考察基本函数空间 S 和 K 之间的关系。

引理 1 基本函数空间 S 和 K 有如下的关系：(1) $K\subset S$；(2) 如果 $\{\varphi_\nu\}\subset K$，$\varphi\in K$ 而且 $\varphi_\nu\xrightarrow{K}\varphi$ 那末 $\varphi_\nu\xrightarrow{S}\varphi$；(3) K 在

① 此地 $|x|=(\sum_{\nu=1}^n x_\nu^2)^{\frac{1}{2}}$

S 中稠密(即对每个 $\varphi\in S$ 必有一列 $\{\varphi_\nu\}\subset K$ 使 $\varphi_\nu\xrightarrow{S}\varphi$).

证 (1) 和(2)可以直接从定义导出. 今证(3). 当 $\varphi\in S$ 时, 我们利用奇异核 $K_m(x)$ (见 (1.7)) 作出

$$\varphi_m(x)=(\hat{\varphi}_m*K_m)(x)=\int_{E^n}\hat{\varphi}_m(x+y)K_m(y)dy$$

$$\hat{\varphi}_m(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in S_m(0)\\ 0, & x\overline{\in}S_m(0)\end{cases}$$

其中 $S_m(0)$ 是 E^n 中半径为 m 的球, 显然 $\varphi_m\in K$, 并且对任何非负整数组 k 及 q

$$\sup_x|x^kD^q\varphi_m(x)|\leqslant\int\sup_x|x^kD^q\varphi(x+y)|K_m(y)dy$$

$$\leqslant\int\sum_{j\leqslant k}|c_j^k|\sup_x|(x+y)^jD^q\varphi(x+y)||y^{k-j}||K_m(y)|dy \tag{3.38}$$

上式中 c_j^k 是多项式展开 $x^k=\sum\limits_{j\leqslant k}c_j^k(x+y)^j(-y)^{k-j}$ 中常系数, $j=(j_1,\cdots,j_n)$ 也是非负整数组, 而 $j\leqslant k$ 表示相应的 $j_l\leqslant k_l$, $l=1,2,\cdots,n$. 由于 $K_m(y)$ 的支集是 $|y|\leqslant\frac{1}{m}$, 而对这些 y, $|y^{k-j}|\leqslant1$, 又因为 $\int K_m(y)dy=1$, 所以由(3.38)得到

$$\|\varphi_m\|_{k,q}\leqslant\sum_{j\leqslant k}|c_j^k|\sup_x|x^jD^q\varphi(x)|<\infty$$

这就是说 $\varphi_m\in S$ 而且 $\{\varphi_m\}$ 满足条件(3.37).

另一方面, 由(3.37)以及 $\varphi\in S$, 容易知道, 对任何 $\varepsilon>0$ 以及非负整数组 q, 必有正数 R 使得当 $|x|>R$ 时

$$|D^q\varphi_m|<\varepsilon,\ |D^q\varphi|<\varepsilon$$

由于 $$D^q\varphi_m(x)=\int D^q\hat{\varphi}_m(z)K_m(z-x)dz$$

和§1引理1的证明一样地可知$\{D^q\varphi_m\}$在E^n的任一有界集(例如$\{x||x|\leqslant R\}$)上一致收敛于$D^q\varphi$，因此$D^q\varphi_m$在E^n上一致收敛于$D^q\varphi$，所以$\varphi_m\xrightarrow{S}\varphi$，证毕.

现在我们来研究S空间中的 Fourier 变换：我们仍和K空间一样地用(3.1)来定义S空间中函数的 Fourier 变换，这时容易看出，对于$\varphi\in S$，(3.2)、(3.3)仍成立.

定理7 Fourier 变换F：$\varphi\longmapsto\tilde{\varphi}$是$S\to S$的一对一的连续线性算子，它的逆算子$F^{-1}$(Fourier 逆变换)也是连续的，而$F^{-1}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n JF$，此地$J$是$S$中算子：$\varphi(x)\longmapsto\varphi(-x)$.

证 当$\varphi\in S$时，利用相应于S中函数的(3.2)和(3.3)式可知，对任何非负整数组k和q有

$$\sigma^k D^q\tilde{\varphi}(\sigma)=i^{N(k)+N(q)}FD^k(x^q\varphi)=\sum_{\lambda,\mu}c_{\lambda,\mu}F(x^\lambda D^\mu\varphi)$$

其中$c_{\lambda,\mu}$是常数，它由$D^k(x^q\varphi)$运算产生的，$\sum\limits_{\lambda,\mu}$表示对所产生的各项求和. 由于

$$\begin{aligned}|F(x^\lambda D^\mu\varphi)|&\leqslant\int|x^\lambda D^\mu\varphi(x)|dx\\&\leqslant\int\frac{|x^\lambda(1+|x|^{2n})D^\mu\varphi(x)|}{(1+|x|^{2n})}dx\end{aligned}\tag{3.39}$$

因此由$\varphi\in S$立即可知$\tilde{\varphi}\in S$，而且易知F是一对一的线性算子. 又$F^{-1}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n JF$也是显然的.

现在证明F是连续的：设$\varphi_m\xrightarrow{S}\varphi$，这时由(3.39)，有

$$\begin{aligned}|\sigma^k D^q\tilde{\varphi}_m(\sigma)|&\leqslant\sum_{\lambda,\mu}|c_{\lambda,\mu}||F(x^\lambda D^\mu\varphi_m)|\\&\leqslant\sum_{\lambda,\mu}|c_{\lambda,\mu}|a(\|\varphi_m\|_{\lambda',\mu}+\|\varphi_m\|_{\lambda,\mu})\end{aligned}$$

其中 $a=\int\frac{1}{1+|x|^{2n}}dx$, $\lambda'=\lambda+2n$. 因此对每组 k、q, 有

$$\sup_m\|\widetilde{\varphi}_m\|_{k,q}<\infty$$

另一方面, 由(3.39)可知

$$|D^q\widetilde{\varphi}_m(\sigma)-D^q\widetilde{\varphi}(\sigma)|\leqslant|F(x^q(\varphi_m-\varphi))|\leqslant\int_{|x|\leqslant R}|x^q(\varphi_m(x)-\varphi(x))|dx$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{|x|>R}|x|^q(|\varphi_m(x)|+|\varphi(x)|)dx \tag{3.40}$$

由上述证明过程可知, 上式右边第二个积分不超过 $a(\|\varphi_m\|_{q',0}+\|\varphi\|_{q',0})$, 其中 $0=(0,\cdots,0)$, $q'=(q_1+2,\cdots,q_n+2)$. 由 $\varphi_m\xrightarrow{S}\varphi$ 可知, 我们取 R 充分大可使第二个积分小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 再由 $\varphi_m(x)$ 在球 $\{x||x|\leqslant R\}$ 中一致收敛于 φ, 可取 m 充分大, 使(3.40)的不等式右边第一项不超过 $\varepsilon/2$, 因此 $\{D^q\widetilde{\varphi}_m\}$ 在 E^n 上一致收敛于 $D^q\widetilde{\varphi}$. 所以 $\widetilde{\varphi}_m\xrightarrow{S}\widetilde{\varphi}$, 这就证明了算子 F 是连续的.

显然 J 也是连续算子, 因此 $F^{-1}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n JF$ 是连续的. 证毕.

定理 7 说明, 在研究 Fourier 变换时用 S 空间比用 K 空间更为方便. 和引理 1 一样地, S 和 Z 有如下关系:

引理 2 基本函数空间 S 和 Z 有如下关系: (i) $Z\subset S$; (ii) 如果 $\{\psi_\nu\}\subset Z$, $\psi\in Z$ 而且 $\psi_\nu\xrightarrow{Z}\psi$, 那末 $\psi_\nu\xrightarrow{S}\psi$; (iii) Z 在 S 中稠密.

证 引理 2 可由引理 1 通过 Fourier 变换 F 再利用定理 7 得到.

(i) 由于 $K\subset S$, 由定理 7, 当 $\varphi\in K$ 时 $F(\varphi)\in S$. 但 $Z=$

$\{F(\varphi)|\varphi\in K\}$，因此 $Z\subset S$.

(ii)设 $\psi_\nu\xrightarrow{Z}\psi$. 这时必有 φ、$\varphi_\nu\in K$，使 $F(\varphi)=\psi$，$F(\varphi_\nu)=\psi_\nu$，由 F^{-1} 的连续性得到 $\varphi_\nu\xrightarrow{K}\varphi$，再由引理 1 得到 $\varphi_\nu\xrightarrow{S}\varphi$，因此再由 F 在 S 中的连续性得到 $\psi_\nu\xrightarrow{S}\psi$.

(iii) 任取 $\psi\in S$，由定理 7，$\varphi=F^{-1}(\psi)\in S$. 由引理 1 必有 $\{\varphi_\nu\}\subset K$ 使 $\varphi_\nu\xrightarrow{S}\varphi$，因此再利用 F 的连续性，$F(\varphi_\nu)\xrightarrow{S}\psi$，但 $F(\varphi_\nu)\in Z$，这就证明了 Z 的稠密性. 证毕.

我们注意，尽管 $K\subset S$，$Z\subset S$，但 S 并不等于 $K\cup Z$.

例 6 任取非零的 $\varphi\in K$，非零的 $\psi\in Z$，显然 $\varphi+\psi\in S$，但 $\varphi+\psi$ 的支集不有界，所以 $\varphi+\psi\overline{\in}K$，由于 φ 不是解析函数，所以 $\varphi+\psi$ 也不是解析函数，因此 $\varphi+\psi\overline{\in}Z$，这就说明了 $S\neq K\cup Z$.

7. 广义函数空间 S'

定义 基本函数空间 S 上的连续线性泛函也称为(S 上)广义函数，它的全体也称为广义函数空间，记为 S'. 当 $\{F_m\}\subset S'$，$F\in S'$ 而且对每个 $\varphi\in S$，$\lim\limits_{m\to\infty}(F_m,\varphi)=(F,\varphi)$，那末就称 F_m 在 S' 中收敛于 F，记为 $F_m\xrightarrow{S'}F$.

我们现在考察 S' 与 K' 之间的关系：根据引理 1 的(i)和(ii)，容易看出：对每个 $F\in S'$，如果把 F 限制在 K 上时，$F|_K\in K'$，因此映照 $F\longmapsto F|_K$ 为 $S'\to K'$ 的算子. 这个算子显然是线性的. 而且如果 F_1、F_2 是 S' 中两个泛函，如果 $F_1|_K=F_2|_K$，根据 K 在 S 中的稠密性，立即可知在 S 上也有 $F_1=F_2$，因此映照 $F\longmapsto F|_K$ 是可逆的. 另一方面，当 $\{F_m\}\subset S'$，$F\in S'$ 时，如果 $F_m\xrightarrow{S'}F$，那末显然有 $F_m|_K\xrightarrow{K'}F|_K$. 因此映照 $F\longmapsto F|_K$ 把 S' 嵌入 K'，并且保持线性运算和极限关系. 今后为了方便起见就把 S' 中的 F 与 K' 中的 $F|_K$ 一致化. 这样就得到关系式 $S'\subset K'$，同样地可以把 S' 嵌

入 Z'，因此又有关系式 $S'\subset Z'$.

我们注意，L^* 中的局部勒贝格可积函数未必是 Z' 中的泛函.

例 7 函数 $e^{|x|^2}$ 属于 L^*，因此也属于 K'，但是它不属于 Z'，因为它在无限远附近的增长程度很高，当它和 Z 中某些非负函数相乘时的积分是发散的.

所以 L^* 中函数也未必属于 S'，但是容易证明，当 $f\in L^2(E^n)$ 时，对一切 $\varphi\in S$

$$(f,\varphi)=\int f(x)\varphi(x)dx$$

存在，而且 $\varphi\longmapsto(f,\varphi)$ 是 S 上的广义函数，我们把这个广义函数与 f 一致化就知道 $L^2(E^n)\subset S'$，在 $L^2(E^n)$ 中采用按范数收敛来规定极限概念，容易看出，当 $\{f_\nu\}\subset L^2(E^n)$，$f\in L^2(E^n)$，而且 $f_\nu\xrightarrow{L^2(E^n)}f$ 时，$f_\nu\xrightarrow{S'}f$. 总结起来，对所讨论的一些空间我们有如下的关系.

定理 8 函数空间及广义函数空间 K、Z、S、L^2、K'、Z'、S' 等之间有如下的关系：(i)

$$K\subset S\subset L^2(E^n)\subset S'\subset K' \tag{3.41}$$

而且

$$Z\subset S\subset L^2(E^n)\subset S'\subset Z' \tag{3.42}$$

(ii) 在(3.41—42)的小空间中函数(广义函数)列的收敛蕴涵着按大空间的极限概念也收敛①；(iii)(3.41—42)中小空间(按大空间的极限概念)在大空间中稠密.

对于 S' 中广义函数也和 K' 一样具有 §2 定理 1—4 那样的一些基本性质. 在 §2 定理 1—4 的叙述中，换 K' 为 S'，那末这几个定理仍然成立. 这些我们就不详述了.

---

① 换句话说，任取(3.41—42)中满足关系 $\Phi\subset\Psi$ 的两空间(例如 $\Phi=K$，$\Psi=S$)当 $\{\varphi_\nu\}\subset\Phi$，$\varphi\in\Phi$ 时，如果 $\varphi_\nu\xrightarrow{\Phi}\varphi$，那末 $\varphi_\nu\xrightarrow{\Psi}\varphi$.

S' 中广义函数的构造比 K' 中广义函数的构造要简单些.

定理 9 (S' 广义函数的构造) 设 $f\in S'$, 则必有非负整数组 q 以及 E^n 上的连续函数 g, 它具有如下的性质: 存在一个自然数 k

$$\sup_x \frac{|g(x)|}{(1+|x|)^k}<\infty$$

使得 $f=D^q g$.

我们略去这个定理的证明.

关于 S' 广义函数, 我们可以仿照 (3.14) 定义它的 Fourier 变换.

定义 设 $f\in S'$, 作 S 上的连续线性泛函

$$F(f):\ \varphi\longmapsto(2\pi)^n(f, F(\varphi)),\ \varphi\in S$$

称它是广义函数 f 的 Fourier 变换, 有时也记为 $\tilde{f}$.

由定理 7, 容易看出有

定理 10 Fourier 变换 F 是广义函数空间 S' 到 S' 自身的一对一的连续线性算子, 而且 F^{-1} 也是连续的, 同时 $F^{-1}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n JF$.

此地 J 是 S' 中如下的算子, 当 $f\in S'$ 时

$$(Jf, \varphi(\cdot))=(f, \varphi(-(\cdot))),\ \varphi\in S$$

关于 S' 广义函数的 Fourier 变换也有类似于定理 4 的定理, 这些就不再详述了.

为了适应分析数学的不同需要, 除去 K、Z、S 外, 有时还要采用别的基本函数空间 Φ 以及相应的广义函数空间 Φ', 通常在选择 Φ 和 Φ 中极限概念 $\varphi_\nu\xrightarrow{\Phi}\varphi$ 时, 至少要求它满足如下的三个条件: (i) $K\subset\Phi\subset L^2$; (ii) 当 $\{\varphi_\nu\}\subset K$, $\varphi\in K$, 且 $\varphi_\nu\xrightarrow{K}\varphi$ 时 $\varphi_\nu\xrightarrow{\Phi}\varphi$; (iii) 按 Φ 中的极限概念, K 在 Φ 中稠密.

这时记 Φ' 为 Φ 上的连续线性泛函全体，在其中取弱*收敛作为极限概念. 这样一来，也就同样有下面的关系：(i)

$$K\subset\Phi\subset L^{*}\subset\Phi'\subset K' \tag{3.43}$$

(ii) (3.43) 中小空间中函数列的收敛蕴涵按大空间极限概念也收敛；(iii) 小空间在大空间中（按大空间的极限）稠密.

为了适应分析数学的要求，有时往往要求 Φ 中函数性质足够好，使得能对 Φ 中函数进行某些微分运算，并且对 Φ 中函数在无限远附近函数值趋于零的情况有一定的限制. 在偏微分方程中为了研究边值问题，有时还要考察支集在某个特定区域中的基本函数空间，这些我们就不详述了.

习 题

1. 验证公式 (3.2—6).
2. 证明 (3.12) 是方程 $pg=1$ 在 Z' 中的通解.
3. 验证 §3 第三段中 Fourier 变换公式表中的第 4—9 行.
4. 求出当 $2m\geqslant n$ 时方程 $\Lambda^m E=\delta$ 的基本解的表达式.
5. 设 f、$g\in K'$，而且 f 的支集是有界的，p 是任一多项式. 证明

$$p(D)(f*g)=(p(D)f)*g=f*(p(D)g)$$

6. 证明 $\varphi_\nu\xrightarrow{S}\varphi$ 的充要条件是：(i) 对任何非负整数 k、q，(3.37) 成立；(ii) 在 E^n 的任一有界闭集上，φ_ν 及其各阶偏导函数都一致收敛于 φ 及相应的偏导数.

参考文献

[1] **复旦大学数学系主编** 数学分析(下册),上海科学技术出版社,第二版(1978).

[2] 柯朗,希尔伯特 数学物理方法(卷Ⅰ),科学出版社(1959).(译者:钱敏,郭敦仁.)

[3] **Carleson, L.**, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math., 116, 135—157(1966).

[4] **Dunford, N., Schwartz, J.**, Linear Operators, Part I:General theory, Interscience publishers, New York(1958).

[5] **Hunt, R. A.**, Comments on Lusin's conjecture and Carleson's proof for L^2 Fourier series, Proceedings of the Conference on linear operators and approximation II, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 235—245(1974).

[6] **Lusin, N.**, Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier, C. R. Acad. Sci. Paris 156(1913).

[7] **Sz-Nagy, B., Foias, C.**, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, Amsterdam, North-Holland(1970).

[8] **Schauder, J.**, Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen, Studia Math., 2, 171—180(1930).

[9] **夏道行等**,实变数函数论与泛函分析概要,上海科技出版社,1963.

[10] **Натансон. И. П.**, Теория Функций Вещественной Переменной, изд. 2-ое., Москва, 1957.

[11] **Aronszajn, N., Smith, K. T.**, Invariant Subspaces of Completely Continous Operators, Ann. of Math. (2) 60, 345—350(1954).

[12] **Radjavi, H., Rosenthal, P.**, Invariant Subspaces, Berlin-Heidelberg-New York, Springer(1974).

[13] **Aström, K. J.**, Introduction to Stochastic Control Theory, Academic press, New York and London(1970).

[14] **Наймарк, М. А.**, Нормированные Кольца, Гос. Изд. Технико-

теор. Литературы, Москва (1956).

[15] **Гельфанд, И. М., Шилов, Г. Е.**, Обобщенные функции и действия над ними, Гос изд. физико-Мат. Лимерамуры, Москва (1958).

[16] **关肇直**. 泛函分析讲义, 高等教育出版社(1959).

[17] **关肇直**. 拓扑空间概论, 科学出版社(1958).

[18] **Михлин, С. Г.** Проблема минимума квадратичного функционала (1952).

下 册 索 引

一、二、三划

一个半(双)线性泛函……VI, 6, 1
　连续的～……VI, 6, 1
一致有界性原理……V, 4, 2
一致谱积分……VI, 7, 2
二次共轭空间……V, 3, 1
二次泛函……VI, 6, 2
几乎匀敛……IV, 3, 3
三角不等式……IV, 1, 2
三角函数系的完备性……VI, 3, 2
幺正算子(酉算子)……VI, 1, 1
广义和……V, 4, 3
广义求和问题……V, 4, 3
广义幂零算子……V, 5, 2
广义函数……VII, 1, 1
　～空间 K'……VII, 1, 4
　～空间 S'……VII, 3, 7
　～空间 S' 中的极限……VII, 3, 7
　～的导函数……VII, 2, 1
　～的原函数……VII, 2, 2
　～的不定积分……VII, 2, 2
　～的基本性质……VII. 2, 1-2
　～的乘法……VII, 2, 3
　～的支集……VII, 2, 4
　～的卷积……VII, 3, 4
　～的 Fourier 变换……VII, 3, 3
　～在一开集中相等……VII, 2, 3

正则～……VII, 1, 4
有限级～……VII, 2, 5
K 空间上的～……VII, 1, 4
Z 空间上的～……VII, 3, 2
广义特征向量系……VII, 2, 6
广义谱系……VI, 11, 3
子空间……IV, 1, 2
～的直交和……VI, 2, 1
投影～……VI, 5, 1
不变～……V, 5, 3
约化～……VI, 5, 3

四 划

区域……IV, 4, 4
支集……VII, 1, 2, VII, 2, 4
开集……IV, 4, 1, IV, 10, 1
子空间的～……IV, 4, 3
开映照……IV, 5, 1
～原理……V, 4, 1
开覆盖……IV, 10, 1
不动点……IV, 8, 1
～定理……IV, 8, 1
Schauder～～……IV, 9, 7
Schauder-Тихонов～～……IV, 10, 2
不等式
Bessel～……VI, 3, 1
Cauchy～……IV, 3, 1
Hölder～……IV, 3, 1
Minkowski～……IV, 3, 1
Schwarz～……VI, 1, 1
Young～……IV, 3, 1

内点……IV, 4, 1
内闭一致(均匀)收敛……IV, 1, 4
内积……VI, 1, 1
～空间……VI, 1, 1
～～的同构……VI, 3, 5
～导出的范数……VI, 1, 1
公式
Cauchy-Plemelj～……VII, 2, 1
双线性泛函……VI, 6, 1
～的范数……VI, 6, 1
巴拿赫(Banach)空间……IV, 7, 1
巴塞伐尔(Parseval)等式……VI, 3, 2
引理
F. Riesz～……IV, 9, 6
Riemann-Lebesgue～……V, 3, 2, VI, 3, 1

五　划

正则算子……V, 4, 1
正则求和法……V, 4, 3
正则点……V, 5, 2
正则集……V, 5, 2
正常算子……VI, 10, 1
～的谱分解……VI, 10, 3
～～定理……VI, 10, 3
～的谱测度……VI, 10, 3
本性有界可测函数……IV, 3, 2
平行四边形公式……VI, 1, 2
平移算子……VI, 8, 6
单向～, 双向～……VI, 8, 6
平稳随机序列……VI, 8, 5
～的谱展开……VI, 8, 5
～的谱函数……VI, 8, 5

可析点集(可分点集)……IV, 6, 2
可析空间……IV, 6, 2
可析 Hilbert 空间……VI, 3, 5
可交换 Banach 代数……V, 1, 3
凸泛函……V, 2, 4
凸包……IV, 2, 4
凸集……IV, 2, 4
由 A 张成的线性闭子空间……IV, 4, 2
由算子导出的泛函……VI, 6, 1
由谱系导出的谱测度……VI, 7, 4
由谱测度导出的谱系……VI, 7, 4
生成元(循环元)……VI, 9, 7
外点……IV, 4, 2
代数……V, 1, 3
　子代数……V, 1, 3
　赋范～……V, 1, 3
　Banach ～……V, 1, 3
　算子～……VI, 10, 1
半序点列……IV, 10, 4
半范数(拟范数)……IV, 2, 3
半有界算子……VI, 11, 2
对称(Hermite)算子……VI, 9, 3
母元组……V, 2, 1

六 划

有限 ε-网……IV, 9, 2
有限秩算子……V, 6, 1
有限维线性赋范空间……IV, 9, 6
有界二次泛函……VI, 6, 2
有界集……IV, 1, 3
有界算子……V, 1, 2
有界线性算子……V, 1, 2

有界线性泛函……V, 1, 2
列紧集……IV, 9, 1, IV, 10, 1
共轭空间……V, 1, 3, VI, 4, 2
共轭算子（伴随算子）……V, 3, 4, VI, 4, 3, VII, 1, 4
共轭三角多项式……VI, 8, 2
共鸣定理……V, 4, 2
机械求积公式……V, 4, 3
压缩算子……IV, 8, 1, VI, 11, 4
压缩映照原理……IV, 8, 1
收敛
　～点列……IV, 1, 3
　依范数收敛……IV, 2, 3
　依测度收敛……IV, 1, 4
　按拓扑～……IV, 10, 1
　p方平均～……IV, 3, 2
自反空间……V, 3, 1
自共轭（自伴）算子……VI, 4, 4, VI, 9, 3
　～的广义特征展开……VII, 2, 6
　～的函数模型……VI, 9, 7
　～的谱分解……VI, 9, 6
　～决定的谱测度……VI, 9, 6
自密集……IV, 4, 2
向量空间……IV, 2, 1
向量的 Fourier 级数……VI, 3, 2
全连续算子……V, 6, 1
　～的谱……V, 6, 2
全连续自共轭算子的谱分解……VI, 9, 8
多元复变解析函数……VII, 3, 1
多项式
　Legendre～……V, 5, 1, VI, 3, 4
交换对称 Banach 代数……VI, 10, 4
闭包……IV, 4, 2

闭映照……IV, 5, 2
闭图象定理……V, 4, 1
闭球套定理……IV, 7, 3
闭集……IV, 4, 2
　子空间的～……IV, 4, 3
闭算子……IV, 5, 2
导集……IV, 4, 2
阵
　Toeplitz～……V, 4, 3
同胚……IV, 5, 1

七 划

极化恒等式……VI, 1, 2
极限点……IV, 4, 2
求和法
　(C, 1)～……V, 4, 3
连续
　～谱……V, 5, 2
　～点集……IV, 4, 4
　～映照……IV, 5, 1
　～函数……IV, 5, 1
　～曲线……IV, 5, 3
　～线性泛函……V, 1, 2
　～线性算子……V, 1, 2
　～～的实部、虚部……VI, 10, 1
拟范数(半范数)……IV, 2, 3
酉等价……VI, 8, 6、VI, 9, 3
酉算子……VI, 8, 1
　～的谱分解……VI, 8, 3
　～的谱系……VI, 8, 2
　～的谱测度……VI, 8, 3
　～～空间……VI, 8, 3

投影定理……VI, 2, 2
投影算子……VI, 5, 1
　～的充要条件……VI, 5, 1
　～的运算、和、积……VI, 5, 2
　～的直交性……VI, 5, 2
希尔伯特(Hilbert)空间……VI, 1, 2
条件
　Hölder～……IV, 2, 3
　Lipschitz～……IV, 8, 1
近似谱点……V, 5, 1
伸张系数……V, 1, 2
完全有界集……IV, 9, 2
完全就范直交系……VI, 3, 3
完全集……IV, 4, 2
完备空间……IV, 7, 1
完备化空间……IV, 7, 4
完备公式……VI, 3, 2
完备直交系……VI, 3, 2
　～的充要条件……VI, 3, 2
泛函
　Hermite～……VI, 6, 1
　线性～……V, 1, 1
　～序列的收敛……V, 3, 2
　～的零空间……V, 1, 1
局部凸拓扑线性空间……IV, 10, 2
局部可积函数空间……VII, 1, 3

八　划

拓扑……IV, 10, 1
　～映照……IV, 5, 1, IV, 10, 1
　～线性空间……IV, 10, 2
　Hausdorff～～……IV, 10, 2

直交化……VI, 3, 4
直交补……VI, 2, 1, VI, 5, 2
直交系……VI, 3, 1
直交
两向量的～……VI, 2, 1
两向量组的～……VI, 2, 1
直交投影……VI, 2, 1
直交和……VI, 2, 1, VI, 5, 2
奇异积分的 Weierstrass 核函数……VII, 1, 3
环境(邻域)……IV, 4, 1
r～……IV, 1, 3
～基……IV, 10, 1
范数……IV, 2, 3
～的等价性……IV, 9, 6, V, 4, 1
图象……IV, 5, 2
迭代法……IV, 8, 1
线性
～子空间……IV, 2, 1
～无关……IV, 2, 1
～空间……IV, 2, 1
～相关……IV, 2, 1
～同构……IV, 2, 1
～基……IV, 2, 1
～算子……V, 1, 1
～～的正则集……V, 5, 2
～～的运算……V, 1, 3
～泛函……V, 1, 1
～～存在定理……V, 2, 3
～～的表示……V, 2, 1
～偏微分方程基本解存在定理……VII, 3, 5
空间
$\mathscr{A}$……IV, 1, 4

c …… IV, 2, 2

$C[a, b]$ …… IV, 2, 2

～的共轭空间 …… V, 2, 3

～的完备性 …… IV, 7, 2

$C_{2\pi}$ …… V, 2, 3

C^{∞} …… IV, 2, 3

Fréchet～ …… IV, 10, 2

$l^p(p\geq1)$ …… IV, 3, 4

～中致密点集的充要条件 …… IV, 9, 3

～的共轭空间$(p\geq1)$ …… V, 2, 1

～的完备性 …… IV, 7, 2

l^{∞} …… IV, 2, 3

～的不可析性 …… IV, 6, 2

$L^p(E, B, \mu)$ …… IV, 3, 1

～的完备性 …… IV, 7, 2

$L^{\infty}(E, \mu)$ …… IV, 3, 3

s …… IV, 1, 4

S …… IV, 1, 4

$V[a, b]$ …… IV, 2, 3

$V_0[a, b]$ …… IV, 2, 3

$V_{2\pi}$ …… V, 2, 3

变分引理 …… VI, 2, 2

变换

Cayley～ …… VI, 9, 4

Fourier～ …… VI, 8, 4, VII, 3, 1

逆～～ …… VI, 8, 4, VII, 3, 1

定向半序集 …… IV, 10, 1

定理

Aronszajn-Smith～ …… V, 6, 3

Arzela-Ascoli～ …… IV, 9, 3

Baire～ …… IV, 7, 3

Banach-Steinhaus …… V, 4, 2

Hahn-Banach～…………V, 2, 2
Hausdorff～…………IV, 9, 2
Plancherel～…………VI, 8, 4
Riesz 泛函表示～…………V, 2, 3, VI, 4, 2
Riesz-Fischer～…………VI, 3, 2
Riesz-Schauder 理论…………V, 6, 2
Гельфанд(谱半径)～…………V, 5, 2
Ломоносов～…………V, 6, 3
Стеклов～…………VI, 3, 2
卷积…………VII, 3, 4
～定理…………VII, 3, 4
Fourier 变换的～…………VII, 3, 4
～的交换律…………VII, 3, 4
孤立点集…………IV, 4, 2
函数
δ-函数…………VII, 1, 4
δ-式函数列…………VII, 2, 1
Heaviside～…………VII, 2, 1

九 划

恒等(单位)算子…………V, 1, 1
点集的核…………IV, 4, 1
点谱…………V, 5, 2
复共轭线性同构…………VI, 4, 1
保范算子…………V, 2, 1, VI, 8, 1
度量空间(距离空间)…………IV, 1, 1
～的完备化…………IV, 7, 4
度量线性空间…………IV, 10, 2
逆算子定理…………V, 4, 1
测度问题…………V, 2, 4

十 划

格拉姆-许密特(Gram-Schmidt)
  直交化法……VI, 3, 4
紧空间……IV, 9, 4
紧集……IV, 9, 4
乘子……VII, 2, 3
  ～空间……VII, 2, 3
  Z 空间的～……VII, 3, 2
  Z' 空间的～……VII, 3, 2
积分方程……IV, 8, 2
  Volterra 型～……IV, 8, 2
特征向量……V, 5, 1
  ～空间……V, 5, 1
  ～～的维数……V, 5, 1
特征值……V, 5, 1
特征值的重复度……V, 5, 1
离散拓扑……IV, 10, 1
弱致密集……V, 3, 3
致密集……IV, 9, 1
致密算子……V, 6, 1

十 一 划

球……IV, 1, 3
基本点列……IV, 7, 1
基本函数……VII, 1, 2
  ～的 Fourier 变换……VII, 3, 1
  ～空间……VII, 1, 2
  ～～K……VII, 1, 2
  ～～K 上的连续算子、泛函……VII, 1, 2
  ～～S……VII, 3, 6
  ～～S 与 K 的关系……VII, 3, 6

～～Z ……VII, 3, 1

基本解……VII, 3, 5

Laplace 方程的～……VII, 3, 5

勒贝格(Lebesgue)数……IV, 9, 4

距离……IV, 1, 2

欧几里得～……IV, 1, 3

第一可列公理……IV, 10, 1

第一类型(纲)的集……IV, 6, 3

第二类型(纲)的集……IV, 6, 3

商空间……IV, 2, 5

商集……IV, 2, 5

强致密集……V, 3, 3

十 二 划

超不变子空间……V, 5, 2

超平面……V, 2, 3

联络点集……IV, 4, 3

赋拟范线性空间……IV, 2, 3

赋范线性空间……IV, 2, 3

嵌入算子……V, 3, 1

最小二乘法……VI, 2, 2

最佳逼近……VI, 2, 2

幂等算子……VI, 5, 1

集

Borel～……IV, 4, 6

等价类……IV, 2, 5

等度连续函数族……IV, 9, 3

等距同构……IV, 1, 2

鲁津 (Лузин)的猜测……VI, 3, 2

就范直交系……VI, 3, 1

疏朗集(无处稠密集)……IV, 6, 3

循环元(生成元)……VI, 9, 7

十 三 划

概率测度……VI, 8, 5
　～空间……VI, 8, 5
简单函数……VI, 7, 2
稠定线性算子……VI, 9, 2
稠密性……IV, 6, 1
解析泛函……VII, 3, 2

十 四 划

算子
　线性～……V, 1, 1
　～的范数……V, 1, 2
　～的和、数积, 积……V, 1, 3
　～的延拓……V, 2, 2
　～膨胀……VI, 11, 4
　～的可交换性……V, 1, 3
　Hilbert-Schmidt 型积分～……V, 1, 1
　Fredholm～……V, 6, 1, VI, 4, 3
算子序列……V, 3, 2
　～的一致收敛……V, 3, 2
　～的强收敛……V, 3, 2
　～的弱收敛……V, 3, 2
算子空间$\mathfrak{B}(X\to Y)$……V, 1, 3
　～的一致拓扑……V, 3, 2
　～的强拓扑……V, 3, 2
　～的弱拓扑……V, 3, 2
算子大小的比较……VI, 5, 2
算子演算……VI, 8, 3
境界……IV, 4, 2
　～点……IV, 4, 2

谱、谱集……V, 5, 2
谱点……V, 5, 2
近似～……V, 5, 2
剩余～……V, 5, 2
谱半径……V, 5, 2
谱系……VI, 7, 3
谱测度……VI, 7, 2
～的延拓……VI, 7, 4
～空间……VI, 7, 2
乘积～……VI, 10, 2
谱积分……VI, 7, 2
～的性质……VI, 7, 2
弱～……VI, 7, 2
强～……VI, 9, 5
一致～……VI, 7, 2
谱系和谱测度的关系……VI, 7, 4

十 五 划

豫解算子……V, 5, 2